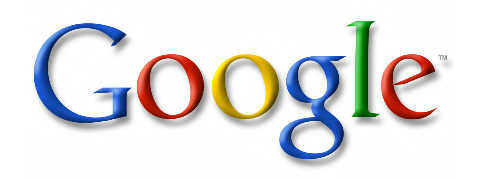
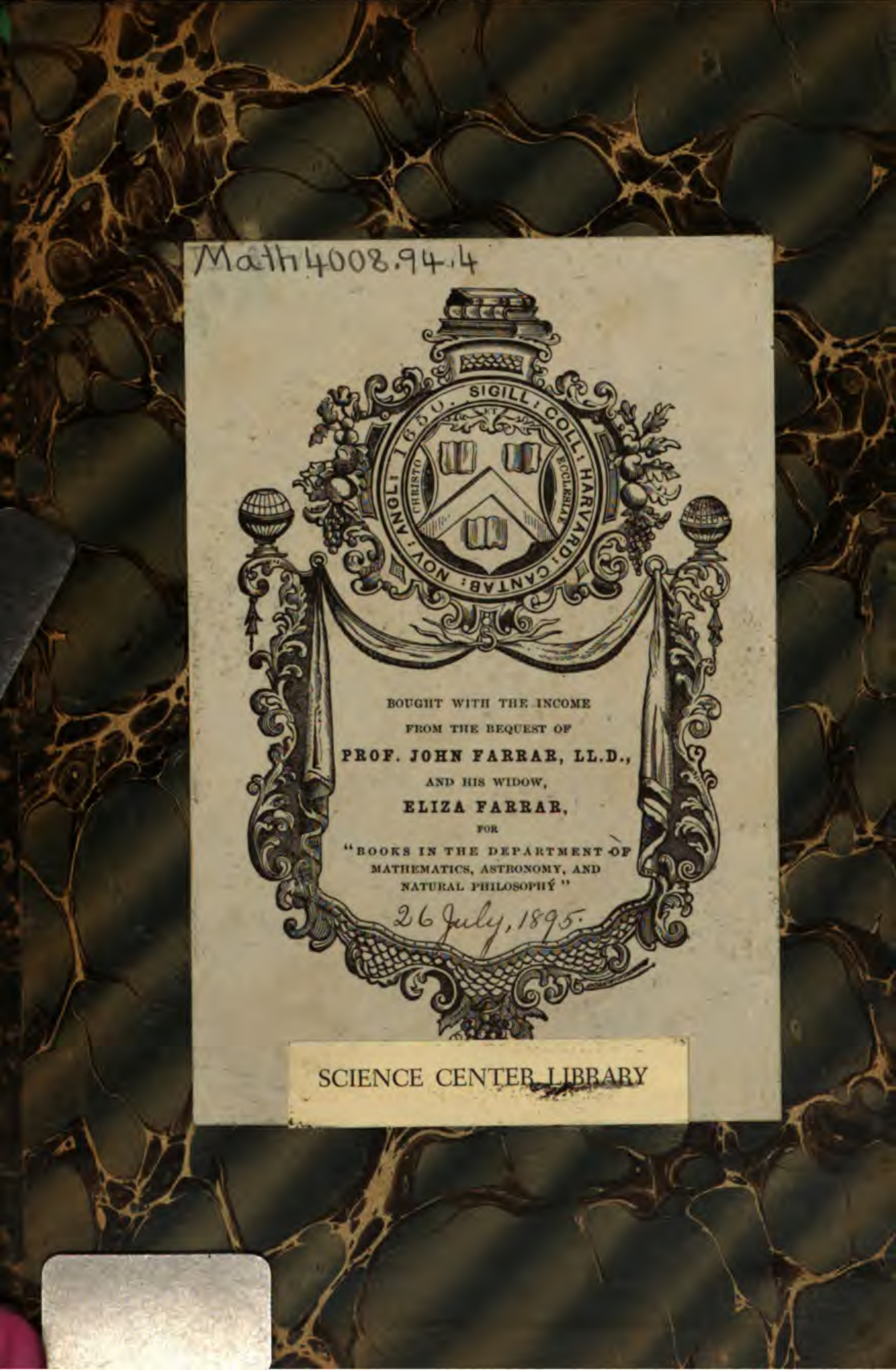
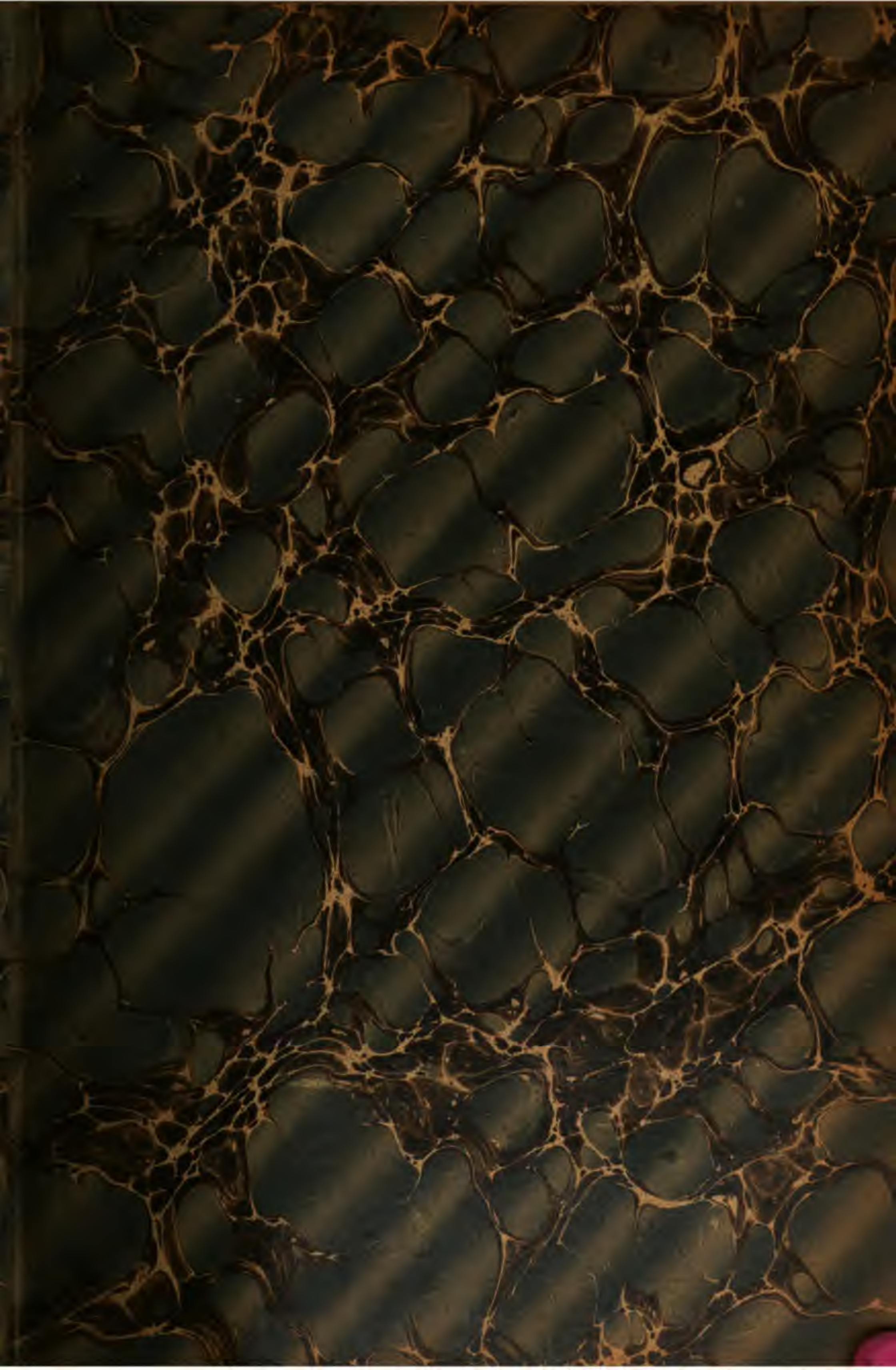



Math 4008.94.4
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
26 July, 1895.
SCIENCE CENTER LIBRARY



THÉORIE NOUVELLE

DU

SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME

ET SON APPLICATION AUX COORDONNÉES CURVILIGNES.

Extrait des *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Tomes XIII-XVIII,
1889-1894.

Bruxelles. — F. Hayez, imp. de l'Acad. royale.

THÉORIE NOUVELLE

DU

SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME

ET SON APPLICATION AUX COORDONNÉES CURVILIGNES

PAR

Marie Adolphe François
M. le Vte de SALVERT

DOCTEUR ÈS-SCIENCES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE DES SCIENCES
DE LILLE.

TOME I.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS & FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1894

TABLE DES MATIÈRES

DU TÔME I.

CHAPITRE III. — Équations aux dérivées partielles d'un système orthogonal triplement isotherme. — Solution détaillée du problème, pour tous les cas particuliers qui admettent des surfaces développables dans la composition du système.

SECONDE PARTIE.

CAS GÉNÉRAL DU PROBLÈME ET APPLICATIONS.

CHAPITRE IV. — Détermination, pour le cas le plus général, en fonction des coordonnées curvilignes, des trois invariants différentiels Δ_1 relatifs à ces coordonnées.

ERRATA DU TOME I.

Page 14, dernière ligne de l'énoncé en italiques, au lieu de « *toutes les autres données égales* », lire « *tous les facteurs donnés égaux* ».

— 16, lignes 11 par en haut, et 5 (de texte) par en bas, après les mots « quantité totale de chaleur gagnée », rétablir les mots omis « ou perdue ».

— 25, 7e ligne de texte, *idem*.

— 55, l'équation (47) doit être rétablie ainsi qu'il suit

$$k^2h^2(\rho^2)^3-[k^2(x^2+y^2+z^2)+(1+k^2)h^2](\rho^2)^2+[x^2+y^2+k^2(x^2+z^2)+h^2]\rho^2-x^2=0.$$

— 73, équation (65), au second membre, au lieu de

$$\frac{1}{P}(P\rho^2-\cdots), \qquad \text{lire} \qquad \frac{1}{P}(P^2\rho^2-\cdots).$$

— 104, lignes 9 et 10 de texte, au lieu de « l'équation (128) comprendra bien alors dans l'expression de ses coefficients (129) », lire « l'ensemble des coefficients de l'équation (128) comprendra bien alors dans leur expression (129) ».

— 117, 4e ligne de la note, au lieu de (pp. 98-99), lire (pp. 98-100).

— 118, dernière ligne du texte, après les mots « les trois axes », intercaler ceux-ci « de chaque surface en particulier ».

— 143, 3e ligne *par le bas* de la note, au lieu de « se produira », lire « se produisant ».

— 147, ligne d'équations qui suit celles (32), au lieu des premiers membres,

$$\Upsilon'\frac{d\Upsilon}{dx}=\cdots,\quad \Upsilon'\frac{d\Upsilon}{dy}=\cdots,\quad \Upsilon'\frac{d\Upsilon}{dz}=\cdots, \qquad \text{lire} \qquad \Psi'\frac{d\psi}{dx}=,\quad \Psi'\frac{d\psi}{dy}=,\quad \Psi'\frac{d\psi}{dz}=\cdots$$

— 154, équation de droite (ε) de la note, au lieu de

$$\mathcal{F}_2(x+iy) \qquad \text{lire} \qquad \mathcal{F}_2(x-iy).$$

— 158, 4e ligne de texte, au lieu de « dont la première », lire « en sorte que la première ».

— 160, équations (50), dans les premiers membres, au lieu de

$$\Delta_1\psi \quad \text{et} \quad \Delta_1\varpi, \qquad \text{lire} \qquad \Delta_1^2\psi \quad \text{et} \quad \Delta_1^2\varpi.$$

— 202, dernier terme de la dernière ligne d'équations du groupe qui suit celles (121) au lieu de

$$\frac{(x^2+y^2)}{z^4} \qquad \text{lire} \qquad \frac{(x^2+y^2)^2}{z^4}.$$

Page 217, avant-dernière ligne de texte, au lieu de « des deux équations », lire « des trois équations ».

— 220, 4e ligne, au lieu de « formules (65) » lire « formules (67) ».

— 231, 3e ligne de texte, au lieu de (48), lire (40).

— 232, 6e ligne, *par le bas*, au lieu de « fractions », lire « fonctions ».

— 240, 4e ligne de la note, au lieu de « ω et χ (111) », lire « ω et χ (46) ».

— 241, 4e ligne d'équations de la note, au second membre de l'équation de droite, au lieu de $\sin \overline{v}$, lire $\sin v$.

— 249, équation de droite (182), au lieu de

$$(\text{sn U dn V} - \text{sn V dn U})^2 \qquad \text{il faut} \qquad (\text{sn U dn V} + \text{sn V dn U})^2.$$

— 257, 4e ligne de texte, après le mot « Or, » rétablir les mots omis : « chacune des équations (13) se réduisant alors à un seul terme, par exemple ».

— 265, 6e ligne de texte, au lieu de « des plans ϖ », lire « des plans φ ».

— 280, 8e ligne de texte, au lieu de « la page 62 », lire « la page 48 ».

— 285, 2e ligne de texte, au lieu de

$$\frac{P}{\psi}, \quad \frac{Q}{\varpi}, \quad \frac{R}{\varphi} \qquad \text{lire} \qquad \frac{R}{\psi}, \quad \frac{P}{\varpi}, \quad \frac{Q}{\varphi}.$$

— 310, 3e ligne de texte, *par le bas*, au lieu de (30), lire (30) et (31).

— 317, 2e et 3e ligne de la note *par le bas*, au lieu de « $1.2 + 2.1.2 = 6$, au total *douze* », lire « $1.2 + 2.2.1.2 = 10$, au total *seize* ».

— 330, 1re et 2e lignes de la note, *par le bas*, au lieu des mots « réel et plus petit que l'unité », lire « ou à son complémentaire, tous deux réels et plus petits que l'unité ».

— 351, 10e ligne de texte, au lieu de « indiqué seul », lire « employé seul ».

— 353, 3e et 4e lignes de texte, au lieu de « mais que n'indiquent cependant ni Lamé ni Betti », lire « qui est bien indiqué, mais non utilisé par Lamé ».

— 355, 1re ligne d'équations, dernier terme, au lieu de

$$\frac{1}{2}\left(\frac{H}{\psi}L + \cdots, \qquad \text{lire} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{lH}{\psi}L + \cdots.\right.\right.$$

— 372, dernière ligne d'équations, au lieu de

$$+ \nu^2 f(\mu) \qquad \text{lire} \qquad + \tfrac{1}{2}\, \nu^2 f(\mu).$$

— 377, 2e et 3e lignes, au lieu des mots « chacune comme une solution », lire « comme constituant ensemble une solution ».

— 385, équations (151), dernier terme de la première, au lieu de $\Lambda_3)^2$, il faut $\Lambda_3^2)$.

— 385, 3e ligne, *par le bas*, après le mot « vérifient » rétablir le mot omis « simultanément.

Page 387, 3e ligne de texte de la note, au lieu de (148), lire (147).

— 404, 4e ligne, au lieu de (page 27), lire (page 127).

— 424, 1re ligne, au lieu de (178 *bis*), lire (178).

— 424, 4e ligne, au lieu de « par le système », lire « pour le système »

— 429, 12e ligne, au lieu de « à ce plan », lire « au plan des xy ».

— 433, 4e ligne, *par le bas*, au lieu de (157), lire (158).

— 435, équation de gauche (γ) de la note, au lieu de $-i\mathrm{K}_1 = \ldots$ lire : $i\mathrm{K}_1 = \ldots$.

— 442, 2e ligne de texte, au lieu de « D'autre part », lire « De même ».

— 459, au dernier membre de la dernière équation du tableau (72), au lieu de

$$\sqrt{-(1-k^2)(1-k^2t^2)}, \qquad \text{il faut} \qquad \sqrt{-(1-t^2)(1-k^2t^2)}.$$

— 466, dans les deux dernières lignes d'équations de la note, au dernier membre de la première, au lieu de

$$\mathrm{H}_2du^2 + \mathrm{K}_2dv^2 + \mathrm{J}_2dw^2, \qquad \text{il faut} \qquad \mathrm{H}_3du^2 + \mathrm{K}_3dv^2 + \mathrm{J}_3dr^2,$$

et aux premiers membres de la seconde, au lieu de

$$\mathrm{H}_2 = \mathrm{K}_2 = \ldots, \mathrm{J}_2 = \ldots, \qquad \text{il faut} \qquad \mathrm{H}_3 = \mathrm{K}_3 = \ldots, \mathrm{J}_3 = \ldots.$$

— 473, 10e ligne de texte, *par le bas*, au lieu de « chaque élément », lire « chaque terme ».

— 476, 5e et 6e lignes, au lieu de « $-lk'_1$ à $+lk'_1$ » lire « $-l$ à $+l$ ».

— 487, 4e ligne d'équation, pour le dernier terme, au lieu de

$$\frac{2\alpha!}{(\alpha-2)!}\,\frac{(-1)^2}{1.2}\,\frac{g^4}{1.2}, \qquad \text{il faut} \qquad \frac{2.\alpha!}{(\alpha-2)!}\,\frac{(-1)^2}{1.2}\,\frac{g^4}{1.2}.$$

— 487, 4e ligne de texte, au lieu de (106) lire (109).

— 489, 6e ligne de texte, supprimer les mots « comme nous l'avons dit ».

— 500, rétablir le numéro omis (130 *bis*) devant le premier groupe d'équations.

— 501, 5e ligne, après les mots « jusqu'à $i-1$ », rétablir les mots omis « valeurs qui sont ».

— 502, 3e ligne de texte, au lieu de « relatifs » lire « relatives ».

— 504, rétablir le numéro (133 *bis*) devant l'équation qui suit celle (133).

— 513, Dans la rubrique en majuscules, au lieu de « LES ÉLÉMENTS », lire « LES EXPRESSIONS ».

— 516, 4e ligne, au lieu de (109), lire (100).

— 519, équation (144), au lieu de

$$\overline{\mathrm{T}} = -\mathrm{T}_{\alpha+1} = \cdots, \qquad \text{lire} \qquad \overline{\mathrm{T}} = -\overline{\mathrm{T}}_{\alpha+1} = \cdots$$

— 528, équation qui suit le groupe (154 *bis*), au lieu de

$$\mathrm{P}\sqrt{\overline{\mathrm{P}}} = \cdots, \qquad \text{lire} \qquad p\sqrt{\overline{\mathrm{P}}} = \cdots.$$

Page 549, dernière ligne de la note, au lieu des mots « et les termes », lire « et les quantités H_x, H_y, H_z, qui entrent dans les termes ».

— 551, dernière ligne, au lieu de (pp. 474-475), lire (page 482).

— 552, équation du milieu (179), à la 1re ligne du déterminant, pour l'élément de la 2e colonne, au lieu de $m^3(\mathrm{sn}^3 u)_1$, il faut $m^3(\mathrm{sn}^3 v)_1$.

— 570, rétablir le numéro omis (206) devant l'unique groupe d'équations de cette page.

RAPPORTS

présentés à la Première Section de la *Société scientifique de Bruxelles*, par M. P. MANSION, membre de l'Académie royale de Belgique, sur le Mémoire de M. le Vte de Salvert, ayant pour titre : « Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme ».

I

La partie du Mémoire de M. de Salvert dont j'ai à vous rendre compte aujourd'hui comprend deux Chapitres.

La première partie du premier Chapitre traite de la propriété caractéristique des invariants différentiels

$$\Delta_1\omega = \sqrt{\left(\frac{d\omega^2}{dx^2} + \frac{d\omega^2}{dy^2} + \frac{d\omega^2}{dz^2}\right)}, \qquad \Delta_2\omega = \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{d^2\omega}{dz^2},$$

exprimés en coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ. L'Auteur démontre, d'une manière élégante et rapide, les formules connues

$$(\Delta_1\omega)^2 = (\Delta_1\varphi)^2 \frac{d\omega^2}{d\varphi^2} + (\Delta_1\psi)^2 \frac{d\omega^2}{d\psi^2} + (\Delta_1\varpi) \frac{d\omega^2}{d\varpi^2},$$

$$\Delta_2\omega = \Delta_2\varphi \frac{d\omega}{d\varphi} + \Delta_2\psi \frac{d\omega}{d\psi} + \Delta_2\varpi \frac{d\omega}{d\varpi} + (\Delta_1\varphi)^2 \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + (\Delta_1\psi)^2 \frac{d^2\omega}{d\psi^2} + (\Delta_1\varpi)^2 \frac{d^2\omega}{d\omega^2}$$

$$= \Delta_1\varphi\, \Delta_1\psi\, \Delta_1\varpi \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\, \Delta_1\varpi}\frac{d\omega}{d\varphi}\right) + \text{etc.}\right],$$

sur lesquelles sont basées les équations générales du problème établies dans un chapitre subséquent.

Dans la seconde partie du premier Chapitre, M. de Salvert établit les équations du mouvement de la chaleur, d'abord en coordonnées rectilignes, puis en coordonnées curvilignes, soit par transformation de coordonnés, soit directement. Cette seconde démonstration en coordonnées curvilignes est présentée avec une grande clarté, et offre un bon exemple de l'emploi direct de ces

coordonnées. L'Auteur critique avec raison, comme plusieurs de ses devanciers, au point de vue de la rigueur, les raisonnements qui ont servi à Fourier et à Lamé pour établir ces équations. Ces raisonnements, imités de celui d'Euler pour obtenir l'équation, dite de continuité, en Hydrodynamique, sont remplacées par la considération de volumes finis, reposant sur le lemme suivant : Si, pour tout volume pris à l'intérieur d'une certaine enceinte, l'intégrale triple $\int F(x, y, z)dxdydz$ est nulle, la fonction F est nulle pour les points de cette enceinte. Pour terminer, l'Auteur établit l'équation aux limites.

Le second Chapitre est beaucoup plus étendu que le premier, et est consacré principalement à la recherche des familles isothermes de surfaces du premier et du second ordre. L'Auteur donne d'abord leur équation aux dérivées partielles, soit sous la forme $\Delta_2\theta = 0$, θ étant le paramètre dit *thermométrique*, soit sous la forme, en apparence plus générale, $\Delta_2\lambda + (\Delta_1\lambda)^2 f\lambda = 0$, λ étant un paramètre *géométrique* lié au paramètre thermométrique par une relation de la forme $\lambda = F\theta$. Il fait ensuite observer que la connaissance de l'intégrale générale de l'une ou l'autre de ces équations ne permet pas de voir si telle ou telle catégorie de surfaces, déterminée par le degré ou la forme de l'équation, peut constituer une famille isotherme. En effet, pour identifier l'intégrale générale, qui contient des fonctions arbitraires, avec une surface d'espèce donnée, il faut particulariser ces fonctions arbitraires, et il n'existe aucun procédé certain conduisant, dans tous les cas, à la réalisation de l'identification cherchée. En outre, *à priori*, on ne sait pas s'il existe ou non des familles isothermes correspondant à une solution singulière de l'équation aux dérivées partielles $\Delta_2\theta = 0$. Or l'Analyse, dans son état actuel, n'a pas de méthode générale de recherche des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du second ordre. M. de Salvert appuie ces remarques générales de l'examen d'un cas particulier : il cherche directement, en vue d'en faire usage pour une question ultérieure, l'intégrale générale en coordonnées rectilignes de l'équation aux dérivées partielles des surfaces

coniques isothermes. Cette équation peut (comme pour les surfaces cylindriques) être mise sous la forme

$$\frac{d^2u}{dv^2}+\frac{d^2u}{dw^2}=0,$$

et il *semble* impossible, au premier abord, de déduire de l'intégrale générale une solution particulière évidente de cette dernière équation.

Puisque l'intégrale générale de l'équation $\Delta_2\theta = 0$, ou $\Delta_2\lambda + (\Delta_1\lambda)^2 f\lambda = 0$, ne peut servir à voir à coup sûr si une catégorie donnée de surfaces $L(x, y, z, \lambda)=0$ peut constituer une famille isotherme, il y a lieu de chercher une solution directe de cette question. Voici, en substance, celle que M. de Salvert a imaginée, dans ce but, pour les surfaces algébriques. Il déduit de la relation $L=0$,

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dx}=0, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 L}{\partial\lambda\partial x}\frac{d\lambda}{dx}+\frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dx^2}+\frac{\partial L}{\partial\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2}=0,$$

et deux couples de relations analogues en y et z. En ajoutant les trois secondes équations de chaque groupe, après en avoir éliminé $\frac{d\lambda}{dx}, \frac{d\lambda}{dy}, \frac{d\lambda}{dz}$ au moyen des premières, et tenant compte de la relation $\Delta_2\lambda + (\Delta_1\lambda)^2 f\lambda=0$, il obtient la relation fondamentale

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)^2\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right]-2\frac{\partial L}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial\lambda}+\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial\lambda}+\frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial\lambda}\right]\\&\quad+\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}-f\lambda\left(\frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2\right]=0.\end{aligned}\right\}\ (S)$$

Si $L=0$ est de degré m et a n coefficients, l'équation (S) sera de degré $3m-2$ et en aura un nombre N, toujours supérieur à $2n$, si m surpasse l'unité. L'équation (S), si $L=0$ représente une famille isotherme, devra être vérifiée quels que soient x, y, z. Elle se dissociera donc en N équations différentielles du second ordre en λ, entre les n coefficients de l'équation $L=0$; ces équations sont linéaires par rapport aux

dérivées secondes, et comme leur nombre est supérieur au double du nombre des inconnues, on peut espérer qu'en général elles se réduiront à un nombre de $N - n$ équations du premier ordre, formant un système *surabondant*. Par suite, sauf le cas que nous allons dire où ces $N - n$ équations ne seraient pas toutes distinctes, leur système intégral général contiendra au plus n constantes arbitraires, résultat extrêmement important, comme on le verra plus bas. Dans le cas exceptionnel mentionné tout à l'heure au contraire, où l'élimination des dérivées secondes ne fournirait ainsi qu'un nombre $n - k$ d'équations distinctes du premier ordre, les inconnues se trouveront déterminées par un système qui, ramené à la forme dite *normale*, serait d'ordre $n + k$, et conséquemment il ne pourra entrer au plus, dans leur expression la plus générale, que ce même nombre $n + k$ de constantes arbitraires. — D'ailleurs, dans tous les cas, comme la question ne dépend plus que d'équations différentielles ordinaires, on ne risque plus de laisser échapper les solutions singulières, comme dans le cas où la question était traitée au moyen des équations aux dérivées partielles.

Le reste du Chapitre contient la recherche des familles isothermes de plans, de sphères, de surfaces du second ordre, et enfin la démonstration de ce théorème : *Il n'existe pas de famille isotherme de la forme* $Ax^m + By^m + Cz^m =$ *const., si* m *est entier et supérieur à* 2. Chacun de ces différents sujets est traité à fond et minutieusement, et pour chacun d'eux le résultat confirme exactement les prévisions déduites *à priori* de la théorie générale que nous venons de résumer. Il convient de dire un mot en particulier des surfaces isothermes du second ordre. M. de Salvert démontre deux fois qu'il n'y en a pas d'autres que celles qu'avait indiquées Lamé. Dans l'Appendice, il le prouve directement, en considérant les *trente-cinq* équations différentielles dans lesquelles se décompose (S) quand on considère une surface générale du second degré. Au moyen de notations condensées, il parvient à mener à bonne fin les calculs en apparence effrayants auxquels conduit son ingénieuse méthode, et à retrouver les résultats obtenus plus simplement dans le texte même du

Mémoire. Là, il cherche et trouve les surfaces isothermes de la forme $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H$, en appliquant la méthode basée sur la relation (S), puis il en déduit les paraboloïdes isothermes par déformation des surfaces primitivement trouvées. Effectuant ensuite un changement de coordonnées rectilignes, il montre que les surfaces isothermes obtenues antérieurement contiennent alors $n = 10$ constantes arbitraires, et, par suite, qu'elles sont les plus générales de l'espèce proposée. Comme conclusion, il énonce, en les complétant selon qu'il vient d'être dit, les théorèmes de Lamé relatifs aux propriétés des quadriques isothermes.

Comme on le voit par cette analyse de ces deux Chapitres, ils contiennent deux résultats principaux sur lesquels il convient d'appeler l'attention. En premier lieu, une méthode ingénieuse pour trouver les solutions algébriques, de forme déterminée, d'une équation aux dérivées partielles en n'intégrant que des équations différentielles ordinaires. En second lieu, la preuve rigoureuse de la non-existence de surfaces isothermes du second ordre autres que celles découvertes par Lamé.

Le Mémoire est d'ailleurs écrit d'un bout à l'autre avec une clarté remarquable; partout où nous avons soumis les calculs de l'Auteur à une vérification détaillée, nous les avons trouvés minutieusement exacts et conduits d'une manière élégante. Peut-être le désir de donner à son travail toute la perfection didactique qu'il comporte a-t-il parfois entraîné M. de Salvert dans des détails un peu longs, principalement dans les observations qui précèdent et qui suivent les calculs. Mais ce défaut s'excuse aisément, si l'on a égard au but d'enseignement oral réalisé par l'Auteur.

Nous proposons donc à la section de voter l'impression des Chapitres que nous venons d'analyser dans le tome XIII des *Annales* et d'adresser des remerciements à l'Auteur.

(Séance du 2 mai 1889.)

II

Nous avons rendu compte antérieurement des deux premiers chapitres du Mémoire de M. de Salvert, consacrés, le premier, aux propriétés fondamentales des invariants différentiels Δ_1 et Δ_2 de Lamé et aux équations du mouvement de la chaleur en coordonnées quelconques; le second, à la recherche et aux propriétés caractéristiques des surfaces isothermes du premier et du second ordre.

Nous allons maintenant analyser les deux chapitres suivants, où la question de la détermination des systèmes orthogonaux triplement isothermes est traitée complètement dans un grand nombre de cas particuliers, et où elle est résolue quant à *la moitié* de la recherche dans le cas général.

Au début du Chapitre III, l'Auteur établit d'abord les équations aux dérivées partielles d'un système triplement orthogonal quelconque, trouvées par Lamé.

Il arrive à ces équations en opérant une substitution, inverse de celle de l'illustre géomètre, dans des formules qu'il a établies antérieurement dans son ***Mémoire sur la Courbure des Surfaces***.

Dans ce même travail, il avait obtenu, entre les six courbures principales de trois surfaces appartenant à un système orthogonal triplement isotherme, des relations que l'on ne trouve pas dans l'ouvrage de Lamé; transformées de la façon que nous venons de dire, ces relations lui fournissent le premier des deux groupes d'équations aux dérivées partielles de ce système, savoir :

$$P\frac{\partial Q}{\partial\varpi}\frac{\partial R}{\partial\psi}=Q\frac{\partial R}{\partial\psi}\frac{\partial P}{\partial\varpi}+R\frac{\partial P}{\partial\psi}\frac{\partial Q}{\partial\varpi}, \text{ etc.}; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$2PQR\left[Q\frac{\partial^2 P}{\partial\psi^2}+R\frac{\partial^2 P}{\partial\varpi^2}\right]=2\left[Q^2R\frac{\partial P^2}{\partial\psi^2}+QR^2\frac{\partial P^2}{\partial\varpi^2}-P^3\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right]+PG, \text{etc.}, \quad (2)$$

où φ, ψ, ϖ sont les fonctions définissant les coordonnées curvi-

lignes, devenues variables indépendantes, comme dans les calculs de Lamé, et où

$$P = \frac{\Delta_1 \varphi}{\Delta_1 \psi \Delta_1 \varpi}, \qquad Q = \frac{\Delta_1 \psi}{\Delta_1 \varpi \Delta_1 \varphi}, \qquad R = \frac{\Delta_1 \varpi}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi},$$

$$G = P^2 \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + Q^2 \frac{\partial R}{\partial \psi} \frac{\partial P}{\partial \psi} + R^2 \frac{\partial P}{\partial \varpi} \frac{\partial Q}{\partial \varpi}.$$

Le second groupe (2) n'est autre que celui posé par Lamé pour un système triplement orthogonal quelconque, mais toutefois développé complètement par le calcul des dérivées indiquées seulement par l'illustre Auteur. Les trois équations (1) se réduisent, d'ailleurs, à deux, car on peut établir entre elles une relation identique non donnée par Lamé; de plus, l'une d'elles peut être remplacée par la suivante, qu'il indique au contraire et qui correspond à un beau théorème découvert par lui :

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} \frac{\partial Q}{\partial \varpi} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\partial P}{\partial \varpi} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \frac{\partial R}{\partial \psi} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

d'après les conditions d'isothermie, P est d'ailleurs indépendant de φ, Q de ψ, R de ϖ.

Pour résoudre le problème que s'est proposé M. de Salvert, il faut d'abord intégrer de la façon la plus générale les équations (1) et (2), puis trouver, au moyen d'un autre groupe d'équations aux dérivées partielles qui lient x, y, z à φ, ψ, ϖ, les anciennes coordonnées en fonction des coordonnées curvilignes. Dans son Chapitre IV, M. de Salvert résout complètement, et de la manière la plus heureuse, la première de ces deux questions. Mais le procédé ingénieux auquel il a recours repose sur des calculs dont la légitimité présuppose qu'aucune des six dérivées partielles qui entrent dans l'équation (3) ne soit constamment nulle. Il ne s'applique donc pas aux cas particuliers où quelques-unes de ces dérivées (deux au moins, à cause de l'équation (3)) sont nulles. De là, la nécessité d'examiner préalablement tous ces cas particuliers. Tout le reste du Chapitre III (pp. 142-282)

est consacré à une discussion minutieuse de ces cas qui, géométriquement, correspondent aux systèmes triplement isothermes dont fait partie une famille de surfaces développables. Il ne se contente pas, dans ce chapitre, de l'intégration des équations (1) et (2), il achève, chemin faisant, la solution de la question en déterminant x, y, z par l'intégration du second système d'équations aux dérivées partielles dont il est question plus haut.

Voici l'énumération des problèmes spéciaux ainsi abordés successivement par M. de Salvert dans les cent quarante dernières pages de son Chapitre troisième.

1° Les six dérivées partielles de la relation (3) sont identiquement nulles. Le système se compose de trois séries de plans parallèles, perpendiculaires deux à deux.

2° Cinq des dérivées partielles sont identiquement nulles. Le système ne contient que des cylindres de révolution parallèles, des plans normaux suivant les génératrices, et des plans parallèles. Pour ce second cas déjà, de même que pour les cinq suivants, l'Auteur invoque les théorèmes relatifs aux propriétés caractéristiques des familles isothermes de surfaces, démontrés par lui, dans ce but, au cours du Chapitre II, et qui peuvent seuls fournir la certitude que les résultats analytiques renferment bien la totalité de la solution.

3° Quatre des dérivées partielles sont identiquement nulles. L'Auteur, en se servant habilement des équations (1), (2), (3), montre que les deux dérivées non nulles doivent se rapporter toutes deux à une même fonction P, Q, R, puis il établit successivement par deux calculs différents que le système se compose de deux séries de cylindres isothermes parallèles, normaux entre eux, et de plans perpendiculaires à leurs génératrices. Enfin il déduit des formules trouvées pour résulat quatre exemples de systèmes cylindriques à la fois orthogonaux et isothermes.

4° Trois des dérivées partielles sont identiquement nulles. Ici encore, à cause des relations (1), (2), (3), ces dérivées nulles ne sont pas arbitraires. Chacune des trois fonctions P, Q, R doit

avoir une dérivée nulle, mais deux de ces dérivées nulles doivent être prises par rapport à une même variable φ, ψ, ou ϖ, et la troisième doit être prise par rapport à une autre variable. L'Auteur détermine la nature du système, d'abord en s'aidant de considérations géométriques ingénieuses, puis au moyen de l'analyse; ensuite, il achève complètement la solution. Le système comprend, dans le cas actuel, des sphères concentriques, des plans méridiens passant par un diamètre de la sphère, et des cônes de révolution autour de ce diamètre.

5° Deux des dérivées sont identiquement nulles. Il faut, dans ce cas, que ces dérivées appartiennent à des fonctions différentes. Deux cas subsidiaires sont alors à distinguer. En premier lieu, si les dérivées sont relatives à des variables indépendantes différentes, par un choix convenable de nouvelles variables indépendantes, l'auteur ramène, pour ce cas, les équations du problème à une forme identique à celle qui a déjà été rencontrée lors du cas précédent 3°, relatif aux cylindres. Le système se compose, dans ce premier cas, de sphères concentriques, et de deux séries de cônes isothermes ayant pour sommets le centre des sphères. L'Auteur, dans une proposition qu'il croit nouvelle, signale ensuite un choix de variables auxiliaires qui permet de comprendre dans un même type de formules générales tous les systèmes orthogonaux et isothermes, soit de cônes, soit de cylindres, et il indique également le choix qu'il faudra faire des fonctions arbitraires qui y figurent pour en tirer notamment les deux systèmes importants composés, soit de cônes, soit de cylindres, homofocaux du second ordre.

En second lieu, les deux dérivées nulles peuvent être prises par rapport à une même variable. Pour ce second cas, qui offre un exemple remarquable d'application de la réciproque (signalée antérieurement par M. de Salvert) d'un théorème dû à Lamé, la solution est obtenue en intervertissant les fonctions inconnues et les variables indépendantes Le système se compose alors de plans passant par un même axe, et de deux familles de surfaces de révolution autour de cet axe; les méridiens sont des ellipses et des hyperboles homofocales. L'Auteur fait observer avec raison

qu'il est assez curieux que, dans le cas précédent, la solution contienne deux fonctions arbitraires, tandis que, dans le cas actuel, elle ne renferme que des constantes arbitraires.

Après avoir épuisé ainsi, dans le Chapitre III, tous les cas spéciaux où deux des six dérivées partielles sont identiquement nulles, M. de Salvert peut aborder le cas général, dans le Chapitre IV. Il peut multiplier, diviser les équations du problème et leurs transformées, par ces six dérivées, sans craindre d'introduire ou de supprimer des solutions.

Tout d'abord, après diverses transformations, dérivations, etc., il démontre que l'on a

$$P = [\Psi_1(\psi) + \Pi_2(\varpi)]^n, \quad Q = [\Pi_1(\varpi) + \Phi_2(\varphi)]^n, \quad R = \gamma[\Phi_1(\varphi) + \Psi_2(\psi)]^n,$$

l'exposant n étant, pour le moment, encore indéterminé. En substituant ces valeurs de P, Q, R, évidemment trop générales, dans l'équation (3), et dans la somme des trois équations (1), on parvient à réduire à trois les fonctions qu'elles contiennent. On trouve

$$P = \alpha[\Psi(\psi) - \Pi(\varpi)]^n, \qquad Q = \beta[\Pi(\varpi) - \Phi(\varphi)]^n,$$
$$R = \gamma[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)]^n.$$

Une transformation des équations (2) permet ensuite de prouver que $n = 1$, résultat important, qui ramène dès lors les expressions à la forme assignée par Lamé sans démonstration, dans son ouvrage classique.

Une fois arrivé à ces expressions, l'Auteur établit, en quelques pages, que *chacune des trois fonctions* Φ, Ψ, Π *satisfait à une même équation différentielle du cinquième ordre*, savoir, en appelant u l'une quelconque de ces fonctions,

$$D\left[\frac{1}{Du} D\left(\frac{D^3u}{Du}\right)\right] = 0, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

proposition remarquable, qui n'est énoncée ni dans l'ouvrage de Lamé, ni dans le mémoire de Betti sur la question. Toutes les

solutions du problème non obtenues dans le Chapitre III sont donc contenues virtuellement dans l'équation (4). Lamé, remarque M. de Salvert, a trouvé la solution complète, mais les raisonnements par lesquels il y est arrivé semblent si peu prouver qu'aucun cas n'est oublié, qu'il était indispensable, pour la validité de la théorie, de l'établir directement. C'est ce que permet de faire l'équation (4).

On trouve, en l'intégrant,

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = \sqrt{A(\Phi + a^2)(\Phi + b^2)(\Phi + c^2)},$$

$$\Phi = -a^2 cn^2(g\rho + h) - b^2 \operatorname{sn}^2(g\rho + h),$$

$$g = \tfrac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{a^2 - c^2}, \qquad k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

et des formules analogues pour Ψ, Π. Ces valeurs des trois fonctions Φ, Ψ, Π, et les valeurs correspondantes de P, Q, R, contiennent des constantes surabondantes qu'il s'agit de déterminer en exprimant que P, Q, R vérifient les équations (2).

Si l'on voulait faire directement cette détermination, on serait conduit à des calculs inextricables, où l'on devrait manier des équations contenant de six à sept cents termes. L'Auteur introduit de nouvelles variables, de nouvelles constantes, les détermine toutes au moyen de dix d'entre elles par la considération de valeurs spéciales des variables, et parvient à prouver, au moyen de transformations nouvelles, que, sans plus particulariser les résultats obtenus, ils vérifient les équations (2).

Nous croyons inutile de transcrire ici les valeurs définitives de Φ, Ψ, Π. L'Auteur termine le chapitre en démontrant la propriété suivante : Si l'on prend pour variables indépendantes les fonctions Φ, Ψ, Π à la place de φ, ψ, ϖ, l'expression, pour le cas le plus général, des trois invariants Δ_1, relatifs à ces nouvelles coordonnées, est exactement la même, à un même facteur constant près, que pour le système ellipsoïdal. Cela permet de *soupçonner* une remarquable connexité entre la solution du pro-

blème à résoudre dans le cas le plus général, et dans celui du système ellipsoïdal ; mais c'est dans le chapitre suivant que l'Auteur mettra cette connexité en pleine lumière.

Tel est le résumé des Chapitres III et IV du Mémoire de M. de Salvert, sur lequel nous sommes chargé de faire rapport. Nous ne pouvons dissimuler qu'il y a, en plus d'un endroit, des longueurs de rédaction, mais c'est le seul défaut de ce travail considérable. Nous devons avouer d'ailleurs que certains détails un peu longs, que nous avons critiqués dans le Chapitre II, lors de notre précédent rapport, étaient à peu près indispensables pour l'intelligence du troisième; et, sans doute, quelques-uns des passages qui aujourd'hui nous semblent inutiles ont aussi leur raison d'être, en vue de développements ultérieurs. Nous ne voulons donc pas insister sur le défaut indiqué ici en termes généraux.

Mais nous nous plaisons à signaler les qualités du Mémoire de notre confrère de Lille. L'intégration d'équations aux dérivées partielles non linéaires, telles que les équations (1) (2) (et aussi les équations principales du Chapitre III), constitue un problème réellement difficile, pour la solution duquel il n'existe aucune méthode générale. Les autres auteurs(*), qui ont traité depuis Lamé la question des surfaces orthogonales triplement isothermes ont reculé devant la difficulté de l'intégration des équations (1), (2), et ont préféré obtenir la solution par d'autres voies. Autant que notre incompétence dans la théorie des surfaces nous permet d'apprécier la méthode directe et plus élémentaire de M. de Salvert, il nous semble qu'en ramenant l'intégration des équations (1) (2)

(*) O. Bonnet a simplifié la solution de Lamé dans deux mémoires insérés dans le trentième cahier du *Journal de l'École polytechnique* et le tome XIV du *Journal de Liouville* (1849, pp. 401-416). Darboux a traité des questions plus générales dans le § XII de son mémoire *Sur les surfaces orthogonales* (Annales de l'École normale supérieure, 1886, t III, pp. 97-141) et dans les §§ XVII-XX de son *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (Ib., 2e série, 1878, pp. 101-150; 225-260; 275-348). Betti, *Sopra i sistemi di superficie isoterme e ortogonali* (Annali di Matematica, 2e série, t. VIII, pp. 138-145, 1877) esquisse la solution dans le cas général par une méthode originale, mais dont le point de départ est loin d'être élémentaire.

à celle de l'équation unique (4), il a fait faire un progrès sérieux à la théorie des systèmes orthogonaux triplement isothermes. Sans doute, si Lamé avait rencontré cette équation (4), il aurait trouvé, dans la simplicité même de ce résultat, une raison suffisante pour croire qu'elle contenait implicitement, non seulement le point de départ de la recherche des systèmes orthogonaux triplement isothermes, dans le cas général, mais aussi dans les cas-limites, que M. de Salvert a étudiés si minutieusement dans son Chapitre III. Au point de vue didactique, ce Chapitre III est d'ailleurs un bel exemple de discussion complète de tous les cas particuliers d'une question. Rien n'y est oublié : l'Auteur aborde et résout toutes les difficultés, au fur et à mesure qu'elles se présentent, sans redouter aucun calcul. Dans le Chapitre IV, il subdivise non moins habilement la question, de manière à guider pas à pas le Lecteur jusqu'au résultat final, sans jamais exiger de lui une trop grande contention d'esprit. L'exposition est d'une clarté extrême d'un bout à l'autre des deux cent treize pages dont se composent les Chapitres III et IV du Mémoire.

Nous proposons donc à la section de voter l'impression de ces deux chapitres dans le tome XIV de nos *Annales*, et d'y joindre l'introduction historique, où l'Auteur indique à grands traits le but et l'esprit de son travail en même temps que l'état antérieur de la question.

(Séance du 15 avril 1890.)

RAPPORT

présenté à la Première Section de la *Société Scientifique de Bruxelles*, par M. G. HUMBERT, Ingénieur au Corps des Mines, Répétiteur à l'École Polytechnique, sur le Chapitre VI et dernier du Mémoire de M. le V[te] de Salvert, ayant pour titre : « Mémoire sur la Recherche la plus générale d'un Système Orthogonal triplement Isotherme ».

La dernière partie du Mémoire de M. le Vicomte de Salvert — Mémoire dont les cinq premiers Chapitres ont été insérés dans les *Annales* — a pour but l'application à diverses questions de Géométrie et de Mécanique des coordonnées que l'Auteur nomme Thermométriques.

Dans ce système, les Coordonnées Cartésiennes d'un point quelconque de l'espace s'expriment en fonction doublement périodique de trois arguments, u, v, w; les formules obtenues par M. de Salvert sont remarquablement simples et symétriques, et les arguments u, v, w y figurent sous les signes classiques des fonctions elliptiques *sn*, *cn*, et *dn*; toutefois les fonctions elliptiques introduites sont formées avec trois modules différents. D'autres formules, non symétriques cette fois et déduites des précédentes, ne renferment que les fonctions *sn*, *cn*, *dn* formées avec deux modules complémentaires. Les limites entre lesquelles on doit faire varier les arguments pour obtenir tous les points de l'espace sont établies avec précision; dans cette question s'introduisent naturellement les intégrales complètes de première espèce, relatives aux trois modules primitifs et aux trois modules complémentaires; elles sont liées entre elles, et aux intégrales complètes de seconde espèce, par des relations simples, qui sont démontrées par deux méthodes différentes.

En Coordonnées Thermométriques, l'élément de volume se présente sous la forme d'un déterminant dont les trois colonnes contiennent chacune une et une seule des variables u, v, w; cette remarque capitale conduit l'auteur du Mémoire à des applications nombreuses.

Si l'on considère, en effet, le parallélipipède curviligne dont les faces sont formées par trois couples de surfaces homofocales du second ordre, appartenant chacun à une famille différente, la forme trouvée pour l'élément de volume montre que l'intégrale triple qui exprime le volume du solide se ramènera à des intégrales simples, portant séparément sur u, v, w : cela est évident si l'on observe que les surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ sont les trois familles d'un système homofocal du second ordre. Une propriété analogue appartient aux intégrales $\iiint (yz)^{2\alpha+1}\, d\mathrm{M}$ et $\iiint x^{\alpha} d\mathrm{M}$, $d\mathrm{M}$ désignant l'élément de masse (ou de volume).

Les quadratures auxquelles on est ainsi ramené peuvent se calculer de deux manières.

On peut d'abord prendre pour nouvelles variables, à la place de u, v, w, des quantités que l'auteur appelle p, q, r, et qui sont respectivement des fonctions elliptiques simples de u, v, w; une seconde méthode consiste à conserver les anciennes variables, et à intégrer directement les fonctions doublement périodiques qui se présentent au cours des calculs. Le premier procédé est celui que développe et qu'emploie presque exclusivement M. de Salvert.

Les conclusions analytiques auxquelles on parvient ainsi sont les suivantes : les intégrales $\iiint (yz)^{2\alpha+1}\, d\mathrm{M}$ se ramènent à des sommes d'intégrales triples de la forme

$$\iiint \mathrm{F}(p)\, \mathrm{F}_1(q)\, \mathrm{F}_2(r)\, dp\, dq\, dr,$$

où F, F_1, F_2 sont des polynômes entiers; quant aux intégrales $\iiint x^{\alpha} d\mathrm{M}$, leur calcul se réduit, en dernière analyse, à celui d'intégrales elliptiques classiques. Toutes les transformations, tions, souvent longues et compliquées, par lesquelles on établit ces résultats, sont exposées et conduites avec beaucoup de clarté et d'élégance.

A titre d'exemple, l'Auteur détermine le centre de gravité, le volume, les plans principaux et les moments principaux d'inertie du solide considéré plus haut; les calculs sont toujours poussés jusqu'au bout, et vérifiés chaque fois dans le cas-limite où le corps se réduit à un octant d'ellipsoïde; malheureusement les

formules générales sont assez compliquées, et ne paraissent entraîner aucune conséquence géométrique immédiate.

Une application d'un intérêt moins théorique est la détermination de l'action totale exercée, suivant la loi d'attraction de Newton, par un ellipsoïde homogène quelconque sur le solide considéré; la question est complètement résolue et les formules finales sont prêtes pour le calcul numérique. Comme conséquence se présente cette proposition intéressante : lorsque le centre de gravité de l'ellipsoïde et celui du solide coïncident, l'action se réduit à un couple qui tend à faire tourner le corps attiré autour du centre de gravité commun.

Enfin, la seconde méthode de calcul des intégrales triples à laquelle nous avons fait allusion plus haut est exposée dans un appendice (Note VI); M. de Salvert évalue, en conservant les variables u, v, w, l'intégrale $\iiint x dM$: la longueur des calculs met en évidence l'avantage que présente l'introduction des variables p, q, r.

Peut-être cet avantage eût-il été moins réel si l'auteur avait employé les Coordonnées Thermométriques sous la forme que leur donne Halphen dans son *Traité des Fonctions Elliptiques* (tome II, pages 458 et suiv.); l'introduction des fonctions p et σ de M. Weierstrass permet d'exprimer les Coordonnées Cartésiennes d'un point quelconque de l'espace à l'aide de trois arguments u, v, w, d'une manière aussi simple et aussi symétrique que l'a fait M. de Salvert; de plus, les fonctions p et σ des arguments qui figurent dans les formules d'Halphen ont un seul et même module. L'élément de volume se présente, à un facteur constant près (page 461), sous la forme

$$(pu - pv)(pv - pw)(pw - pu)\,du\,dv\,dw,$$

qui paraît l'emporter en simplicité sur le déterminant de M. de Salvert; c'est ainsi que le volume du solide étudié dans le Mémoire se calcule pour ainsi dire immédiatement, puisqu'on connaît les intégrales $\int pu\,du$ et $\int p^2u\,du$; de même, les intégrales triples $\iiint x dM$ et $\iiint (yz) dM$ sont faciles à réduire en prenant pour variables $\sqrt{pu - e_1}$, $\sqrt{pv - e_1}$, $\sqrt{pw - e_1}$, ce qui correspond au changement de variables fait par M. de Salvert.

En résumé, le fascicule qui nous a été adressé renferme des résultats analytiques et géométriques intéressants, et l'on ne peut qu'admirer l'habileté avec laquelle l'Auteur les a établis, en surmontant les difficultés des calculs algébriques et la complication des formules; les démonstrations et les discussions sont menées avec autant de sûreté que de rigueur. Nous prions la Société d'en voter l'insertion aux *Annales*, à la suite des remarquables Chapitres déjà publiés.

A l'un de ces Chapitres se rapporte une nouvelle Note (Note V), qui contient une démonstration simple du Théorème d'Abel pour les intégrales hyperelliptiques de genre deux; c'est une conséquence naturelle de résultats établis et publiés par M. de Salvert; elle fait corps avec les premières parties du Mémoire, et nous ne pouvons qu'en demander également la publication.

(Séance du 27 Octobre 1892.)

ANALYSE

présentée par l'Auteur, de la Note V de l'Appendice du « Mémoire sur la Recherche la plus générale d'un Système Orthogonal triplement Isotherme ».

Le Mémoire *Sur la Recherche la plus générale d'un Système Orthogonal triplement Isotherme*, ainsi que les Mémoires précédents *Sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* et *Sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tomes V, X, et XI) auxquels il fait suite, manifestent clairement, comme inspiration originaire et comme objectif commun, la pensée de reprendre en entier, pour l'adapter à l'état présent de l'Analyse et l'approprier aux exigences rigoureuses de l'Enseignement classique en sa forme actuelle, toute la partie de l'œuvre admirable de Lamé, qui se rapporte à la notion si féconde des Coordonnées Curvilignes. Cette donnée étant admise, la Note V de l'*Appendice* dudit Mémoire, insérée au Tome XVI de ces *Annales*, correspond exactement, dans le plan de l'Auteur, à la partie théorique des *Leçons sur les Fonctions Inverses des Transcendantes* (*) dans l'œuvre de Lamé, mais en étendant, toutefois, comme on va le voir, notablement le terrain étudié par l'illustre Géomètre dans cet ouvrage, et en n'envisageant exclusivement, comme éléments analytiques, pour représenter les différentes transcendantes, que les types classiques eux-mêmes, aux lieu et place des types très voisins, mais non identiques, considérés par lui, et dont l'usage ne s'est jamais répandu.

En effet, l'étroite connexité, qui existe essentiellement entre la notion des Intégrales Elliptiques et celle du Système triple-

---

(*) Nous voulons dire toute la première moitié de cet ouvrage (pages 1-195), la seconde ayant trait à des applications à la Physique Mathématique (Problème de l'Équilibre de Température pour divers corps successivement étudiés).

ment Isotherme quelle que soit la forme adoptée pour les calculs qui devront aboutir à la découverte de ce Système, devait inviter tout naturellement, aussi bien le modeste commentateur que l'illustre créateur de la théorie, à déduire immédiatement de ces calculs une démonstration facile et intéressante des formules fondamentales des Fonctions Elliptiques, dont la notion se trouve alors ressortir de la question elle-même. Mais, tandis que Lamé borne son étude aux seules fonctions elliptiques de première espèce, l'Auteur de la Note en question y considère successivement, pour en établir les formules d'addition, non seulement les trois espèces de fonctions elliptiques à la fois, mais encore les transcendantes qui s'offrent dans le Calcul Intégral, immédiatement après celles-là par ordre de complication, nous voulons dire les Fonctions Hyperelliptiques de la première classe, et en outre comme point de départ, et à titre d'instrument général pour procéder à cette étude, le célèbre théorème d'Abel, dont la notion ressort également d'elle-même des théories et des calculs développés antérieurement, en vue d'arriver précisément à la définition géométrique du Système triplement Isotherme.

Voici, au reste, l'indication sommaire de l'objet et des résultats de chacun des cinq paragraphes dont est composée ladite Note intitulée : *Sur une démonstration élémentaire du Théorème d'Abel, pour le cas particulier des Fonctions Hyperelliptiques, renfermée implicitement dans les résultats de la Note III précédente.*

Suivant que l'indique ce titre, dans le premier paragraphe, le théorème en question est déduit très aisément des calculs développés pour un tout autre objet dans une Note antérieure, sous la forme suivante :

« *Si l'on désigne par* F(ρ) *un polynôme quelconque du cin-*
» *quième degré à facteurs simples, que l'on pourra toujours*
» *représenter par*

$$(1) \qquad F(\rho) = (\rho + a^2)(\rho + b^2)(\rho + c^2)(\rho^2 + U\rho + V),$$

» *et si l'on fait, en outre, comme pour le Système triplement*
» *Isotherme,*

$$(2)\quad \begin{cases} X^2 = \dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \qquad Y^2 = \dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \qquad\qquad Z^2 = \dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \end{cases}$$

» *le système différentiel hyperelliptique à trois variables*

$$(3)\quad \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}} = 0, \qquad \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}} = 0,$$

» *outre l'intégrale transcendante évidente*

$$(4)\quad \int\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \int\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \int\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}} = W_1, \qquad \int\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \int\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \int\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}} = W_2,$$

» *admettra encore l'intégrale algébrique formée des deux équations*

$$(5)\quad \begin{cases} (\gamma Y - \beta Z)^2 + (\alpha Z - \gamma X)^2 + (\beta X - \alpha Y)^2 \\ \qquad = (b^2+c^2)\alpha^2 + (c^2+a^2)\beta^2 + (a^2+b^2)\gamma^2 - U, \\ a^2(\gamma Y - \beta Z)^2 + b^2(\alpha Z - \gamma X)^2 + c^2(\beta X - \alpha Y)^2 \\ \qquad = b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2 - V, \end{cases}$$

» *dans lesquelles* α, β, γ *sont trois constantes supposées liées par*
» *la seule relation*

$$(6)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

» *de manière que deux d'entre elles demeurent complètement*
» *arbitraires.* »

Ce résultat a été, depuis l'impression de la Note, généralisé par l'Auteur pour un nombre quelconque de variables, telles que λ, μ, ν. (Voir *Comptes Rendus*, Séance du 6 Février 1893.) Il n'est malheureusement pas susceptible, en cette forme, d'être rapporté ici parce qu'il exigerait de trop longues explications, mais il sera

possible néanmoins d'en donner un aperçu, en indiquant également, comme il suit, celle que revêt la même solution pour le cas immédiatement suivant de quatre variables λ, μ, ν, θ.

« *Si l'on désigne semblablement par* $f(\omega)$, $\mathfrak{F}(\omega)$, *et* $F(\omega)$, *les*
» *trois polynômes à facteurs simples,*

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} f(\omega)=(\omega+a^2)(\omega+b^2)(\omega+c^2)(\omega+d^2), \quad \mathfrak{F}(\omega)=(\omega+\lambda)(\omega+\mu)(\omega+\nu)(\omega+\theta), \\ F(\omega)=f(\omega)(\omega^3+U\omega^2+V\omega+W), \end{array} \right.$$

» *et si l'on fait, par analogie avec les expressions précédentes* (2),

$$(8)\quad X^2=\frac{\mathfrak{F}(a^2)}{-f'(-a^2)},\quad Y^2=\frac{\mathfrak{F}(b^2)}{-f'(-b^2)},\quad Z^2=\frac{\mathfrak{F}(c^2)}{-f'(-c^2)},\quad T^2=\frac{\mathfrak{F}(d^2)}{-f'(-d^2)},$$

» *le système différentiel hyperelliptique à quatre variables, dans*
» *l'écriture duquel nous faisons, pour abréger,* $\rho=\lambda, \mu, \nu, \theta$,
» *savoir*

$$(9)\qquad \sum_\rho \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=0,\qquad \sum_\rho \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=0,\qquad \sum_\rho \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=0,$$

» *outre l'intégrale transcendante évidente*

$$(10)\qquad \sum_\rho \int \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_1,\qquad \sum_\rho \int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_2,\qquad \sum_\rho \int \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_3,$$

» *admettra encore l'intégrale algébrique formée des trois équa-*
» *tions*

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} L^2+M^2+N^2+P^2+Q^2+R^2 \\ =(b^2+c^2+d^2)\alpha^2+(c^2+d^2+a^2)\beta^2+(d^2+a^2+b^2)\gamma^2+(a^2+b^2+c^2)\delta^2-U, \\ (c^2+d^2)L^2+(b^2+d^2)M^2+(b^2+c^2)N^2+(a^2+d^2)P^2+(a^2+c^2)Q^2+(a^2+b^2)R^2 \\ =(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)\alpha^2+(c^2d^2+c^2a^2+d^2a^2)\beta^2 \\ +(d^2a^2+d^2b^2+a^2b^2)\gamma^2+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\delta^2-V, \\ c^2d^2L^2+b^2d^2M^2+b^2c^2N^2+a^2d^2P^2+a^2c^2Q^2+a^2b^2R^2 \\ =b^2c^2d^2.\alpha^2+c^2d^2a^2.\beta^2+d^2a^2b^2.\gamma^2+a^2b^2c^2.\delta^2-W, \end{array} \right.$$

» *dans lesquelles*, L, M, N, P, Q, R *tenant lieu, pour abréger,*
» *des six différences*

$$(12)\quad \begin{cases} L = 6X - \alpha Y, & M = \gamma X - \alpha Z, & N = \delta X - \alpha T, \\ P = \gamma Y - 6Z & Q = \delta Y - 6T, & R = \delta Z - \gamma T, \end{cases}$$

» α, 6, γ, δ *désignent de nouveau quatre constantes liées par la*
» *seule relation*

$$(13)\qquad \alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1,$$

» *de manière que trois d'entre elles demeurent encore entièrement*
» *arbitraires.* »

Ces deux résultats, ainsi formulés, constituent, pour les deux cas successivement envisagés de trois ou de quatre variables, l'énoncé complet du théorème d'Abel, sous la forme même où il est présenté par Jacobi dans le paragraphe final (§ 8, p. 11) du célèbre Mémoire intitulé : *Considerationes generales de Transcendentibus Abelianis* (Journal de Crelle, Tome IX, p. 394), mais en y ajoutant à chaque fois l'indication de la forme explicite de l'intégrale algébrique dont l'énoncé de l'illustre Auteur se borne à certifier l'existence, sans produire toutefois cette intégrale elle-même. Enfin, étant joints à la communication susmentionnée tout à l'heure (*Comptes Rendus* du 6 Février 1893), dont ils constituent les deux cas particuliers les plus simples, ils fournissent la réponse complète au *desideratum* formulé par la dernière phrase du magistral exposé que nous venons de citer à l'instant, et qui a fondé, pour la première fois, sur ses véritables bases la théorie des transcendantes abeliennes : « *Ita etiam operæ pre-*
» *tium fore credimus, duarum illarum æquationum differentia-*
» *lium inter tres variabiles dua integralia completa algebraica,*
» *sive generalius* m — 1 *æquationum illarum differentialium*
» *inter* m *variabiles* m — 1 *integralia completa algebraica, per*
» *methodos directas integrationis investigare, atque ita nova*
» *nec minus singulari demonstratione Theorema Abelianum*
» *adornare* ».

Toutefois, l'Auteur de la Note analysée ne se borne pas à

cette seule forme du Théorème d'Abel; mais, au moyen de transformations faciles, il en déduit encore celle plus propre aux applications pratiques, sous laquelle ce même théorème est présenté, dans l'excellent *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Jordan, et qui est une généralisation aussi large que possible de l'autre forme sous laquelle ce même théorème est énoncé en premier lieu par Jacobi dans le § 2 (page 5) des *Considerationes* que nous venons de citer.

Dans le second paragraphe de la Note analysée, l'Auteur produit semblablement la forme explicite des formules d'addition des deux fonctions hyperelliptiques, que nous représenterons par $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$, dont il est question dans le théorème du § 6 (pp. 8-9) des mêmes *Considerationes*, formules dont l'existence est encore certifiée simplement par l'énoncé de l'illustre Géomètre, sans aucune indication sur la forme même de ces équations. Dans ce but, l'Auteur envisage d'abord, à la place des deux fonctions précitées, deux autres $\Phi(u, v)$ et $\Psi(u, v)$, appartenant à la même catégorie analytique, c'est-à-dire ne différant des précédentes que par l'introduction, dans chacun des arguments, d'une certaine constante additive [tout comme le cosinus se rattache au sinus par la relation $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$], ou, en d'autres termes, telles que l'on ait

$$\Phi(u, v) = \varphi(u + \omega', v + \omega''), \qquad \Psi(u, v) = \psi(u + \omega', v + \omega''),$$

et, avec ces nouvelles fonctions, si l'on convient alors de représenter par X_1, Y_1, Z_1, ou par X_2, Y_2, Z_2, ce que deviennent les quantités X, Y, Z définies par les équations (2) ci-dessus, après que l'on y a remplacé λ, μ, ν respectivement par

$$(14) \qquad \lambda_1 = \Phi(u_1, v_1), \qquad \mu_1 = \Phi(u_2, v_2), \qquad \nu_1 = \Psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$

ou par

$$(15) \qquad \lambda_2 = \Psi(u_1, v_1), \qquad \mu_2 = \Psi(u_2, v_2), \qquad \nu_2 = \Phi(u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$

les formules d'addition annoncées par Jacobi seront, sous forme

explicite, pour lesdites fonctions Φ et Ψ, les deux suivantes :

$$
(16)\left\{\begin{aligned}
&(Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + (Z_1X_2 - X_1Z_2)^2 + (X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 \\
&+ \{U-(b^2+c^2)\}(X_1-X_2)^2 + \{U-(c^2+a^2)\}(Y_1-Y_2)^2 + \{U-(a^2+b^2)\}(Z_1-Z_2)^2 = 0, \\
&a^2(Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + b^2(Z_1X_2 - X_1Z_2)^2 + c^2(X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 \\
&+ (V - b^2c^2)(X_1 - X_2)^2 + (V - c^2a^2)(Y_1 - Y_2)^2 + (V - a^2b^2)(Z_1 - Z_2)^2 = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Il serait facile de déduire de même de l'intégrale algébrique (11) les formules d'addition analogues des fonctions hyperelliptiques de la seconde classe, c'est-à-dire à trois variables : Φ (u, v, w), Ψ (u, v, w), Π (u, v, w). Mais pour ne pas allonger outre mesure celle-ci, nous les réserverons pour une autre communication.

Les équations précédentes (16) étant, de même que les expressions X, Y, Z, irrationnelles par rapport à chacune des six quantités (14) et (15), l'Auteur se propose ensuite de les ramener à une forme qui soit rationnelle et entière non pas seulement, ainsi qu'on le demande habituellement, par rapport aux deux dernières de ces deux séries de quantités, auquel cas ces équations seraient alors du *second* degré seulement par rapport à elles (*Considerationes*, § 2, p. 5 *au bas*, et § 6, p. 8 *idem*), mais bien par rapport aux six fonctions (14) et (15) à la fois, comme le sont par exemple les formules qui donnent sin $(a+b)$ et cos $(a+b)$ ou comme le seraient celles qui donnent sn $(a+b)$, cn $(a+b)$, dn $(a+b)$, après qu'on en aurait chassé le dénominateur. Dans ce but, l'Auteur fait voir que ces mêmes équations sont équivalentes ensemble à deux autres équations réalisant ces conditions qu'il écrit explicitement sous la forme de déterminants, l'une du quatrième et l'autre du cinquième degré par rapport à l'une quelconque de ces six quantités (14) et (15) isolément, ou du huitième et du dixième degré par rapport à l'ensemble des deux dernières fonctions considérées comme les inconnues. Puis il indique le moyen de déduire de ces formules d'addition (16) relatives aux fonctions Φ et Ψ, à l'aide d'une simple élimination algébrique, celles des fonctions primitivement considérées φ et ψ

de Jacobi, ainsi que les formules analogues pour un nombre quelconque d'arguments.

Enfin, à titre de vérification en même temps que d'exemple d'application desdites formules (16), il montre aisément, par un calcul direct, qu'elles mettent bien en évidence les périodes connues des fonctions Φ et Ψ, qui sont évidemment les mêmes que celles des fonctions φ et ψ de Jacobi.

Les trois paragraphes suivants ont pour but de présenter un exemple d'application des théories et des méthodes développées dans les deux premiers, à propos du cas plus simple des fonctions elliptiques qui, correspondant à l'hypothèse d'une variable en moins, permettra toujours d'effectuer en réalité complètement tous les calculs.

Partant de cette donnée, l'Auteur établit, les unes après les autres, les formules fondamentales (nous voulons dire celles d'addition, dont peuvent être à la rigueur tirées toutes les autres) des trois espèces de fonctions elliptiques, en appliquant le théorème d'Abel, démontré dans le paragraphe I, successivement aux trois types d'intégrales

$$(17)\qquad \int_{-a^2}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}},\qquad \int_{-a^2}^{\rho} \frac{\rho+a^2}{\sqrt{f(\rho)}}\,d\rho,\qquad \int_{-a^2}^{\rho} \frac{\rho+a^2}{\rho-r}\,\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}},$$

dans l'écriture desquelles il est fait, pour abréger,

$$f(\rho) = (\rho + a^2)(\rho + b^2)(\rho + c^2).$$

Dans le paragraphe III, le calcul reproduit, à cet effet, de point en point, avec une variable de moins, celui développé dans le paragraphe II précédent pour trouver les formules d'addition des fonctions hyperelliptiques, et constitue dès lors un nouveau mode de démonstration des formules qui donnent sn $(u+v)$, cn $(u+v)$, et dn $(u+v)$, à ajouter à la série déjà si nombreuse des démonstrations connues de ces formules.

Semblablement dans le paragraphe IV, considérant à tour de rôle les deux dernières intégrales (17), et leur appliquant pas

à pas tous les raisonnements et les procédés de calcul qui ont servi dans le paragraphe I à démontrer le théorème d'Abel, l'Auteur parvient ainsi successivement, pour les fonctions de deuxième et de troisième espèce, aux deux formules connexes

$$(18)\quad \begin{cases} Z(\varphi+\psi) = Z(\varphi) + Z(\psi) + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi), \\ \Pi(\varphi+\psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \dfrac{1}{2}\log \dfrac{1+k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}h \operatorname{sn}(\varphi+\psi+h)}{1-k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}h \operatorname{sn}(\varphi+\psi-h)}, \end{cases}$$

dont la première peut d'ailleurs être déduite aisément comme cas-limite de la seconde, en divisant simplement cette dernière par le paramètre h, et faisant ensuite $h = 0$.

Enfin, dans le paragraphe V, en s'aidant tant de ces dernières formules que des calculs qui ont servi à les établir, et partant de la considération de la différence, symétrique (au signe près) en ρ et r, de deux intégrales de troisième espèce, telle que

$$\Delta = \int_{-a^2}^{\rho} \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{f(\rho)}} \frac{d\rho}{\rho - r} - \int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{f(r)}} \frac{dr}{r - \rho},$$

puis transformant, à l'aide d'un procédé dû à Jacobi pour les intégrales hyperelliptiques en général, chacune de ces deux intégrales en intégrales doubles aux mêmes limites en ρ et r, et remarquant enfin que l'intégrale double par laquelle peut, dans ces conditions, être exprimée cette différence elle-même, se décompose alors en intégrales simples de première et de seconde espèce, l'Auteur établit par ce moyen, tout d'abord, la formule connue de l'échange de l'argument et du paramètre, savoir

$$\Pi(\omega, h) - \Pi(h, \omega) = hZ(\omega) - \omega Z(h),$$

de laquelle il déduit ensuite, en quelques lignes, ainsi qu'on le fait habituellement, en premier lieu, la formule connexe de la seconde formule (18), relative à l'addition des paramètres dans

la fonction de troisième espèce, savoir

$$\Pi(\omega,p+q)=\Pi(\omega,p)+\Pi(\omega,q)-k^2\omega\,\mathrm{sn}\,p\,\mathrm{sn}\,q\,\mathrm{sn}(p+q)$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{1+k^2\mathrm{sn}\,p\,\mathrm{sn}\,q\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{sn}(p+q+\omega)}{1-k^2\mathrm{sn}\,p\,\mathrm{sn}\,q\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{sn}(p+q-\omega)},$$

et, de ces deux dernières elles-mêmes, enfin, la formule générale d'addition pour cette espèce de fonction, formule nouvelle qui les comprend l'une et l'autre à titre de cas particulier, savoir

$$\Pi(\varphi+\psi,p+q)=\Pi(\varphi,p)+\Pi(\varphi,q)+\Pi(\psi,p)+\Pi(\psi,q)$$
$$-k^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}\,p\,\mathrm{sn}\,q\,\mathrm{sn}(p+q)+\frac{1}{2}\log\Omega,$$

Ω désignant une certaine fonction déterminée des sinus d'amplitude des combinaisons les plus simples des quatre quantités φ, ψ, p, et q.

En résumé, grâce à la merveilleuse fécondité du théorème d'Abel qui fait le sujet principal de la Note analysée, les formules fondamentales se trouvent établies, pour les trois espèces de fonctions elliptiques, simultanément, par un procédé uniforme et à l'aide des mêmes éléments analytiques, en partant exclusivement, comme on l'a vu, de la notion des intégrales de première, de deuxième, ou de troisième espèce, qui donnent naissance aux différentes fonctions envisagées : alors que, dans tous les traités d'Analyse les plus estimés et les plus répandus, la démonstration de ces mêmes formules procède de deux points de départ absolument différents selon les cas, étant toujours déduite de la notion desdites intégrales, quand il s'agit des fonctions de première espèce, et reposant, au contraire, exclusivement sur la notion beaucoup plus complexe des développements en série ou en produits infinis qui constituent les fonctions Θ de Jacobi, lorsque l'on considère celles de deuxième ou de troisième espèce. En y joignant la considération des formules (5), (11), et (16), qui n'avaient peut-être pas encore été produites, c'est dans cette particularité que consiste le caractère le plus saillant du travail qui vient d'être analysé.

THÉORIE NOUVELLE

DU

SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME

INTRODUCTION

Parmi les questions d'ordre majeur que l'on rencontre dans l'Analyse des Surfaces, l'une de celles qui méritent le mieux de fixer l'attention, tant à cause de son intérêt propre que de l'importance de ses applications, est assurément la détermination, de la façon la plus générale possible, d'un Système Orthogonal triplement Isotherme. Mais, par une coïncidence heureuse, qui se rencontre d'ailleurs assez fréquemment dans la Science, parce qu'elle tire sa raison d'être de l'étroite connexité, dans les régions élevées, des divers ordres de spéculation mathématique, cette même question, dont la possession de la solution semble ainsi des plus désirables, se trouve être en même temps l'une de celles dont l'étude, considérée intrinsèquement, c'est-à-dire abstraction faite des conséquences du résultat à intervenir, présente à un esprit curieux le plus d'attrait, en raison des problèmes d'Analyse multipliés et intéressants qui se posent successivement lorsque l'on veut en poursuivre la solution, et qui constituent dès lors comme autant de défilés ou d'obstacles qu'il faudra franchir l'un après l'autre avant de parvenir au terme de la recherche.

C'est à Lamé que revient l'honneur d'avoir posé le premier la question dans des termes tels que ces différents problèmes ne

semblent pas inabordables, malgré la complication du sujet, dans l'état actuel de l'Analyse, et, en traçant d'une main sûre le programme des opérations successives à accomplir pour cet objet, d'avoir ainsi découvert et indiqué la route qui devra conduire sans incertitude à la solution tout entière de la question. Malheureusement, lorsqu'il en vient à traiter le problème, Lamé ne remplit ce programme que d'une manière insuffisante, et, pour l'une des opérations précitées tout au moins, la façon dont il l'accomplit et les procédés d'Analyse auxquels il a recours, ne créent aucune certitude quant à la généralité de la solution rencontrée par lui, laquelle devra dès lors, jusqu'à nouvel examen, être envisagée comme une solution remarquable, mais très particulière : en sorte que l'on est bien forcé de dire, qu'après avoir posé le problème, Lamé ne le résout pas, et que sa théorie, si remarquable qu'elle soit, laisse la question réellement ouverte quant à l'étendue et à la généralité de la solution.

C'est sans doute ce fait, que l'inventeur lui-même n'est arrivé, après des efforts considérables, à tirer de sa méthode qu'un résultat qui est loin d'être satisfaisant, qui semble avoir détourné, pendant un assez long temps, les Géomètres d'étudier la question du Système triplement Isotherme à l'aide de cette méthode elle-même, et de reprendre le problème d'Analyse dans les termes précis où Lamé l'avait posé : car les remarquables travaux qui ont été publiés sur la question, postérieurement au travail définitif de Lamé, par divers Géomètres éminents, tels par exemple que Bonnet (*) et M. Bertrand (**) font intervenir tous d'ingénieuses considérations, d'ordre géométrique la plupart du temps, complètement étrangères, ou ne se rattachant que d'une manière éloignée, à la méthode exclusivement analytique spécifiée en termes si précis par l'illustre Auteur des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*.

Ce n'est, à notre connaissance, que vingt-quatre années après le travail définitif de Lamé, nous voulons dire le *Mémoire sur les*

(*) Journal de Liouville, Tome XIV, pages 401-416.
(**) Ibid., Tome IX, page 317.

Surfaces Orthogonales et Isothermes (*), qui est de 1843, que le problème se trouve repris incidemment, en 1867, exactement dans les mêmes termes, et traité assurément avec un progrès notable, quoique incomplètement encore, comme nous le dirons un peu plus loin, dans un remarquable Mémoire de M. Combescure, où l'Auteur traite avec un réel succès la question beaucoup plus générale et plus difficile des Coordonnées Curvilignes non Orthogonales (**). Puis, dix ans après, en 1877, le problème est enfin résolu pour la première fois d'une façon complète et satisfaisante, dans une brillante esquisse de quelques pages seulement de M. Enrico Betti, dont nous allons parler également tout à l'heure (***), mais qui, empruntant son point de départ aux récents travaux de Lipschitz et Christoffel sur les formes quadratiques de *n* différentielles, ne s'adresse point à la même catégorie de Lecteurs que le présent travail, et qui par conséquent, même en supposant celui-ci réduit à la seule recherche de la solution la plus générale du problème, ne lui enlèverait encore, croyons-nous, ni son utilité ni son intérêt.

Enfin, nous devons relater également ici que presque en même temps que le premier de ces Auteurs, en 1866, M. Darboux, dans une Thèse hors de pair (IV), dont le dernier paragraphe, connexe à ce sujet, se trouve reproduit et amplifié douze ans plus tard, dans un Mémoire plus étendu sur les Coordonnées Curvilignes (V), a résolu également par le fait le même problème par l'intégration directe des équations de Lamé relatives à la recherche des Systèmes Orthogonaux en général, en substituant à la condition de l'isothermie des trois familles de surfaces du Système, cette

(*) JOURNAL DE LIOUVILLE, Tome VIII, 1843 (pp. 397-434).

(**) ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, Ire série, Tome IV (1867). *Sur les Déterminants Fonctionnels et les Coordonnées Curvilignes*, page 93 [le § VII (p. 122), qui seul concerne le Système Isotherme, étant par conséquent seul en cause dans la relation sommaire que nous allons en faire].

(***) ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, Série II, Tome VIII (1877) (pp. 138-146.)

(IV) ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, Ire série, Tome III (1866), pp. 97-144.

(V) IBID., IIe Série, Tome VII (1878). *Mémoire sur la Théorie des Coordonnées Curvilignes et des Systèmes Orthogonaux;* 3e Partie, § XVII, pp. 303-348.

autre, plus générale, qu'elles soient comme elles divisées chacune en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure (*). Mais les équations qu'il intègre ainsi avec un rare bonheur, malgré la difficulté du problème, bien qu'empruntées au départ à la théorie de Lamé, ne sont donc pas celles posées par l'illustre Auteur pour la recherche du Système triplement Isotherme, mais correspondent à un problème plus général, dont l'idée n'a pu lui être suggérée que par la belle propriété de ce Système, découverte par M. Bertrand dans le travail déjà mentionné plus haut; et dès lors, le problème d'Analyse qu'il résout différant entièrement de celui que nous nous sommes proposé, il nous suffit d'avoir signalé ce travail remarquable, sans que nous ayons à en rechercher les points de contact qui pourraient exister avec le présent Ouvrage.

Nous n'établirons donc ici cette comparaison que relativement aux seuls Mémoires précités de Lamé, de M. Combescure, et de M. Betti.

Dans le travail dont nous voulons parler, de même que dans les *Leçons* (beaucoup plus connues) *sur les Coordonnées Curvilignes*, Lamé divise, comme on sait, la recherche en deux étapes ou problèmes subsidiaires distincts, l'un ayant pour but la détermination des paramètres différentiels des trois coordonnées curvilignes en fonction de ces coordonnés elles-mêmes, et l'autre celle de l'expression en fonction des mêmes coordonnées des trois coordonnées rectilignes, ou, ce qui revient au même, celle de l'équation des familles de surfaces qui composent le Système triplement Isotherme. Pour le premier de ces problèmes (§§ IX-XVII), son analyse, bien qu'affreusement compliquée et d'une lecture extrêmement pénible, résout, il est vrai, la question pour le cas le plus général, d'une façon complète et satisfaisante. Mais il est bien loin d'en être ainsi quant au second problème subsidiaire, pour lequel son calcul élégant et facile, qui reproduit simplement

(*) Voir notamment les deux derniers alinéas du travail en question, page 141 du Recueil indiqué dans la note précédente.

celui des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, ne justifie que d'une façon très insuffisante la conclusion qu'il en formule, et ne crée nullement la certitude au sujet du théorème célèbre, ainsi découvert et articulé par lui, et auquel, à cause de cela, son nom restera néanmoins toujours justement attaché.

Ayant déduit, en effet, par la différentiation des équations du problème en question, qui sont du premier ordre et *non linéaires*, trois équations du second ordre linéaires, toutes trois de même forme, auxquelles devra satisfaire simultanément chacune des coordonnées rectilignes en particulier (*), Lamé se propose d'atteindre le but en calculant, à l'aide de considérations de symétrie, une solution commune à ces trois équations envisagées à la fois, et astreignant cette solution, une fois découverte, à satisfaire ensuite aux conditions relatives aux limites du Système, qui sont représentées précisément pour chaque famille par les plans coordonnés eux-mêmes.

Cette méthode serait légitime si, pour le calcul de cette solution commune, Lamé commençait par rechercher et obtenir effectivement l'intégrale la plus générale de l'une des trois équations en question en particulier, et, partant alors d'intégrales semblables, restreignait ensuite pas à pas les arbitraires qu'elles renfermeraient par l'obligation de satisfaire successivement, d'abord aux deux autres équations analogues, puis aux équations du premier ordre proposées elles-mêmes, et enfin, aux conditions relatives aux limites du Système. Mais ce n'est point là du tout la marche du calcul suivie effectivement par Lamé, ni les résultats réalisés par son analyse.

En effet, pour intégrer les équations linéaires du second ordre, qui sont à deux variables indépendantes seulement, Lamé emploie le procédé général de la Physique Mathématique, consistant à composer la solution d'une série infinie de solutions particulières, satisfaisant isolément aux diverses conditions imposées, et multipliées chacune par un coefficient indéterminé.

(*) Nous voulons parler des équations (159) de notre Chapitre V (page 395 du Tome I.)

Mais, bien qu'entraîné par l'analogie de ce nouveau problème avec ceux de la Physique Mathématique, pour lesquels ce genre de solution permet de satisfaire à la fois à toutes les conditions arbitraires *que comporte la nature physique de la question*, Lamé décore du nom d'*intégrale générale* la solution qu'il obtient par ce procédé pour l'une quelconque des trois équations du second ordre précitées (*), il est bien visible qu'une semblable solution ne saurait constituer, en réalité, l'*intégrale générale* (dans le sens que l'on attribue à ce mot en Analyse) d'aucune des trois équations en question; attendu que cette intégrale générale devrait renfermer deux fonctions entièrement arbitraires, tandis que l'indétermination des coefficients de la série envisagée, sur laquelle repose seule la généralité d'une solution ainsi formée, étant complètement épuisée par la seule condition que l'inconnue se réduise à une fonction arbitrairement donnée de l'une des variables indépendantes pour une valeur numérique donnée de l'autre variable, cette solution ne peut donc être considérée comme renfermant qu'*une seule* fonction arbitraire; et dans ces conditions, la solution d'où part Lamé, pour la restreindre ensuite comme nous l'avons dit, n'étant qu'une solution particulière, rien ne montre que cette solution soit la seule admissible, ni par conséquent que le résultat auquel aboutit son analyse contienne bien en réalité toutes les solutions possibles du problème.

En se plaçant à un autre point de vue, d'ailleurs, et sans rappeler, comme nous venons de le faire, les caractères essentiels de l'intégrale générale en Analyse, il saute aux yeux que l'appareil analytique composé du signe sommatoire Σ et des coefficients indéterminés, dont Lamé fait état et s'autorise pour qualifier d'*intégrale générale* une semblable solution, ne saurait être

(*) Ces équations, en effet, toutes simples qu'elles paraissent, offrent néanmoins une réelle difficulté quant à leur intégration générale, car bien que rentrant à la fois dans les deux types étudiés par LAPLACE et par AMPÈRE, elles ne réalisent pas les conditions exigées pour être intégrables, soit par l'une, soit par l'autre des méthodes qui s'y rapportent.

a priori qu'un véritable trompe-l'œil dans la question actuelle, dont les équations primitives (celles du premier ordre) ***ne sont pas linéaires***, attendu qu'alors chacune des séries ainsi envisagées ne pourra fournir une solution effective du problème qu'à la condition de se réduire à un seul terme, ainsi que Lamé est tout aussitôt contraint de le faire, en alléguant, il est vrai, des raisons tirées de considérations accessoires, mais commandé en réalité, en cela, sans qu'il fût nécessaire de faire intervenir ces considérations, par la nature non linéaire des équations du système.

La même critique s'applique exactement dans les mêmes termes à l'analyse de Lamé, pour la même partie de la recherche relative aux Cas particuliers du problème qu'il traite dans les cinq paragraphes précédents (§§ III-IX), et au sujet desquels nous nous bornerons en conséquence à signaler une grave omission de sa part dans l'énumération des dits Cas particuliers, et dans l'indication des solutions du problème non comprises dans la solution générale.

Lamé ne mentionne, en effet, dans son Introduction, relativement à cette dernière catégorie de solutions (page 399, avant-dernier alinéa, *in fine*), et par suite ne recherche et ne découvre dans son Mémoire, que les seuls Systèmes des Cylindres Isothermes, oubliant ainsi complètement les Systèmes des Cônes Isothermes en général, qui constituent une solution parallèle en quelque sorte à la précédente, et dont celle-ci peut être envisagée comme un cas-limite (*).

Nous réparons cette omission, et donnons en son lieu les équations complètes de ce Système [formules (162) et (163), pages 231-232, Tome I], en mettant en lumière ce parallélisme des deux solutions en question, à l'aide d'une proposition

(*) LAMÉ ne mentionne, en effet, quelques lignes plus haut, que les seuls Cônes Isothermes *du Second Ordre*, lesquels rentrent très aisément dans la solution générale à l'aide d'un simple changement des constantes du Système, ainsi qu'il le fait voir lui-même dans son dernier paragraphe (§ XVII, pages 431-432).

intéressante qui, croyons-nous, n'avait pas encore été formulée (pages 255-256. *Ibid.*).

Enfin, quant aux applications que fait Lamé de son Système triplement Isotherme, et au parti qu'il tire ainsi de son admirable découverte, nous nous contenterons de rappeler qu'elles sont exposées en détail dans ses deux Ouvrages très connus *Sur les Coordonnées Curvilignes* et *Sur les Fonctions Inverses des Transcendantes,* auxquels il nous suffira d'engager le Lecteur à se reporter.

Passons maintenant aux deux autres Mémoires qui ont successivement amélioré ou perfectionné l'analyse de Lamé.

Le premier paru, qui est celui de M. Combescure, apporte une simplification incontestable aux calculs touffus et d'aspect si peu engageant de son illustre devancier, et au point de vue de la clarté et de la facilité de la lecture, il marque donc un progrès sensible, pour le premier problème subsidiaire de Lamé, sur le Mémoire célèbre que nous venons de critiquer. Mais il est une part importante de cette recherche pour laquelle cette facilité ne nous semble obtenue dans son analyse qu'au détriment de la rigueur et de la certitude du résultat, et qu'il nous est, pour cette raison, impossible d'accepter, à savoir la partie de son calcul qui a pour but la détermination, en fonction de la coordonnée curviligne correspondante, de chacune des inconnues auxiliaires qu'il nomme $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (nos fonctions Φ, Ψ, Π), et qui représentent les quantités A^2, $- A_1^2$, et A_2^2 de Lamé.

Étant parvenu, en effet, à déterminer, à l'aide d'un calcul remarquable par sa simplicité et son élégance, la forme de l'équation différentielle du premier ordre à laquelle devra satisfaire l'une de ces inconnues en particulier, il forme immédiatement les trois équations analogues correspondant aux trois fonctions précitées, c'est-à-dire, en fait, aux trois cooordonnées curvilignes, en changeant simplement, pour passer de l'une à l'autre, les dénominations de la fonction inconnue et de la variable indépendante, mais en maintenant « par symétrie », dit-il, *les*

mêmes coefficients constants pour les trois équations à la fois (*loc. cit.*, pp. 125-126).

L'Auteur nous semble, en cela, faire un emploi tout à fait illégitime de la considération de la symétrie, et supposer gratuitement une propriété très particulière et remarquable de ces équations qu'il s'agissait en réalité d'établir, car la symétrie qui ressort des calculs antérieurs impose seulement l'obligation que ces trois équations *aient la même forme*, mais nullement que les coefficients des termes correspondants soient les mêmes constantes, en passant d'une équation à l'autre (*). Or, c'est précisément la démonstration de ce fait capital qui constitue, comme on le verra dans notre travail, la partie peut-être la plus difficile, ou tout au moins assurément la plus laborieuse, de cette première étape de la recherche, seule traitée d'ailleurs dans celui de M. Combescure.

Quant à la seconde, en effet, c'est-à-dire « quant à la détermination finale de x, y, z, il n'y a rien, dit-il, à substituer au calcul de M. Lamé ». La critique que nous avons développée

(*) Si l'on devait donner à la notion de symétrie la signification restreinte que l'Auteur lui attribue indûment, à notre avis, dans cette circonstance, l'on serait conduit forcément à cette conclusion que, dans tout système de coordonnées curvilignes orthogonales, l'expression de celles-ci en fonction des coordonnées rectilignes serait toujours les trois racines d'une même équation en x, y, z, ou, en d'autres termes, que dans tout Système Orthogonal, les trois familles de surfaces qui le composent seraient nécessairement trois classes de surfaces comprises à la fois dans *la même* équation, chacune pour des limites différentes du paramètre. Or, il n'en n'est nullement ainsi dans la réalité, et si cette circonstance se trouve réalisée dans le Système Ellipsoïdal, ou des Coordonnées Elliptiques, elle constitue alors une propriété très remarquable, spéciale à ce Système et à celui plus général des surfaces du quatrième ordre, étudiées par M. Darboux dans le travail susmentionné, ainsi que cet éminent Géomètre le déclare en termes explicites dans les deux passages suivants de ses ouvrages : « Remarquons que ce système triple jouit de la propriété si remarquable du système des surfaces du second degré. Les trois familles qui le composent sont représentées par la même équation. » (*Mémoire sur la Théorie des Coordonnées Curvilignes*, etc., IIe Partie, § XI, *loc. cit.*, page 241, troisième alinéa.) « Ainsi notre système du quatrième ordre comprend comme cas particulier le système des surfaces homofocales du second degré, et comme lui, il est formé de trois classes de surfaces comprises dans la même équation... Tous les autres systèmes connus sont formés de trois séries de surfaces différentes... La propriété que nous signalons met donc à part les deux systèmes orthogonaux formés des surfaces du quatrième et du deuxième ordre. » (*Thèse d'Analyse*, § 2, p. 2, avant-dernier alinéa.)

tout à l'heure, avec tout le respect dû au grand nom de Lamé, a montré suffisamment que ce n'était point là du tout notre sentiment, et que nous pensions, contrairement à l'avis de M. Combescure, que c'était *surtout* ce second calcul de l'illustre Auteur qui nous paraissait défectueux et contestable, et qui demandait, avant tout autre, à être repris sur d'autres bases et par d'autres procédés.

Venons enfin au dernier en date des travaux susmentionnés, à savoir celui de M. Betti.

Cette analyse beaucoup plus complète et plus satisfaisante que les deux précédentes, malgré l'extrême concision de sa rédaction qui dissimule imparfaitement la réelle complication de ses calculs, résout le second problème subsidiaire de Lamé en le ramenant, ainsi que nous le ferons nous-même, à l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales, ou, ce qui revient au même, à celui d'un système d'équations aux dérivées partielles à une seule inconnue. Mais pour traiter ce dernier problème, au lieu de procéder comme nous à une intégration directe du système en question, il se contente d'en démontrer l'intégrabilité (*), et ce fait une fois acquis, de remarquer, que ledit système étant linéaire et homogène par rapport aux inconnues, il suffira dès lors, pour avoir son intégrale générale d'en posséder trois solutions particulières, solutions qui lui sont alors fournies, sans calcul nouveau, par l'analyse élégante de Lamé qui, pour cet objet restreint, n'encourt plus aucun des reproches que nous étions dans l'obligation de lui adresser tout à l'heure, pour le rôle tout différent qu'elle était destinée à remplir dans la théorie de l'illustre Géomètre.

(*) Si l'on voulait partir, comme nous, des équations mêmes de Lamé, sans avoir recours aux notations et aux formules empruntées à la théorie des formes quadratiques de différentielles qu'emploie M. Betti, la simple vérification de ces conditions connues d'intégrabilité pour le système envisagé serait alors tout aussi pénible et assurément beaucoup plus fastidieuse que l'intégration directe que nous faisons de ces mêmes équations. C'est pourquoi la marche du calcul adoptée par M. Betti, qui est assurément moins naturelle, ne nous paraîtrait offrir alors aucune espèce d'avantage.

Mais, bien que la question soit ainsi résolue complètement en un très petit nombre de pages, nous croyons que notre analyse, pour le moins aussi rigoureuse, paraîtra en réalité d'une lecture beaucoup plus facile, malgré qu'elle soit notablement plus longue, en même temps qu'elle n'exigera la connaissance d'aucune des théories récentes de haute Analyse auxquelles M. Betti a cru devoir, ainsi que nous l'avons déjà dit, emprunter le point de départ de ses calculs (*).

Enfin, quoique les deux systèmes d'équations aux dérivées partielles successivement envisagés par M. Betti soient exactement, avec d'autres notations toutefois, ceux mêmes indiqués

---

(*) Sans parler de l'appareil analytique assez insolite emprunté à ces théories encore fort peu connues, il s'est glissé malheureusement dans le travail très remarquable de M. Betti une série de fautes d'impression regrettables, qui, à l'avant-dernière page notamment, rendent l'enchaînement et les détails de son calcul complètement incompréhensibles pour qui ne connaîtrait pas la manière réelle dont il doit être rétabli.

N'ayant pas sous les yeux le volume même du Recueil dans lequel a été publié ce travail, et ignorant par suite s'il existe un *Erratum* où ces fautes soient indiquées et corrigées, nous croyons devoir signaler ici les plus importantes pour le Lecteur qui ne posséderait, comme nous, ledit travail qu'en exemplaire *tiré à part* ou *Extrait* du Recueil en question.

Sans parler de fautes évidentes, et qui se rétablissent très aisément, à la quatrième et à la dernière page, et pour nous borner à l'avant-dernière seulement :

1° A la 5e ligne de texte de cette page, il faut λ_s, μ_s, ν_s à la place de λ_i, μ_i, ν_i, et de même aussi dans la ligne d'équations qui suit celle-là, en y écrivant en même temps, pour plus de carté, $\sum_s$ à la place de $\sum$, ainsi qu'il est fait dans les équations subséquentes;

2° Dans les trois équations similaires qui suivent les équations (8). il faut, aux seconds membres, à la place de 0, respectivement B_1, B_2, B_3;

3° A l'équation suivante (unique), il faut de même au second membre, B_i à la place de 1.

Enfin, relativement à cette dernière équation elle-même, il semble qu'il eût fallu, pour le développement intégral de la méthode adoptée, et pour une démonstration complète à l'égard d'un Lecteur supposé ignorant de la proposition à établir, il eût fallu, à notre sens, disons-nous, s'assurer, avant de terminer, que les solutions particulières, désignées synthétiquement par le symbole Y_{si}, qu'il obtient par le calcul de Lamé, et dont il se sert quelques lignes plus bas pour constituer sa solution définitive, vérifiaient bien effectivement les équtions du type que nous venons de dire, car c'est sur cette hypothèse que repose l'interprétation qu'il donne des constantes d'intégration $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \lambda_s', \mu_s', \nu_s'$, et comme conséquence la réduction de la solution la plus générale du problème à la connaissance d'un seul Système satisfaisant à la question.

Assurément, ce dernier calcul n'est pas bien difficile à établir, une fois obtenu le résultat final auquel on doit arriver; mais encore était-il nécessaire, à notre sens, de mentionner, au moins en quelques mots, l'opération à faire pour cela, faute de laquelle le cycle des raisonnements nécessaires pour constituer la démonstration ne peut être considéré comme complet et définitivement fermé.

par Lamé, nous croyons devoir faire observer qu'il ne s'astreint pas à la marche si logique et si satisfaisante, indiquée par l'illustre Auteur et rigoureusement observée par lui, ainsi que par nous dans le présent travail (*), et consistant à intégrer ces deux systèmes successivement et séparément, nous voulons dire à n'aborder l'intégration du second que lorsque l'on est assuré, par la possession effective de la solution du premier, que cette solution existe réellement.

En effet, quant au premier de ces systèmes (c'est-à-dire pour le premier problème subsidiaire de Lamé), M. Betti se borne à calculer l'expression de l'élément d'arc ou, ce qui revient au même, celle des inconnues primitives H, H_1, H_2 en fonction des inconnues auxiliaires A, A_1, A_2 de Lamé, et ne se préoccupe en rien de rechercher celle de ces dernières inconnues en fonction des coordonnées curvilignes elles-mêmes. Or, comme on est ici sur un terrain analytique pour lequel les théories générales font complètement défaut (l'intégration de systèmes d'équations aux dérivées partielles *entre plusieurs inconnues*), et qu'on ne peut dès lors être certain de l'existence effective de ces quantités auxiliaires que lorsque l'on aura obtenu en réalité leurs expressions que nous venons de dire, l'existence de ces inconnues H, H_1, H_2 n'est donc nullement assurée dans la question par la seule possession de leur expression précitée en fonction des quantités A, A_1 A_2, prises comme inconnues auxiliaires pour la facilité du calcul ; et par suite, il semblera peut-être peu rationnel et méthodique de tenter laborieusement, à l'aide de procédés savants et compliqués, l'intégration du second des systèmes susmentionnés, dont les coefficients sont formés précisément avec les mêmes fonctions A, A_1, A_2 et leurs dérivées, et qui n'aurait plus dès lors aucune signification au cas où lesdites quantités n'auraient pas d'existence effective dans la question (**).

(*) Et aussi par M. COMBESCURE, en supposant qu'il eût repris de même à nouveau le second problème subsidiaire de LAMÉ.

(**) En d'autres termes plus concis, le problème total du Système triplement Isotherme posé par LAMÉ consistant, d'une manière générale, dans l'intégration simultanée d'un

Rappelons enfin, en terminant cet exposé des travaux de nos deux devanciers, qu'admettant tous deux comme point de départ l'équation connue du Mouvement de la Chaleur, ils ne procèdent ni l'un ni l'autre à la recherche des Cas particuliers du problème non compris dans la solution générale, ni à l'étude des applications aux Coordonnées Curvilignes que l'on pourra faire des résultats obtenus pour ces solutions, soit particulières, soit générales, en sorte que leurs travaux que nous venons d'analyser correspondent uniquement à l'objet de nos Chapitres IV et V (*), lesquels, s'ils constituent au fond la partie la plus essentielle de notre Ouvrage, représentent à peine, comme étendue, la *septième partie* de son développement total seulement (117 pages sur 850). Il nous reste donc à présent, en faisant connaître le plan et la division de notre travail, à indiquer en quelques mots les raisons qui nous ont conduit à étendre d'une façon aussi notable le cadre des questions que nous y avons successivement introduites.

Cet Ouvrage, qui comprend ainsi, groupées en vue de l'Enseignement, tout un ensemble de questions en connexion immédiate avec la *Recherche la plus générale d'un Système Orthogonal triplement Isotherme* (titre sous lequel nous l'avons fait paraître par portions successives en forme de Mémoire) (**), est composé de deux Parties principales, formant le Tome I, subdivisées chacune en trois Chapitres, et d'un Appendice formant le Tome II, subdivisé lui-même en six Notes, lesquels seront consacrés aux objets suivants.

Dans le Tome I, et la Première Partie intitulée *Préliminaires*

---

système d'équations aux dérivées partielles entre les six inconnues H, H_1, H_2, x, y, z, qui se décompose lui-même en deux systèmes partiels dont l'un ne renferme que les trois inconnues H, H_1, H_2 seulement, la seule marche véritablement logique et rationnelle consiste évidemment à commencer par traiter celui-là, et à n'aborder le second que lorsqu'on sera assuré, par le succès de l'intégration relative au premier, que ce même système admet bien réellement une solution.

(*) Celui de M. COMBESCURE même à notre seul Chapitre IV (80 pages), puisque cet Auteur ne traite que le premier problème subsidiaire de LAMÉ.

(**) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENT. DE BRUXELLES, Tomes XIII, XIV, XV, XVI, et XVII.

et Cas Particuliers Remarquables, le Chapitre I se propose pour but de remédier à l'insuffisance, universellement reconnue aujourd'hui, de la démonstration primitive de l'équation du Mouvement de la Chaleur, due à Fourrier et reproduite par Lamé, dont les procédés sont imités de ceux d'Euler en Hydrostatique, et de Bernoulli en Hydrodynamique, pour l'équation dite *de continuité.* Dans ce but, cette équation fondamentale, point de départ obligé de toute la théorie qui va suivre, se trouve établie, pour un système de coordonnées quelconque, à l'aide d'un raisonnement entièrement nouveau, présentant toutes les conditions de rigueur justement exigées à l'époque actuelle pour l'Enseignement classique; et le fait, que la forme de l'équation précitée est ainsi reconnue indépendante du système de coordonnées envisagé, fait ressortir nettement, à l'aide d'une interprétation intuitive convenablement déduite, toute l'importance qu'offre la question du Système triplement Isotherme pour les différents problèmes de la Physique Mathématique, et justifie ainsi à l'avance le développement considérable des calculs qu'entraînera la recherche intégrale de toutes ses solutions.

A la vérité, tous les éléments essentiels qui constituent la démonstration que nous venons de dire se trouvent bien reproduits, avec d'autres notations et sans explications suffisantes, sous la forme d'une question générale d'Analyse, dans une courte Note du regretté M. Gilbert (l'un des derniers travaux qu'il ait publiés), en sorte que le Lecteur du présent Ouvrage pourrait être très naturellement amené à penser que nous l'avons empruntée en réalité à cet éminent Professeur. Il suffira, pour maintenir nos droits à la priorité de signaler ce simple fait, que le premier Chapitre de notre travail, dans lequel se trouve notre démonstration en question, a été publié dans le Tome XIII (1888-89) des *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,* tandis que le travail similaire de M. Gilbert n'a paru que *dans le Tome suivant* XIV (1889-90) (soit *un an* entier *plus tard*) de la même Revue (*).

(*) Le présent Ouvrage ne devant être offert au Public que quelques années après le travail en question de M. Gilbert, et le nom de cet Auteur ayant dans le monde savant une

Le Chapitre II, après avoir montré, d'après Lamé, comment s'introduit la notion des familles isothermes de surfaces, et rappelé les solutions fournies par l'illustre Auteur pour les questions fondamentales qui s'imposent au début de leur théorie, développe et applique une méthode nouvelle pour la recherche générale de semblables familles, méthode qui pourrait aussi bien être étendue en Analyse à la recherche des solutions de forme déterminée d'une équation quelconque aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes. Les résultats analytiques de l'application de cette méthode aux trois catégories de surfaces les plus simples et les plus usuelles, nous voulons dire le plan, la sphère, et les surfaces du second ordre en général, viennent compléter à un point de vue essentiel, pour la recherche de tous les Systèmes Isothermes sans exception, ceux déjà signalés par Lamé pour ces différentes classes de surfaces; et, étant formulés en théorèmes, pour en faciliter l'énonciation et le souvenir, ils nous fournissent alors, dans le Chapitre III suivant, la base solide qui nous garantira seule la certitude que notre analyse ne laissera échapper aucune solution possible du problème.

Le Chapitre III enfin pose, également d'après Lamé, les équations générales aux dérivées partielles auxquelles satisfait tout Système Orthogonal triplement Isotherme, et entame la question par l'examen des Cas particuliers remarquables, dont les uns, à savoir ceux qui constituent les trois systèmes de coordonnées classiques, pourront être déduits ultérieurement de la solution générale, ainsi que le fait voir en terminant Lamé (*loc. citat.*, §§ XVII-XVIII, pp. 431-434), à titre de cas-limites, à l'aide d'un simple changement des constantes, tandis que les autres, ne pouvant être tirés de cette même solution générale par aucune modification des paramètres du Système, constituent en quelque

---

notoriété qui est bien loin de nous appartenir, l'on trouvera sans doute tout naturel que nous ayons à cœur de défendre notre priorité scientifique au sujet de cette démonstration qui nous paraît offrir un sérieux intérêt, non pas seulement pour la question spéciale de la Chaleur, à propos de laquelle nous la formulons, mais encore pour l'équation de continuité en Hydrodynamique (ainsi que nous l'avions remarqué, et que le fait aussi M. GILBERT), à laquelle elle s'applique tout aussi exactement, en changeant purement et simplement le nom et l'interprétation physique de chacune des quantités qui y figurent.

sorte des solutions *singulières* du problème proposé, dont la recherche s'impose dès lors avec la même attention et la même rigueur que celle de cette solution la plus générale elle-même. Le caractère commun de ces solutions, tant particulières que singulières, étant, en effet, ainsi qu'on le reconnait aisément de prime abord, d'admettre des surfaces développables dans la composition du Système, rien ne montre *a priori* que les plans, les cylindres, et les cônes soient les seuls genres de surfaces, empruntés à cette catégorie si étendue, qui soient capables de fournir des solutions, et par conséquent, que les deux Systèmes des Cylindres et des Cônes Isothermes constituent effectivement les deux seules solutions singulières que comporte le problème.

Le Lecteur voudra bien remarquer, au sujet de notre analyse relative à la détermination, tant de ces solutions particulières ou singulières dans ledit Chapitre III, que de la solution la plus générale dans les Chapitres suivants IV et V, le soin minutieux que nous apportons, parfois au prix d'apparentes longueurs, à toujours rechercher et obtenir effectivement la solution la plus générale possible pour chacune des questions partielles ou subsidiaires qui s'imposent à nous successivement, et dont la superposition constitue précisément, dans chaque cas, l'ensemble de la recherche; car, vu la multiplicité de ces problèmes subsidiaires, la moindre négligence à cet égard pour un seul d'entre eux suffirait pour ouvrir dans notre théorie comme une fissure, par laquelle pourrait nous échapper une part importante de la solution définitive, c'est-à-dire, en fait, pour enlever aux résultats de notre recherche le caractère certain d'universalité que nous avons le plus à cœur de leur imprimer, et dont la mise en évidence, à l'abri de toute contestation, constitue précisément l'un des intérêts principaux de notre travail.

Dans la Seconde Partie, consacrée exclusivement à l'examen du *Cas général du Problème et* des *Applications* qu'on en peut faire, le Chapitre IV poursuit et développe la solution du premier problème subsidiaire dont Lamé fait dépendre la recherche proposée, et consistant à déterminer de la façon la

plus générale les trois paramètres différentiels Δ_1, relatifs aux trois coordonnées curvilignes (les inconnues h, h_1, h_2 de Lamé, ou, ce qui revient au même, leurs inverses H, H_1, H_2) en fonction de ces coordonnées curvilignes elles-mêmes. C'est le problème résolu complètement par Lamé, dans son grand Mémoire analysé ci-dessus, par le moyen d'un calcul auquel on ne peut reprocher qu'une extrême complication et une allure fort pénible, problème repris depuis par M. Combescure, avec un réel bonheur, avons-nous dit, pour une part notable de cette recherche. Nous espérons que notre analyse, aussi simple et d'une lecture aussi facile que celle de ce dernier Auteur, quoiqu'entièrement différente, sera jugée plus complète et plus satisfaisante, en ce qu'elle ne prête pas le flanc à la critique que nous avons cru devoir formuler au sujet de ce même travail.

De même le Chapitre V poursuit et développe la solution du second problème subsidiaire de Lamé, connexe du précédent, consistant à déterminer, au moyen des résultats acquis par la recherche précédente, l'expression la plus générale des trois coordonnées rectilignes en fonction des coordonnées curvilignes, détermination qui constitue dès lors la solution définitive du problème total lui-même. C'est le problème pour lequel l'analyse de Lamé nous semble, au contraire, insuffisante et inacceptable, et sur lequel M. Combescure n'a pas cru devoir porter son attention. Nous espérons également que la méthode que nous employons pour le résoudre, fondée, comme celle de M. Betti, sur l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales, paraîtra encore tout à fait satisfaisante, tout en étant notablement plus facile, et à la portée d'un beaucoup plus grand nombre de Lecteurs, que celle de cet habile Géomètre.

Le Chapitre VI enfin, qui termine le Tome I, et qui a pour objet l'application des résultats de la recherche précédente, c'est-à-dire la théorie des coordonnées curvilignes engendrées par le Système Orthogonal rencontré, représente peut-être la portion la plus entièrement nouvelle, quant au fond, des matières traitées dans ce volume; car, bien que nous n'ayons nulle connaissance, quand nous avons poursuivi et rédigé nos recherches, des tra-

vaux antérieurs sur la question dont nous avons rendu compte un peu plus haut (*), il devait arriver forcément, en raison de l'identité du résultat final auquel il fallait parvenir, que nous nous rencontrerions en un certain nombre de points avec l'un ou l'autre de nos devanciers, écueil qui n'est plus à redouter maintenant, de même aussi que pour les problèmes traités dans notre Chapitre III, du moment que Lamé seul s'est proposé comme objectif ce complément de sa théorie.

Notre tâche à cet égard consistant dès lors simplement à perfectionner les formules de l'illustre Auteur relatives aux coordonnées qui portent son nom, de manière à leur assurer un rôle pratique qui ne leur appartient malheureusement en l'état à aucun degré, nous croyons avoir réalisé ce programme d'une façon satisfaisante et réellement utile, par un ensemble de formules et de théories nouvelles qui, en conservant aux Coordonnées Thermométriques de Lamé l'avantage inappréciable de n'être susceptibles, comme les coordonnées classiques, que d'une seule détermination en chaque point de l'espace, leur assurent néanmoins le bénéfice si considérable de la symétrie et de la permutation circulaire, qui caractérisent le système des Coordonnées Elliptiques de Jacobi, en même temps qu'elles offrent d'autre part cette supériorité de n'admettre comme éléments analytiques que les seuls types de transcendantes classiques des *Fundamenta Nova*, de manière à pouvoir profiter pour les calculs de toutes les formules courantes de la théorie des Fonctions Elliptiques : nous fournissons une preuve incontestable de l'avantage et de la fécondité de ce Système des Coordonnées

(*) Notre travail ayant été composé et rédigé presque en entier en province, en l'absence de ressources bibliographiques suffisantes, nous avouons, non seulement avoir ignoré, pour ainsi dire jusqu'à la fin, que la question eût déjà été traitée d'une façon complète, mais même que nous ne nous serions certainement pas attelé à un aussi long et persévérant labeur, si nous n'avions été encouragé par l'illusion que l'honneur du résultat dût nous en appartenir. Toutefois, même après cette déception, nous croyons qu'il n'y a pas lieu de regretter complètement nos efforts et notre peine, et que, tant au point de vue de la rigueur des raisonnements et des calculs, que de la facilité d'exposition orale qu'ils présentent, à l'égard de jeunes auditeurs en possession des seules connaissances classiques, cet Ouvrage viendra remplir une place et un rôle qui n'étaient point encore occupés jusqu'ici.

Thermométriques ainsi modifié, en l'appliquant à de nombreux exemples, parmi lesquels la question suivante, à raison de son caractère concret, sera de nature à frapper davantage l'esprit du Lecteur : « Étant donné un corps homogène, limité par trois » couples de surfaces appartenant respectivement chacun aux » trois familles d'un Système Ellipsoïdal, déterminer exactement » l'action totale qu'exercera sur ce Solide, conformément à la » loi d'attraction de Newton, la masse entière d'un ellipsoïde » homogène de grandeur, de forme, et de situation quelconques » par rapport au Solide envisagé. » L'emploi de nos nouvelles coordonnées pour traiter cet intéressant problème nous permet, en effet, comme on le verra, grâce à la permutation circulaire, sur les dix-sept déterminants dont est composée la solution, de n'en calculer que *sept* seulement, et les formules finales auxquelles nous arrivons ainsi, non seulement résolvent le problème complètement quant à la forme analytique des résultats, parce qu'elles ne renferment que des quadratures réellement *effectuées*, mais encore sont calculables *numériquement* avec telle approximation que l'on voudra.

Le même caractère de nouveauté appartient encore, croyons-nous, à la plupart des matières traitées dans notre Tome II, lequel comprend, avons-nous dit, six Notes distinctes réunies en *Appendice*, et relatives à d'autres modes de résoudre les mêmes questions déjà envisagées dans le Tome I, ou bien, consacrées à déduire à très peu de frais, des calculs développés dans ce volume en vue de la recherche générale du Système Isotherme, d'autres résultats importants d'Analyse qui ne se rapportent pas à cette question elle-même. Nous croyons en conséquence devoir indiquer également ici, en quelques mots, l'objet de chacune de ces six Notes.

La première, appliquant, à titre d'exemple le plus étendu, à l'équation la plus générale des Surfaces du Second Ordre la méthode développée dans le Chapitre II pour la recherche des familles isothermes de surfaces, retrouve les résultats déjà obtenus, par le moyen d'un calcul qui met en œuvre, à l'aide d'une notation condensée, la considération d'un système sura-

bondant de *trente-cinq* équations différentielles du second ordre entre les *dix* coefficients de l'équation de la famille de surfaces considérés comme inconnues.

La seconde Note concerne la recherche directe d'un Système Orthogonal comprenant parmi ses trois familles le type le plus général des Surfaces Isothermes du Second Ordre, et parvient, la question étant ainsi posée, au Système Ellipsoïdal de Jacobi et Lamé, par le moyen de l'intégration *d'une seule* équation différentielle du *premier ordre*, à savoir celle des lignes de courbure de la famille de surfaces proposée.

La Note III reprend le second problème de Lamé, déjà résolu dans le Chapitre V, par une autre méthode, absolument nouvelle celle-là, croyons-nous, qui tire son point de départ de la célèbre méthode d'intégration de Lagrange pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre, et dont la fécondité se trouve établie péremptoirement par ce fait que c'est précisément cette même méthode, généralisée pour un nombre quelconque d'inconnues et de variables indépendantes, qui nous a conduit à l'expression explicite de l'intégrale algébrique d'un système hyperelliptique à $n+1$ variables, que nous avons fait connaître dans notre communication à l'Académie des Sciences, du 6 Février 1893

La Note IV, en vue de comparer les deux méthodes ainsi successivement exposées dans le Chapitre V et la Note III précédente pour le second problème subsidiaire de Lamé, en fait successivement l'application au Cas particulier du Système Sphérique déjà étudié dans le Chapitre III, et emploie à cet effet, pour l'intégration du système de trois équations aux dérivées partielles (à une seule inconnue) auquel se ramène le problème, la méthode exposée par Jacobi dans les *Vorlesungen* (33e Leçon, pp. 257-264), pour le cas de deux équations seulement.

La Note V déduit en quelques lignes des résultats de la Note III ci-dessus un énoncé du Théorème d'Abel, qui offre la particularité et l'avantage de formuler explicitement les deux équations qui constituent l'intégrale algébrique d'un système hyperelliptique à trois variables, intégrale dont l'existence est simplement certifiée, mais la forme non indiquée, dans l'énoncé

analogue du § 8 des *Considerationes Generales de Transcendentibus Abelianis*, de Jacobi (*), et elle en déduit très aisément la forme également explicite des formules d'addition des fonctions hyperelliptiques de première espèce et de la première classe, annoncées de même, sans aucune indication quant à leur forme, dans le Théorème précédent du § 6 des mêmes *Considerationes*. Enfin, elle déduit de cet énoncé du Théorème d'Abel une démonstration simple des formules d'addition pour les trois espèces de fonctions elliptiques à la fois, et pose ainsi les fondements d'une théorie sommaire de ces fonctions issue exclusivement de la considération du Système Ellipsoïdal, et analogue par conséquent à celle que Lamé institue et développe dans ses *Leçons sur les Fonctions Inverses*, mais relative cette fois aux types classiques eux-mêmes, et pour les trois espèces de fonctions elliptiques considérées simultanément.

La Note VI, enfin, reprend à nouveau par d'autres procédés la détermination d'intégrales triples déjà calculées dans le Chapitre VI, et rencontre ainsi, chemin faisant, l'expression explicite, intéressante et peu connue, des trois quadratures connexes $\int_0^\omega \varphi^m(\omega)\,d\omega$, le symbole φ désignant successivement les trois fonctions elliptiques de première espèce *sn*, *cn*, *dn*, et l'exposant m une puissance entière positive quelconque.

Tel est le cycle des questions d'un intérêt incontestable, aussi bien au point de vue de l'Analyse pure qu'à celui des applications à la Physique Mathématique, que nous nous proposons de traiter complètement dans le cours de cet Ouvrage, avec un esprit, sous une forme, et dans un but manifestement didactiques. Ce programme nous impose étroitement certaines obligations dont le Lecteur voudra bien nous tenir compte, lorsqu'il lui semblera que nous exigeons trop de son attention et de sa patience, par de trop longs calculs, ou des développements en apparence exagérés, lesquels seront, en réalité, nécessités par

(*) Journal de Crelle, Tome IX (pp. 394-405).

l'obligation de procurer, avant toutes choses, une complète rigueur dans nos raisonnements et une parfaite certitude dans les résultats de nos calculs. De cette même pensée procède, en particulier, notre habitude presque constante de traiter chaque question, à titre de contrôle, par deux ou trois (et parfois même par quatre) procédés différents, notre but en cela étant surtout de chercher à inculquer aux jeunes débutants dans les recherches analytiques, une précieuse discipline, consistant à n'accorder jamais une confiance absolue à une méthode ou à un calcul, si l'on n'a pu en corroborer l'exactitude en retrouvant, à titre de vérification, les mêmes résultats par une voie différente.

Qu'on nous permette enfin, toujours au même point de vue, d'indiquer, en terminant, trois procédés généraux inspirés du même esprit, que nous aurons occasion d'employer un grand nombre de fois dans le cours de ces recherches, et qui contribueront pour une large part à en assurer le succès :

1° Avant d'entamer le calcul relatif à chaque recherche partielle, nous commencerons toujours par en apprécier *a priori* le degré de généralité de la solution, c'est-à-dire par évaluer exactement le nombre de fonctions ou de constantes arbitraires que devra renfermer la solution la plus générale, en sorte que si, par un procédé quelconque, nous venons ensuite à rencontrer une solution qui réalise précisément ces conditions, nous pourrons alors affirmer en toute certitude que cette solution-là est bien la solution la plus générale demandée.

2° Ayant à intégrer un système d'équations (différentielles ou aux dérivées partielles), si par la différentiation, plusieurs fois répétée au besoin, nous pouvons en déduire un autre système plus simple ou plus facile à intégrer que le proposé, nous intégrerons ce dernier système dont la solution sera dès lors plus large que celle qui convient à la question, et nous chercherons ensuite à disposer des arbitraires (constantes ou fonctions) surabondantes ainsi existant dans cette solution, de manière à procurer la vérification, par la même solution, du système proposé lui-même.

3° Comme *règle constante et absolue*, dont nous ne nous

départirons pas dans tout le cours de cette étude, nous ferons en sorte de n'introduire, comme éléments du calcul, que des quantités, et de n'écrire que des équations ou formules, obéissant à une loi de permutation circulaire évidente, condition à laquelle ne satisfait pas malheureusement la théorie de Lamé ; et dans cette pensée, même lorsque nous transcrirons simplement ses calculs pour quelques questions, ou rappellerons ses procédés, nous aurons soin de substituer à sa notation relative au Système Ellipsoïdal, dans laquelle les carrés des demi-distances focales sont 0, b^2, c^2, celle plus avantageuse de Jacobi, dans laquelle les mêmes quantités sont exprimées par trois différences symétriques : $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$.

Enfin, comme dernier détail [purement matériel, si l'on veut, mais dont l'importance pour l'exposition orale sera reconnue par quiconque se proposera, comme nous, d'enseigner cette théorie (*)], nous substituerons également, en règle constante, un système de notation par algorithme littéral et individuel (φ, ψ, ϖ; P, Q, R; Φ, Ψ, Π; ...) au système de notation par indices de Lamé (ρ, ρ_1, ρ_2; Q, Q_1, Q_2; A, A_1, A_2; ...), qui, d'une énonciation moins claire et moins facile, et beaucoup plus fatigant pour les yeux, le devient aussi, par là même, assez rapidement pour l'esprit, tant du Professeur que de l'Élève.

En résumé, l'Ouvrage que l'on va lire, répondant à une double pensée, se propose à la fois deux objectifs et présente, en conséquence, deux caractères, qui se nuiront peut-être réciproquement dans l'esprit du Lecteur, parce que l'on n'est guère habitué à les trouver réunis dans une même publication, à savoir celui de *Mémoire*, ou de travail de recherches ayant pour but de consolider, d'améliorer, ou d'accroître les résultats déjà acquis

(*) Cet Ouvrage, de même que nos deux précédents Mémoires *Sur la Théorie de la Courbure des Surfaces*, et *Sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes dans les Problèmes de Mécanique*, mentionnés un peu plus loin, a été composé en vue de Leçons orales faites à l'Université Catholique de Lille, à titre de Conférences aux jeunes Licenciés, aspirants au Doctorat ès Sciences Mathématiques, et avec la pensée de leur faciliter la lecture des œuvres de LAMÉ et de JACOBI.

dans le domaine de la question envisagée, et celui d'*Ouvrage Didactique* se proposant simplement celui de faciliter et de perfectionner l'exposition de ces mêmes résultats antérieurs, en les rendant en même temps accessibles au plus grand nombre d'esprits possible.

En effet, sans revenir sur les modestes compléments que nous pensons avoir apporté utilement, ainsi que nous l'avons dit, à la théorie de l'illustre inventeur des Coordonnées Curvilignes, le présent Ouvrage étant joint à nos deux précédents Mémoires *Sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (*) et *Sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes dans les Problèmes de Mécanique* (**), ils constituent alors ensemble, croyons-nous, une exposition intégrale, parfaitement conforme aux exigences rigoureuses de l'Enseignement actuel, de toute la partie théorique de l'œuvre si remarquable et si féconde de Lamé, complétée et éclairée par des emprunts convenables aux parties connexes des admirables travaux de Jacobi, le tout sous une forme, et exclusivement à l'aide de procédés, qui soient à la portée des jeunes débutants dans la carrière scientifique, nous voulons dire des intelligences en possession des seules connaissances classiques.

Nous adressons donc notre travail, encore une fois, contrairement à l'usage, à deux catégories de Lecteurs entièrement différentes, à savoir les Savants, et ceux qui travaillent actuellement en vue de le devenir, et nous espérons que la première y trouvera néanmoins suffisamment son compte, par les éléments nouveaux et véritablement utiles que nous croyons y avoir apportés, pour tolérer, par ailleurs, avec indulgence les développements introduits en vue et dans l'intérêt de la seconde, lesquels motivent seuls l'étendue, exagérée en apparence, donnée ainsi à une simple monographie telle que celle que nous soumettons au jugement du Public.

(*) Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. Tome V (1880-1881).
(**) Ibid., Tomes X (1885-1886), et XI (1886-1887).

PREMIÈRE PARTIE.

PRÉLIMINAIRES

ET CAS PARTICULIERS REMARQUABLES.

CHAPITRE Ier.

Propriété caractéristique des invariants différentiels Δ_1 et Δ_2. Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées quelconques.

EXPRESSION DES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS D'UNE FONCTION DE POINT QUELCONQUE EN COORDONNÉES CURVILIGNES. Étant donnée une *fonction de point* (*) quelconque ω, ses deux paramètres différentiels $\Delta_1\omega$ et $\Delta_2\omega$, qui sont évidemment deux nouvelles fonctions de point, sont susceptibles l'un et l'autre d'une expression simple en fonction des trois paramètres du premier ordre $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, relatifs aux trois surfaces coordonnées et de leurs dérivées par rapport aux coordonnées curvilignes, expressions qui sont complètement indépendantes du système particulier de coordonnées avec lequel on les suppose calculées, et qui demeurent par conséquent les mêmes quel que soit le système de coordonnées employé. Ces expressions formant le point de départ obligé de la recherche que nous allons entreprendre, c'est par les établir que nous devons commencer notre étude.

Pour le paramètre du premier ordre $\Delta_1\omega$, il nous suffira de rappeler les six égalités suivantes (**)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\omega}{x}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{x}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{x}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{x}, &\qquad& \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{x}+\frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{y}+\frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{z}=0,\\
&\frac{\omega}{y}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{y}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{y}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{y}, && \frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{x}+\frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{y}+\frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{z}=0,\\
&\frac{\omega}{z}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{z}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{z}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{z}, && \frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{x}+\frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{y}+\frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{z}=0,
\end{aligned}\right.$$

(*) Locution très commode, empruntée à LAMÉ (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § I), et assez claire par elle-même pour pouvoir se passer de définition.

(**) Nous faisons usage de nouveau dans ce travail, pour les dérivées partielles, de la notation abréviative, simple et commode, dont nous avons déjà montré l'avantage dans

(dont les trois de gauche résultent immédiatement de la règle de dérivation des fonctions composées, et les trois de droite expriment l'orthogonalité des trois surfaces coordonnées) et d'ajouter membre à membre, après les avoir élevées au carré, les trois équations du premier groupe, en ayant égard en même temps aux trois équations de l'autre groupe. Il est clair que nous obtiendrons de cette façon la formule :

$$(2) \qquad \Delta_1^2\omega = \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)^2 + \Delta_1^2\psi\left(\frac{\omega}{\psi}\right)^2 + \Delta_1^2\varpi\left(\frac{\omega}{\varpi}\right)^2.$$

Pour obtenir semblablement l'expression du paramètre du second ordre $\Delta_2\omega$, nous commencerons par rechercher l'expression de ce paramètre en particulier pour les trois surfaces coordonnées, c'est-à-dire l'expression des trois fonctions $\Delta_2\varphi$, $\Delta_2\psi$, $\Delta_2\varpi$.

A cet effet, nous rappellerons de même trois autres formules que nous avons établies dans notre *Mémoire sur la théorie de la Courbure des surfaces*, savoir : en premier lieu, celle qui fait connaître la somme des deux courbures principales $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ en un point quelconque d'une surface donnée (quantité que nous désignions par la lettre H dans ce précédent travail), c'est-à-dire la formule suivante (voir § II, équation (26), page 22, *au bas*) :

$$(3) \qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\Delta_2\varphi - \left(\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{x} + \mu\frac{\Delta_1\varphi}{y} + \nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\right];$$

en second lieu, l'expression des deux courbures principales d'une surface appartenant à un système triple orthogonal (formules (59),

---

nos trois précédents Mémoires, et qui consiste à supprimer haut et bas la caractéristique *d*, en conservant seulement les exposants dont elle est affectée. Voir pour plus de détails : *Mémoire sur la théorie de la Courbure des surfaces*, pp. 2-3, ou *Mémoire sur les Ombilics coniques*, pp. 3-5, ou encore *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées curvilignes*, etc., pp. 2-3 (en note).

§ III, page 70, *au bas*), savoir :

$$(4)\qquad \frac{1}{R_1} = -\Delta_1\varphi \frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}, \qquad \frac{1}{R_2} = -\Delta_1\varphi \frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi};$$

et enfin celle qui donne l'expression des dérivées d'une fonction de point quelconque ω par rapport à l'une des coordonnées curvilignes (formules (58), § III, même page), et qui s'obtient d'ailleurs successivement pour les trois variables φ, ψ, ϖ, par une combinaison facile des six équations ci-dessus (1), savoir pour la coordonnée φ en particulier :

$$\lambda \frac{\omega}{x} + \mu \frac{\omega}{y} + \nu \frac{\omega}{z} = \frac{\omega}{\varphi} \Delta_1\varphi$$

(λ, μ, ν désignant, comme dans la formule ci-dessus (3), les cosinus directeurs de la normale à la surface correspondante).

Cela posé, ayant remarqué qu'en vertu de cette dernière formule, la valeur (3) de H peut s'écrire

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\Delta_2\varphi - \frac{\Delta_1\varphi}{\varphi}\Delta_1\varphi\right] = \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} - \Delta_1\varphi \frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi},$$

et d'autre part qu'en ajoutant membre à membre les deux formules (4) nous obtiendrons pour la même quantité H cette autre expression

$$(5)\qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\Delta_1\varphi\left(\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi} + \frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\right) = -\Delta_1\varphi \frac{l.\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}{\varphi},$$

il est clair que la comparaison de ces deux valeurs de H nous fournira immédiatement la relation

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} - \Delta_1\varphi \frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi} = -\Delta_1\varphi \frac{l.\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}{\varphi},$$

d'où

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} = \Delta_1\varphi\left(\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi} - \frac{l.\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}{\varphi}\right) = \Delta_1\varphi\,\frac{l\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right)}{\varphi},$$

et enfin, en multipliant par $\Delta_1\varphi$,

$$\Delta_2\varphi = \Delta_1^2\varphi\,\frac{dl}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right) = \frac{\Delta_1^2\varphi}{\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right)}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right)$$

$$= \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi.\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right).$$

En opérant ainsi successivement pour les trois surfaces, nous aurons donc tout d'abord les trois expressions demandées, qui se déduiront les unes des autres par la permutation circulaire des trois variables φ, ψ, ϖ :

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta_2\varphi = \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi.\,\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right), \\ \Delta_2\psi = \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi.\,\dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\right), \\ \Delta_2\varpi = \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi.\,\dfrac{d}{d\varpi}\left(\dfrac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\right). \end{cases}$$

Ce résultat étant acquis pour les trois surfaces coordonnées, il est maintenant facile de calculer le même paramètre du second ordre pour une fonction de point quelconque ω. Il suffira évidemment pour cela de différentier à nouveau, respectivement par rapport à x, y, z, les trois égalités de gauche (1), et de les ajouter, en ayant égard aux trois autres de droite

et aux trois dernières expressions que nous venons d'obtenir.

Pour faire ce calcul commodément, désignons par u l'une quelconque des trois coordonnées rectilignes x, y, z; alors l'une quelconque des trois équations de gauche (1), qui est avec cette notation

$$(7)\qquad \frac{\omega}{u}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{u}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u},$$

étant différentiée de nouveau par rapport à u, donnera l'équation

$$(8)\quad \frac{\omega^2}{u^2}=\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi^2}{u^2}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi^2}{u^2}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi^2}{u^2}+\frac{\varphi}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)+\frac{\psi}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\psi}\right)+\frac{\varpi}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varpi}\right),$$

dans laquelle les dérivées $\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)$, $\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\psi}\right)$, $\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varpi}\right)$, pourront être facilement calculées à l'aide de la même équation (7), en y écrivant simplement à la place de ω, d'abord $\frac{\omega}{\varphi}$, puis $\frac{\omega}{\psi}$, puis enfin $\frac{\omega}{\varpi}$: opération qui, si l'on a recours pour en écrire le résultat à la notation symbolique dont nous avons fait usage dans notre *Mémoire sur les Ombilics coniques* (*) (Introduction, page 5), nous fournira immédiatement les trois expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)&=\frac{\omega}{\varphi}\left(\left(\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{u}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}\right)\right),\\
\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\psi}\right)&=\frac{\omega}{\psi}\left(\left(\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{u}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}\right)\right),\\
\frac{d}{du}\left(\frac{\omega}{\varpi}\right)&=\frac{\omega}{\varpi}\left(\left(\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u}+\frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{u}+\frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}\right)\right).
\end{aligned}\right.$$

(*) Pour le Lecteur qui n'aurait pas ce travail à sa disposition, nous rappellerons que la double parenthèse, affectant le facteur d'un produit ou d'une puissance, signifie pour

En reportant donc ces valeurs dans l'expression (8), il est facile de voir que cette expression deviendra sous forme symbolique

$$\frac{\omega^2}{u^2} = \frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi^2}{u^2} + \frac{\omega}{\psi}\frac{\psi^2}{u^2} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi^2}{u^2} + \left(\left(\frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{u} + \frac{\omega}{\varphi}\frac{\psi}{u} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{u}\right)\right)^2,$$

étant entendu que l'interprétation symbolique de la double parenthèse ne doit s'appliquer qu'aux dérivées de ω par rapport aux coordonnées curvilignes (et non aux dérivées de φ, ψ, ϖ), c'est-à-dire en réalité

$$\frac{\omega^2}{u^2} = \frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi^2}{u^2} + \frac{\omega}{\psi}\frac{\psi^2}{u^2} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi^2}{u^2}$$

$$+ \frac{\omega^2}{\varphi^2}\left(\frac{\varphi}{u}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\psi^2}\left(\frac{\psi}{u}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\varpi^2}\left(\frac{\varpi}{u}\right)^2 + 2\frac{\omega^2}{\psi\varpi}\frac{\psi}{u}\frac{\varpi}{u} + 2\frac{\omega^2}{\varpi\varphi}\frac{\varpi}{u}\frac{\varphi}{u} + 2\frac{\omega^2}{\varphi\psi}\frac{\varphi}{u}\frac{\psi}{u}.$$

Si maintenant nous supposons que nous ayons récrit cette dernière équation trois fois, en prenant pour u successivement les trois coordonnées x, y, z, et que nous ayons ajouté membre à membre les trois égalités ainsi obtenues, en ayant égard en même temps aux trois équations de droite (1), il est clair que nous aurons ainsi la formule

$$(9) \qquad \Delta_2\omega = \frac{\omega}{\varphi}\Delta_2\varphi + \frac{\omega}{\psi}\Delta_2\psi + \frac{\omega}{\varpi}\Delta_2\varpi + \frac{\omega^2}{\varphi^2}\Delta_1^2\varphi + \frac{\omega^2}{\psi^2}\Delta_1^2\psi + \frac{\omega^2}{\varpi^2}\Delta_1^2\varpi,$$

ou, en remettant à la place des paramètres $\Delta_2\varphi$, $\Delta_2\psi$, $\Delta_2\varpi$ leurs valeurs (6) que nous venons d'obtenir, et mettant en facteur

---

nous que le calcul en étant d'abord effectué, comme s'il s'agissait de quantités ordinaires, le résultat devra être interprété après coup, avec l'acception différentielle dont nous sommes convenus.

le produit $\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi$,

$$\Delta_2\omega = \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi\left[\frac{\omega}{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right) + \frac{\omega}{\psi}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\right) + \frac{\omega}{\varpi}\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\omega^2}{\varphi^2}\,\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi} + \frac{\omega^2}{\psi^2}\,\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi} + \frac{\omega^2}{\varpi^2}\,\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\right],$$

c'est-à-dire définitivement, sous forme plus simple (*) :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_2\omega = \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi & \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\,\frac{\omega}{\varphi}\right) + \frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\,\frac{\omega}{\psi}\right)\right. \\ & \left. + \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\,\frac{\omega}{\varpi}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Notons en passant que les formules (2) et (10) se réduisent bien, comme cela devait être pour le cas particulier des coordonnées rectilignes, aux valeurs de définition

$$\Delta_1^2\,\omega = \left(\frac{\omega}{x}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{y}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{z}\right)^2, \qquad \Delta_2\,\omega = \frac{\omega^2}{x^2} + \frac{\omega^2}{y^2} + \frac{\omega^2}{z^2},$$

attendu que si l'on fait $\varphi = x$, $\psi = y$, $\varpi = z$, on a, en vertu de ces définitions mêmes, $\Delta_1^2\varphi = 1$, $\Delta_1^2\psi = 1$, $\Delta_1^2\varpi = 1$.

L'existence des expressions (2) et (10) et la permanence de leur forme, quel que soit le système de coordonnées employé, fait prévoir immédiatement l'importance du rôle que ces paramètres différentiels devront jouer dans la Physique Mathématique (**). En effet, nous venons de leur reconnaître, relative-

(*) La démonstration que nous venons de donner nous semble à la fois plus courte et plus facile que celle de Lamé, rapportée par M. Bertrand dans le tome I de son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* §§ 184-186 (pp. 183-187), et qui remplit presque quatre pages de cet in-4°.

(**) Nous tentons dans les deux aliénas qui vont suivre de donner, non pas une démonstration rigoureuse et détaillée, comme le fait Cauchy dans ses *Exercices de*

ment aux dérivées partielles de la fonction de point ω à laquelle ils se rapportent, ainsi qu'aux paramètres $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, relatifs aux trois surfaces coordonnées, et à leurs dérivées, une propriété complètement analogue à celle des fonctions que l'on nomme *Invariants* en géométrie analytique, relative aux coefficients des équations des courbes ou surfaces auxquelles elles se rapportent, analogie telle qu'on pourrait leur attribuer avec beaucoup de raison (ainsi que nous nous proposons de le faire dans tout ce travail), la dénomination d'*Invariant Différentiel*, déjà usitée dans la science, laquelle aurait l'avantage de rappeler ainsi d'une façon très expressive leur propriété caractéristique. Or, sans reconnaître aux fonctions analogues de la géométrie une propriété générale qui n'est pas encore démontrée, bien qu'on la leur attribue habituellement, et pour baser exclusivement le rapprochement que nous voulons faire ressortir sur un exemple certain emprunté à une autorité incontestée (*), nous dirons que de même que toutes les relations permanentes (c'est-à-dire indépendantes du choix des axes coordonnés), qui existeront entre diverses courbes ou surfaces du second ordre, ne pourront être exprimées analytiquement que par certaines relations entre les invariants des courbes ou des surfaces considérées, de même toute loi physique, relative aux variations d'état d'un milieu continu, supposé homogène et isotrope (**), états qu'on peut supposer représentés par une certaine fonction de point (température, dilatation, réactions moléculaires, etc....), étant par sa nature essentiellement indépendante du système de coordonnées

---

Physique Mathématique (tome I, pp. 107-115), mais une simple explication sommaire et intuitive, basée sur une vue d'ensemble forcément moins précise, d'un fait analytique extrêmement remarquable que Lamé constate à plusieurs reprises, mais dont il n'indique nulle part, fût-ce par un seul mot, la raison d'être.

(*) SALMON, *Leçons d'Algèbre Supérieure* (Traduction française de BAZIN), §§ 188 (p. 202) et 204 (p. 223).

(**) Nous empruntons cette locution à la théorie de la Lumière, pour désigner un corps dont toutes les propriétés, de quelque nature qu'elles soient, sont caractérisées par des coefficients qui conservent la même valeur pour toutes les directions possibles, tout autour d'un même point.

supposé employé pour l'étudier, ne pourra être dès lors qu'une certaine relation entre des ***invariants différentiels*** de la fonction de point considérée, c'est-à-dire des fonctions jouissant de la propriété caractéristique que nous venons de reconnaître aux deux paramètres $\Delta_1\omega$ et $\Delta_2\omega$ (*).

Si, de plus, on réfléchit que dans l'évaluation de la plupart des phénomènes physiques, et dans le calcul à cet effet des accroissements $\Delta\omega$ de la fonction de point qui caractérise chaque phénomène, on néglige en général les puissances des accroissements des coordonnées supérieures à la seconde, de manière que leur expression ne renferme plus alors que les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction ω, l'on voit ainsi que toutes les fois que l'expression de la loi physique élémentaire, relative au phénomène en question, sera linéaire par rapport au susdit accroissement $\Delta\omega$ (ce qui sera le cas le plus fréquent), l'équation aux dérivées partielles qui régira le phénomène ne pourra être dès lors qu'une relation entre des invariants différentiels linéaires du premier et du second ordre seulement, parmi lesquels l'invariant $\Delta_2\omega$, en supposant qu'il ne soit pas le seul (ce qui semble très probable) est assurément l'un des plus simples (**); et par suite il n'y a plus lieu de s'étonner

---

(*) La convenance de l'introduction de cette dénomination nouvelle étant ainsi amplement justifiée au point de vue théorique, une autre considération *d'ordre pratique* nous en impose en quelque sorte l'emploi dans tout le cours de ce Mémoire, à la place de celles introduites originairement par Lamé, dont nous avions fait usage jusqu'ici, vu le retour incessamment répété tout au long de cette théorie, dans nos raisonnements et nos calculs, de quantités de cette espèce, simultanément avec les paramètres φ, ψ, ϖ des trois surfaces coordonnées ou d'autres familles de surfaces; car cette coexistence nous obligerait dès lors, sous peine de créer la confusion, à adjoindre à chaque fois aux paramètres Δ_1 et Δ_2 l'épithète de différentiels, qui complique et embarrasse le discours, tandis que nous éviterons cet inconvénient en adoptant la dénomination d'*invariant* qui ne saurait au contraire donner naissance à aucune ambiguïté.

(**) Ce simple aperçu suffit à faire comprendre, comme nous le voulions, la nécessité du fait qu'il s'agissait d'expliquer, mais la conclusion des considérations développées ci-dessus est rigoureusement établie par Cauchy, lequel démontre dans l'article déjà cité par la note de la page précédente (voir *Exerc. de Phys. Math.*, tome I, p. 114, au bas, *théor.* 8), que, pour conserver à la fois une forme et une valeur indépendantes de la direction des axes coordonnés, toute fonction linéaire des dérivées de tous ordres

de la fréquence avec laquelle on le voit apparaître sans cesse dans l'expression des principales lois de la Physique Mathématique. Il nous suffira, dans ce domaine, de citer comme exemples, avec Lamé, en nous bornant aux plus simples, les quatre équations

$$(11)\qquad \Delta_2\omega = 0,\quad \Delta_2\omega = k\frac{d\omega}{dt},\quad \Delta_2\omega = k^2\frac{d^2\omega}{dt^2},\quad \Delta_2(\Delta_2\omega) = 0,$$

qui régissent successivement le potentiel dans la théorie de l'Électricité, la température d'un milieu homogène et isotrope dans la théorie de la Chaleur (comme nous allons le montrer tout à l'heure), enfin les vibrations d'un fluide compressible, ainsi que la dilatation en un point quelconque d'un milieu isotrope, dans la théorie générale de l'Élasticité.

Équation du mouvement de la chaleur en coordonnées rectilignes. — Ces préliminaires étant admis, deux procédés différents s'offrent à nous pour arriver à former l'équation aux dérivées partielles qui régit la température des divers points d'un corps, supposés rapportés à un système de coordonnées quelconques. Nous pourrons, en premier lieu, chercher à former directement cette équation dans le système des coordonnées planes ou rectilignes, avec lequel on est généralement le plus familiarisé, et en supposant que nous ayons obtenu cette équation, la transformer ensuite en coordonnées curvilignes quelconques, à l'aide des formules relatives à cette théorie, que nous avons démontrées dans le précédent travail déjà cité. Nous pourrons, en second

---

d'une fonction ω doit nécessairement se réduire à une fonction entière (symbolique) de $\Delta_2\omega$, c'est-à-dire à une expression de la forme :

$$\sum_n A_n\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\right)^n\omega,$$

n étant entier, et A_n désignant une simple constante : proposition qui n'est que la généralisation, pour un ordre de dérivées quelconque, de la propriété que nous attribuons comme très probable au second invariant Δ_2 considéré par Lamé.

lieu, chercher à établir immédiatement cette même équation dans le système le plus général de coordonnées orthogonales, à l'aide de raisonnements basés sur la considération directe des surfaces coordonnées qui composent ce système. Nous allons passer en revue successivement ces deux modes de traiter la question précitée (*).

La démonstration que nous proposons pour cet objet sera, dans un cas comme dans l'autre, basée tout entière sur un

(*) Pour la formation de cette équation, qu'il s'agisse de coordonnées planes ou curvilignes (*Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes* (1857), § CXLVI et *sequ.* pp. 198-204); *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (1859), § XVI (pp. 25-27); *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* (1861), § XIX (pp. 27-29), Lamé ne fait que reproduire, en l'adaptant au système de coordonnées envisagé, le mode de raisonnement du créateur de la théorie mathématique du mouvement de la Chaleur, l'illustre Fourier, lequel avait résolu la question, en transportant, pour ainsi dire, sans aucun changement quant au fond, de l'Hydrodynamique dans l'étude de la température, le raisonnement à l'aide duquel Euler et Bernouilli avaient établi l'équation dite de *continuité*, qui complète, avec les trois équations fournies par le théorème de d'Alembert et l'équation de définition relative à la nature du fluide, les cinq équations nécessaires pour la détermination du mouvement de ce même fluide. Ce raisonnement, emprunté à une époque où les géomètres, tout en faisant un usage constant des infiniment petits, n'avaient pas encore cependant une idée bien nette de leur signification réelle et des conditions exactes de leur emploi, consiste, comme l'on sait, à évaluer par deux modes différents la quantité de matière en question (fluide ou chaleur) qui vient accroître, pendant un élément de temps, celle déjà contenue dans un parallélipipède infiniment petit suivant ses trois dimensions, quantité que l'on peut regarder par conséquent comme l'excès de la quantité similaire entrée dans le parallélipipède par trois faces non parallèles, sur la quantité sortie de même par les faces parallèles correspondantes. Nous n'apprendrons rien au Lecteur en rappelant que ce même raisonnement présente un vice capital, quant au mode d'emploi des infiniment petits, en ce que les trois arêtes de ce parallélipipède étant supposées essentiellement du même ordre infinitésimal, on évalue, chaque fois qu'il en est besoin, l'accroissement d'une fonction de point, considérée dans l'étendue d'une certaine face, en tenant compte de sa variation suivant la direction normale à la face, et négligeant arbitrairement ses variations suivant les directions parallèles à la même face, ce qui est complètement illégitime, du moment que les accroissements des variables correspondant à ces deux dernières directions sont entièrement comparables à celui de la variable correspondant à la première. Cette faute répétée trois fois (pour chaque couple de faces parallèles) enlève toute valeur démonstrative au raisonnement et impose l'obligation absolue, tout au moins pour l'Enseignement, de reprendre à nouveau la question et de la traiter cette fois conformément aux principes rigoureux sur lesquels repose, dans la Science actuelle, la méthode infinitésimale, principes aussi clairs, aussi précis, et aussi inflexibles, depuis Cauchy et Duhamel, que n'importe quelle proposition de la géométrie d'Euclide.

Lemme ou proposition préliminaire que beaucoup de bons esprits seront tentés sans doute d'admettre comme évident, mais qu'en vue d'une complète rigueur nous voulons commencer par mettre à l'abri de toute contestation.

LEMME. « *V étant supposé désigner une fonction déterminée de* » *trois coordonnées quelconques* x, y, z, *si l'intégrale* $\iiint V dxdydz$ » *reste constamment nulle, quel que soit le volume à l'intérieur* » *duquel on calcule cette intégrale, la fonction* V *est nécessaire-* » *ment identiquement nulle.* »

En effet, imaginons tout d'abord que x, y, z, désignent des coordonnées rectilignes, et supposons qu'une certaine fonction V remplisse la condition que nous venons de dire. Considérons une portion déterminée de l'espace, arbitrairement choisie d'ailleurs, que nous désignerons par (S). Ce volume se composera exclusivement, dans l'hypothèse la plus générale : 1° de portions pour lesquelles la fonction V est positive, dont l'ensemble, continu ou discontinu, forme une portion nettement délimitée de l'espace, que nous représenterons par (S'); 2° d'autres portions pour lesquelles la fonction V est négative, et dont l'ensemble constitue un autre volume déterminé de forme et de position que nous appellerons (S''); 3° enfin d'autres portions, pour lesquelles cette même fonction est nulle, et dont nous désignerons l'ensemble par (S'''), définitions que l'on pourra symboliser pour plus de netteté par l'égalité : $(S) = (S') + (S'') + (S''')$.

Considérons d'abord la première portion (S') seulement. Par hypothèse l'intégrale $\iiint V dxdydz$, effectuée à l'intérieur de ce volume en particulier, est nulle d'une part, l'élément de l'intégrale restant constamment positif d'autre part, ce qui implique contradiction. La portion (S') n'existe donc pas dans le volume (S). On verrait exactement de la même façon que ce volume ne saurait renfermer de portion (S''), et par conséquent il se réduit exclusivement à la portion (S'''), c'est-à-dire que de quelque façon qu'ait été choisi ce volume (S), la fonction V est néces-

sairement nulle en tous ses points, ce qui justifie la proposition énoncée (*).

Cette proposition étant établie dans l'hypothèse où x, y, z représentent trois coordonnées rectilignes, subsistera nécessairement lorsque l'on supposera que ces mêmes variables représentent trois coordonnées quelconques; car si l'on désigne alors par x', y', z', trois coordonnées rectilignes, l'intégrale proposée pourra, en changeant de variables, être ramenée à la forme $\iiint V\Theta dx'dy'dz'$, Θ désignant le déterminant fonctionnel des anciennes coordonnées x, y, z, par rapport aux nouvelles x', y', z', lequel ne pourra être nul quels que soient x', y', z', puisque les trois coordonnées x, y, z sont des variables essentiellement indépendantes entre elles. Dès lors, le produit $V\Theta$ étant identiquement nul, en vertu de la proposition démontrée pour les coordonnées rectilignes, il faudra nécessairement qu'il en soit de même encore de la fonction V.

Rappelons maintenant en quelques mots la loi physique de la propagation de la chaleur par conductibilité, qui sert de point

---

(*) Il est clair, d'après les termes mêmes de notre énoncé, que l'existence de ce Lemme et par suite son application sont subordonnées à cette condition que le symbole $\iiint V\,dxdydz$ puisse être considéré *a priori* comme ayant une signification (selon les termes de la définition habituelle) dans toute l'étendue d'un volume déterminé (S) ou, ce qui revient au même, que la fonction V puisse être considérée comme continue dans toute l'étendue de ce même volume. Mais cette condition qui, dans le champ général de l'Analyse pure, constituerait une restriction notable, n'en n'est pas une à proprement parler sur le terrain limité de la Physique Mathématique, en vue duquel nous formulons cette proposition et auquel nous entendons borner son application, et cela pour une double raison : au fond, parce que toutes les fonctions telles que V que l'on y considère sont supposées précisément *a priori* remplir la condition exigée. (Voir LAMÉ, *Leçons sur la Théorie analytique de la Chaleur*, §§ XII et XIV, pp. 17 et 19); et, en fait, parce que chacune des intégrales triples envisagées représentera le plus souvent une quantité concrète d'une nature déterminée (masse, moment d'inertie, force vive, potentiel, quantité de chaleur, etc.) directement mesurable par l'expérience (au moins en théorie), et offrira par conséquent une signification précise, à savoir la grandeur de la quantité représentée.

Ayant ainsi nettement circonscrit le terrain que nous attribuons à l'avance à la portée et à l'usage certain de ce Lemme, nous pensons qu'il n'y a pas lieu dès lors de se préoccuper des divers cas d'exception pour lesquels il pourrait se trouver en défaut dans le domaine de l'Analyse pure, en raison de l'absence de continuité de la fonction V, ou de tout autre motif de quelque genre que ce soit.

de départ à cette théorie, et que l'on trouve dans quelques auteurs désignée sous le nom de *Loi du Mur*. Pour plus de précision dans les calculs qui vont suivre, nous la formulerons explicitement de la façon suivante :

Loi de la conductibilité. « *Étant donné un mur indéfini, ou* » *milieu homogène à faces parallèles, d'épaisseur* E, *séparant* » *dans l'espace deux portions que nous distinguerons par les* » *indices 1 et 2, si l'on suppose ses deux faces entretenues aux* » *deux températures constantes* θ_1 *et* θ_2, *la quantité ou* flux de » chaleur q, *qui traversera dans le temps* T *une aire* Ω *de ce* » *mur, en passant de la face chaude à la face froide, aura pour* » *expression*

$$(12) \qquad q = \frac{Q\Omega}{E}(\theta_1 - \theta_2)\,T \qquad \text{ou} \qquad q = \frac{Q\Omega}{E}(\theta_2 - \theta_1)\,T,$$

» *suivant que l'on supposera* $\theta_1 > \theta_2$ *ou* $\theta_2 > \theta_1$, Q *étant un coeffi-* » *cient constant qui a reçu le nom de* conductibilité (*), *et dont* » *la signification physique résulte de cette formule elle-même,* » *par le fait qu'il représente la valeur particulière de la quantité* » q, *lorsque l'on y suppose toutes les autres données égales à* » *l'unité.* »

Au lieu d'avoir ainsi à tenir compte de deux formules différentes suivant le cas, si l'on convient, pour plus de simplicité, d'attribuer un signe à ce flux de chaleur, on pourra dans tous les cas ne garder que la première seulement de ces deux expressions qui ne diffèrent que par le signe, étant entendu alors que le signe de cette expression spécifiera le *sens* du flux, c'est-à-dire que le mouvement de la chaleur aura lieu de la face 1 vers

(*) Notre but, dans ce premier chapitre de notre travail, n'étant nullement en réalité l'exposition, selon la Science actuelle, d'une théorie de Physique Mathématique, mais simplement l'établissement de l'équation dite de l'*Équilibre de température*, sur laquelle repose expressément la définition des *familles isothermes de surfaces*, nous laissons de côté le cas général de la Nature, à savoir celui de la conductibilité variable avec la direction autour d'un même point, pour nous restreindre à l'hypothèse d'un corps *isotrope* ou de la conductibilité constante qui seule donne naissance à la forme caractéristique de l'équation précitée.

la face 2, ou en sens contraire, suivant que cette première expression sera positive ou négative. — Telle est la convention expresse que nous adopterons pour tout le calcul qui va suivre.

La loi que nous venons de rappeler étant établie par l'expérience pour des quantités finies quelconques, s'appliquera encore par conséquent à des quantités infiniment petites quelconques, et pourra dès lors fournir l'expression de la quantité de chaleur qui traverse, dans un élément de temps dt, un élément infiniment petit quelconque ω d'une couche infiniment mince, isolée arbitrairement par la pensée au sein d'un corps ou milieu homogène, supposé soumis à l'action de sources constantes de froid ou de chaleur. En effet, la couche en question étant imaginée comme comprise entre deux surfaces infiniment voisines d'une même famille, si ∂N représente l'élément de normale, correspondant à l'élément de surface ω, compris entre ces deux surfaces, ou, ce qui est la même chose, l'épaisseur de la couche en ce point, θ la fonction de x, y, z, qui représente la température en un point quelconque du milieu, et $\partial\theta$ l'accroissement que reçoit cette fonction en s'avançant sur la normale de l'élément ∂N, la couche envisagée se confondant dans l'étendue de l'élément d'aire ω avec un mur de même épaisseur ∂N, compris entre les plans tangents aux deux surfaces, la première formule (12) nous donnera pour l'expression de la quantité de chaleur en question

$$(13) \qquad q = \frac{Q\omega}{\partial N}[\theta - (\theta + \partial\theta)]\,dt = -Q\omega\frac{\partial\theta}{\partial N}\,dt;$$

et d'après nos conventions ci-dessus, suivant que cette dernière expression affectera une valeur positive ou négative, le mouvement de la chaleur aura lieu de la première surface vers la seconde, c'est-à-dire dans le sens où est compté l'élément de normale ∂N, ou en sens contraire; ce qui revient encore à dire, si l'on convient expressément de compter cet élément suivant la normale *intérieure*, que les valeurs positives correspondront aux flux de chaleur qui rentreront dans la surface, et les valeurs négatives à ceux qui en sortiront.

Ces préliminaires établis, l'esprit de notre démonstration consistera à évaluer par deux modes différents la quantité totale dont s'accroît, dans un élément de temps dt, la quantité de chaleur déjà existante à l'intérieur d'un volume fixe, arbitrairement choisi au sein du milieu homogène proposé, supposé soumis à l'action de sources constantes de froid ou de chaleur. Si l'on désigne par ρ la densité du milieu, par c son calorifique spécifique sous volume constant, l'élément de masse $dm = \rho\, dxdydz$ acquérant dans le temps dt une quantité de chaleur (positive ou négative) $cgdm\,\frac{d\theta}{dt}\,dt$, il est clair que la quantité totale de chaleur, gagnée dans le même temps par la masse tout entière renfermée dans le volume considéré, aura pour première expression

$$(14)\qquad \mathbf{S}\, cgdm\,\frac{d\theta}{dt}\,dt = \iiint cg\rho\, dxdydz\,\frac{d\theta}{dt}\,dt,$$

la sommation $\mathbf{S}$ représentant, pour abréger l'écriture, l'intégrale triple étendue à tout le volume considéré.

D'autre part, chaque élément ω de la surface qui limite le volume considéré étant traversé par un flux de chaleur exprimé par la formule (13), dans le sens de l'élément de normale intérieure δN, ou en sens contraire, suivant que cette expression sera positive ou négative, il est clair que la somme algébrique $\Sigma\left(-\,Q\omega\,\frac{\delta\theta}{\delta N}\,dt\right)$ de tous ces différents flux, correspondant à tous les éléments ω de cette surface, représentera bien l'excès de la somme des flux entrés dans la surface, ou des gains de chaleur, sur celle des flux sortis pendant le même temps, ou des pertes simultanées, c'est-à-dire en définitive la quantité totale de chaleur gagnée, pendant ce temps dt, par la masse renfermée à l'intérieur du volume considéré. Si donc nous désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale *intérieure* de cette surface correspondant à l'élément ω, ayant par définition à la fois

$$\delta\theta = \frac{\theta}{x}\,\delta x + \frac{\theta}{y}\,\delta y + \frac{\theta}{z}\,\delta z,$$

et

$$\delta x = \delta N \cos\alpha, \qquad \delta y = \delta N \cos 6, \qquad \delta z = \delta N \cos\gamma,$$

d'où, par suite,

$$(15)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial N} = \frac{\theta}{x}\cos\alpha + \frac{\theta}{y}\cos 6 + \frac{\theta}{z}\cos\gamma;$$

cette seconde expression de la quantité de chaleur considérée pourra se mettre sous la forme

$$(16)\qquad -\sum Q\omega\frac{\partial\theta}{\partial N}\,dt = -\sum Q\omega\left(\frac{\theta}{x}\cos\alpha + \frac{\theta}{y}\cos 6 + \frac{\theta}{z}\cos\gamma\right)dt,$$

la sommation $\sum$ s'étendant à tous les éléments ω de la surface envisagée, et c'est en égalant cette seconde expression (16) à la première (14), que nous obtiendrons précisément l'équation demandée.

A cet effet, nous commencerons par mettre cette seconde expression, ainsi que l'est déjà la première, sous la forme d'une intégrale triple étendue à tout le volume en question, à l'aide d'un procédé de transformation, très fréquemment usité depuis le célèbre Mémoire de George Green sur la Théorie mathématique de l'Électricité (*).

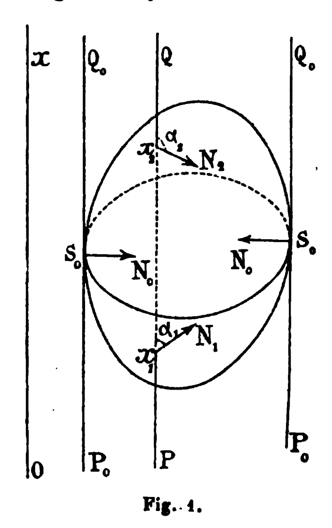


Fig. 1.

Dans ce but, ayant décomposé la somme (16) en trois sommes partielles, correspondant à chacun des termes de la parenthèse, pour évaluer le premier de ces termes, à savoir $-\Sigma Q\omega\frac{\theta}{x}\cos\alpha\,dt$, nous envisagerons séparément les deux portions de la surface séparées par la courbe de contour apparent S_0S_0 relative au cylindre projetant sur le plan yz, cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x; et nous désignerons respectivement par ω_1, α_1, 6_1, γ_1

(*) *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (Nottingham, 1828); ou bien *Journal de Crelle*, t. XXXIX, p. 73, et t. XLIV, p. 356.

et ω_2, α_2, β_2, γ_2, les valeurs de ω, α, β, γ, correspondant à deux éléments de surface, empruntés successivement à l'une et à l'autre de ces deux portions, et situés de plus par hypothèse sur une même parallèle PQ à l'axe des x. La forme et l'étendue de chacun de ces éléments étant d'ailleurs entièrement arbitraires, on peut imaginer d'une part que ces deux éléments se recouvrent exactement en projection sur le plan des yz, et d'autre part que cette projection commune soit précisément le rectangle infinitésimal $dydz$, de telle sorte que l'on aura alors en grandeur et en signe

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_1 \cos \alpha_1 = dydz, \qquad \text{et} \qquad \omega_2 \cos(180° - \alpha_2) = dydz, \\ &\text{ou} \\ &\omega_2 \cos \alpha_2 = - dydz, \end{aligned}\right.$$

car la courbe de contour apparent, tout le long de laquelle l'angle α est droit, sépare évidemment les deux parties de la surface dans lesquelles le même angle α est aigu pour l'une et obtus pour l'autre (*). Par conséquent, en désignant de même par Σ_1 et Σ_2 deux sommations relatives à chacune des deux portions de la surface, le terme que nous nous proposons de calculer pourra s'écrire successivement

$$\begin{aligned} -\sum Q\omega \frac{\theta}{x} \cos \alpha\, dt &= - Qdt \left[\sum_1 \left(\frac{\theta}{x}\right)_1 \omega_1 \cos \alpha_1 + \sum_2 \left(\frac{\theta}{x}\right)_2 \omega_2 \cos \alpha_2 \right] \\ &= - Qdt \left[\sum_1 \left(\frac{\theta}{x}\right)_1 dydz - \sum_2 \left(\frac{\theta}{x}\right)_2 dydz \right] \\ &= Qdt \left[\sum_2 \left(\frac{\theta}{x}\right)_2 dydz - \sum_1 \left(\frac{\theta}{x}\right)_1 dydz \right]. \end{aligned}$$

(*) Les termes de ce raisonnement, pris au pied de la lettre, supposent, pour plus de simplicité, que chaque parallèle à l'axe des x ne perce la surface fermée du volume considéré qu'en deux points seulement; mais le nombre de ces points étant toujours nécessairement pair (sauf dans le cas où deux d'entre eux viennent à se confondre en un seul, c'est-à-dire lorsque cette même droite rencontre le contour apparent), on reconnaît de suite que ces mêmes raisonnements subsistent isolément pour chaque couple des deux points d'entrée et de sortie de la droite par rapport au volume en question. Voir, au reste, pour plus de détails, si l'on en désire, JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. II, § 200, p. 202.

Dès lors, sous cette forme, les deux dernières sommes partielles Σ_1 et Σ_2 étant relatives toutes deux au même élément $dydz$, et s'étendant à la même portion du plan yz, à savoir l'aire renfermée à l'intérieur du cylindre projetant circonscrit à la surface ou de la projection du contour apparent sur ce plan, pourront évidemment être remplacées l'une et l'autre par une intégrale double étendue à la même aire, intégrales dont la différence équivaudra elle-même à une intégrale triple étendue à tout le volume considéré, transformations que l'on peut indiquer alors par les égalités suivantes :

$$-\sum Q\omega\frac{\theta}{x}\cos\alpha\, dt = Qdt\iint\left[\left(\frac{\theta}{x}\right)_2 - \left(\frac{\theta}{x}\right)_1\right]dydz$$
$$= Qdt\iiint\frac{\theta^2}{x^2}\,dxdydz.$$

On trouverait exactement de même, en considérant successivement le cylindre projetant sur le plan des zx, puis sur celui des xy,

$$-\sum Q\omega\frac{\theta}{y}\cos 6\, dt = Qdt\iiint\frac{\theta^2}{y^2}\,dxdydz,$$
$$-\sum Q\omega\frac{\theta}{z}\cos\gamma\, dt = Qdt\iiint\frac{\theta^2}{z^2}\,dxdydz,$$

l'intégrale triple étant toujours étendue à tout le volume considéré; de telle sorte qu'en ajoutant membre à membre ces trois dernières égalités, nous aurons, en définitive, pour expression de la somme (16)

$$-\sum Q\omega\frac{\delta\theta}{\delta N}dt = -\sum Q\omega\left(\frac{\theta}{x}\cos\alpha + \frac{\theta}{y}\cos 6 + \frac{\theta}{z}\cos\gamma\right)dt$$
$$= Qdt\iiint\left(\frac{\theta^2}{x^2} + \frac{\theta^2}{y^2} + \frac{\theta^2}{z^2}\right)dxdydz = \iiint Q\Delta_2\theta\, dxdydzdt.$$

Égalant donc cette dernière expression à la première (14) de la même quantité de chaleur, nous obtiendrons l'égalité

$$\iiint cg\rho\frac{d\theta}{dt}\,dxdydzdt = \iiint Q\Delta_2\theta\, dxdydzdt,$$

ou, en nous souvenant que les deux intégrales sont prises toutes deux à l'intérieur du même volume,

$$Q dt \iiint \left(\Delta_2 \theta - \frac{cg\rho}{Q} \frac{d\theta}{dt} \right) dx dy dz = 0.$$

Cette intégrale devant ainsi être nulle, quel que soit le volume arbitrairement choisi auquel on l'étend, il s'ensuit, d'après le Lemme démontré en commençant, que la fonction entre parenthèses sera identiquement nulle, lorsque l'on y supposera remise à la place de θ la fonction de x, y et z, qui représente la température en chaque point du corps, c'est-à-dire, en d'autres termes, que cette même fonction θ vérifiera l'équation aux dérivées partielles

$$(17) \qquad \Delta_2 \theta - k \frac{d\theta}{dt} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 \theta = k \frac{d\theta}{dt},$$

en convenant de désigner par k le rapport constant $k = \frac{cg\rho}{Q}$.

Telle est donc l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui régit la température dans un milieu homogène et isotrope. Il reste bien encore, à la vérité, pour que le problème soit complètement défini, à montrer par quel genre de considérations seront déterminées, dans chaque cas particulier, les deux fonctions arbitraires qui entreront nécessairement dans l'intégrale générale de cette équation du second ordre linéaire et à coefficients constants; mais ce dernier point étant en réalité sans intérêt pour la théorie analytique que nous avons en vue comme but principal de ce travail, savoir, la recherche générale des familles isothermes de surfaces, susceptibles de faire partie d'un système triple orthogonal, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter dans le corps proprement dit de ce Mémoire (*).

(*) Pour le cas néanmoins où le Lecteur estimerait (non sans quelque raison) que dans l'Enseignement une question, quelle qu'elle soit, ne doit être abordée qu'à la condition d'être ensuite traitée complètement, voici les données sur lesquelles repose la définition xacte du problème actuel. analogues, par suite, à celles des coordonnées et des vitesses ales pour les problèmes de Mécanique.

ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR EN COORDONNÉES CURVILIGNES. — Revenons maintenant à la question générale que nous nous étions posée, à savoir la recherche de l'équation du même problème dans un système de coordonnées quelconques.

Une première voie, avons-nous dit, s'offre à nous pour y arriver, qui consistera à profiter simplement, en les rapprochant, des résultats établis dans les deux paragraphes précédents. En effet, l'équation générale demandée étant l'équation (17) dans le système particulier des coordonnées planes ou rectilignes, et la formule (10) nous fournissant d'ailleurs l'expression du second invariant différentiel $\Delta_2\theta$ dans un système de coordonnées curvilignes quelconques, il s'ensuit immédiatement, en comparant

---

Les fonctions arbitraires, introduites par l'intégration de cette équation linéaire, seront déterminées par deux ordres de considérations distinctes :

1° Par celle de l'*état initial* du corps, c'est-à-dire par la condition que la fonction θ se réduise, pour $t=0$, à une fonction donnée arbitrairement $\theta_0 = f(x, y, z)$, qui représentera la température en un point quelconque du corps, à un instant particulier pris pour origine du temps ;

2° Par la considération des *conditions aux limites* qui, contrairement à la précédente, doivent être satisfaites à tout instant pour certains points particuliers seulement, à savoir ceux de la surface qui limite le corps, et qui sont imposées, soit exclusivement, pour la totalité de cette surface, par l'une ou l'autre des deux considérations suivantes, soit simultanément, pour parties de cette surface, par l'une ou l'autre de ces considérations, savoir :

a) Par l'obligation d'une température déterminée et invariable avec le temps, en chaque point de la surface totale ou partielle du corps, si on le suppose plongé en tout ou en partie dans un milieu dont on puisse regarder la masse comme infinie par rapport à la sienne, milieu qui, dès lors, imposera au corps sa température propre, en chacun des points de son contact avec lui. Dans ce cas, si $F(x, y, z) = 0$ représente la surface qui limite le corps, la fonction cherchée θ sera astreinte à affecter, quel que soit t, pour toutes les valeurs de x, y et z, qui vérifient cette équation, les mêmes valeurs, que la fonction arbitrairement donnée $\Theta(x, y, z)$, qui exprimera la température fixe du milieu dans lequel on suppose le corps plongé en chacun des points de contact de leurs deux surfaces ;

b) Par la loi physique du Rayonnement, si l'on suppose, au contraire, le corps isolé sur tout ou partie de sa surface, et rayonnant dès lors, soit dans l'espace infini, soit dans une enceinte à température constante et uniforme. Dans cette seconde hypothèse, la loi connue du Rayonnement exigera que le flux de chaleur, qui traverse dans le temps dt un élément de la surface du corps, soit égal à ωdt, multiplié par une nouvelle constante e, appelée *Pouvoir émissif*, et par l'excès de la température du corps relative à cet élément sur la température constante du vide ou de l'enceinte ; c'est-à-dire, par conséquent, si l'on convient de prendre pour zéro cette température fixe et uniforme de l'enceinte, que ce flux de chaleur sera exprimé par le produit $e\theta\omega dt$. L'expression de ce même flux étant d'ailleurs également fournie par la formule générale (13), dans laquelle le rapport ou

ces deux formules, et divisant alors les deux membres de l'équation ainsi obtenue par le produit $\Delta_1\varphi\ \Delta_1\psi\ \Delta_1\varpi$, que l'équation cherchée sera dans le système le plus général de coordonnées orthogonales

$$(18)\qquad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\,\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)=\frac{k}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{d\theta}{dt},$$

équation aux dérivées partielles, encore linéaire et du second ordre, mais non plus à coefficients constants comme dans le cas des coordonnées rectilignes, et dont l'intégration introduira semblablement dans l'expression de θ certaines fonctions arbitraires, que l'on déterminera par les mêmes considérations que

---

dérivée géométrique $\frac{\delta\theta}{\delta N}$ a la valeur (15) (sauf qu'il faut entendre alors que α, β, γ sont relatifs à la normale *extérieure*), on devra donc avoir ainsi, pour tous les points de la surface du corps, la condition

$$-Q\omega\left(\frac{\theta}{x}\cos\alpha+\frac{\theta}{y}\cos\beta+\frac{\theta}{z}\cos\gamma\right)dt=e\,\theta\,\omega\,dt,$$

ou, en divisant par $Q\omega\theta dt$, et désignant par K le rapport constant $K=\frac{e}{Q}$,

$$\frac{l\theta}{x}\cos\alpha+\frac{l\theta}{y}\cos\beta+\frac{l\theta}{z}\cos\gamma+K=0.$$

Dans cette nouvelle hypothèse il faudra donc que pour tous les points de la surface du corps $F(x, y, z)=0$ seulement, pour lesquels on aura

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{F}{x},\qquad \cos\beta=\pm\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{F}{y},\qquad \cos\gamma=\pm\frac{1}{\Delta_1 F}\frac{F}{z},$$

la fonction θ, en outre de l'équation générale du second ordre (17), satisfasse encore à l'équation *aux limites*, du premier ordre,

$$\pm\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\frac{l\theta}{x}+\frac{F}{y}\frac{l\theta}{y}+\frac{F}{z}\frac{l\theta}{z}\right)+K=0,$$

ou, ce qui est la même chose, en multipliant par $\pm\Delta_1 F$, puis remplaçant cette quantité par sa valeur de définition,

$$(A)\qquad \frac{F}{x}\frac{l\theta}{x}+\frac{F}{y}\frac{l\theta}{y}+\frac{F}{z}\frac{l\theta}{z}\pm K\left[\left(\frac{F}{x}\right)^2+\left(\frac{F}{y}\right)^2+\left(\frac{F}{z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0,$$

le signe qu'il faudra prendre devant le dernier terme pour chaque point de la surface étant celui qui convient à la normale *extérieure* en ce point.

nous avons expliquées pour le cas précédent, dans la note de la page 20 (*).

Un second mode, plus intéressant et plus fécond, de résoudre

(*) Ces considérations seront donc encore celles de l'état initial, et des conditions aux limites.

Quant au premier de ces points de vue, la fonction θ sera astreinte alors à se réduire, pour $t=0$, à la fonction arbitrairement donnée $\theta_0=f(\varphi, \psi, \varpi)$, qui caractérisera l'état initial du corps dans le système de coordonnées envisagé; et quant au second, il faudra que pour tous les points de la surface du corps, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de φ, ψ, ϖ qui satisferont à l'équation $\mathfrak{F}(\varphi, \psi, \varpi)=0$ de cette surface (la fonction $\mathfrak{F}$ procédant de la fonction $F(x, y, z)$ envisagée tout à l'heure par la simple transformation des coordonnées), il faudra, disons-nous, que la fonction θ, quel que soit t, ou bien prenne la même valeur qu'une fonction arbitrairement donnée de φ, ψ, ϖ, caractérisant l'état d'un milieu ambiant, ou bien satisfasse à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre imposée par la loi du Rayonnement, c'est-à-dire à l'équation (A) de la note précédente (page 22), supposée transformée dans le système de coordonnées considéré.

Pour effectuer d'ailleurs cette transformation, il suffira d'observer que si U désigne pour un instant l'une quelconque des deux fonctions F ou $l\theta$, dont les dérivées figurent seules au premier membre de cette équation, et u l'une quelconque des trois coordonnées rectilignes, on aura évidemment

$$\frac{U}{u}=\frac{U}{\varphi}\,\frac{\varphi}{u}+\frac{U}{\psi}\,\frac{\psi}{u}+\frac{U}{\varpi}\,\frac{\varpi}{u},$$

en sorte que $F(x, y, z)$ et $\mathfrak{F}(\varphi, \psi, \varpi)$ représentant par hypothèse la même fonction exprimée successivement dans les deux systèmes de coordonnées, l'équation en question (A), équivaudra alors à la suivante:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathfrak{F}}{\varphi}\,\frac{\varphi}{x}+\frac{\mathfrak{F}}{\psi}\,\frac{\psi}{x}+\frac{\mathfrak{F}}{\varpi}\,\frac{\varpi}{x}\right)\left(\frac{l\theta}{\varphi}\,\frac{\varphi}{x}+\frac{l\theta}{\psi}\,\frac{\psi}{x}+\frac{l\theta}{\varpi}\,\frac{\varpi}{x}\right)\\
+&\left(\frac{\mathfrak{F}}{\varphi}\,\frac{\varphi}{y}+\frac{\mathfrak{F}}{\psi}\,\frac{\psi}{y}+\frac{\mathfrak{F}}{\varpi}\,\frac{\varpi}{y}\right)\left(\frac{l\theta}{\varphi}\,\frac{\varphi}{y}+\frac{l\theta}{\psi}\,\frac{\psi}{y}+\frac{l\theta}{\varpi}\,\frac{\varpi}{y}\right)\\
+&\left(\frac{\mathfrak{F}}{\varphi}\,\frac{\varphi}{z}+\frac{\mathfrak{F}}{\psi}\,\frac{\psi}{z}+\frac{\mathfrak{F}}{\varpi}\,\frac{\varpi}{z}\right)\left(\frac{l\theta}{\varphi}\,\frac{\varphi}{z}+\frac{l\theta}{\psi}\,\frac{\psi}{z}+\frac{l\theta}{\varpi}\,\frac{\varpi}{z}\right)\pm K\Delta_1\mathfrak{F}=0,
\end{aligned}$$

laquelle, en développant, et ayant égard simultanément aux six équations (1) et à la formule (2), se réduira simplement à

$$(B)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Delta_1^2\varphi\,\frac{\mathfrak{F}}{\varphi}\cdot\frac{l\theta}{\varphi}+\Delta_1^2\psi\,\frac{\mathfrak{F}}{\psi}\cdot\frac{l\theta}{\psi}+\Delta_1^2\varpi\,\frac{\mathfrak{F}}{\varpi}\cdot\frac{l\theta}{\varpi}\\
&\pm K\left[\Delta_1^2\varphi\left(\frac{\mathfrak{F}}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{\mathfrak{F}}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{\mathfrak{F}}{\varpi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0.
\end{aligned}\right.$$

Pour résoudre le problème à l'aide des équations (18) et (B) (ou de la première seule, avec la condition $\theta_0=f(\varphi, \psi, \varpi)$, suivant les hypothèses que nous venons de distinguer),

la même question s'offre également à nous, qui consiste, celui-là, à reprendre à nouveau, immédiatement avec le système de coordonnées définitif, mais en ayant soin de les calquer en quelque sorte pour les adapter à ce système, les procédés et les raisonnements dont nous venons de faire usage pour traiter la même question, à l'aide de l'instrument classique des coordonnées rectilignes. Nous nous trouverons ainsi conduits tout naturellement à formuler la démonstration suivante.

L'élément de volume étant à présent le petit parallélipipède curviligne découpé par trois couples de surfaces infiniment voisines deux à deux, appartenant chacun à l'une des trois

---

il faudra nécessairement exprimer tout d'abord les trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ qui figurent dans ces équations à l'aide des coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ elles-mêmes, ce qui se fera, soit en résolvant les équations de définition du système coordonné, savoir

(C) $$\varphi(x, y, z) = \varphi, \qquad \psi(x, y, z) = \psi, \qquad \varpi(x, y, z) = \varpi,$$

par rapport aux variables x, y, z et remettant alors les valeurs ainsi obtenues

(D) $$x = f_1(\varphi, \psi, \varpi), \qquad y = f_2(\varphi, \psi, \varpi), \qquad z = f_3(\varphi, \psi, \varpi),$$

dans les expressions résultant des précédentes (C), d'après la définition du symbole Δ_1,

$$\Delta_1^2\varphi = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2, \qquad \Delta_1^2\psi = \left(\frac{\psi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{z}\right)^2,$$

$$\Delta_1^2\varpi = \left(\frac{\varpi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varpi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varpi}{z}\right)^2,$$

soit plus simplement, en calculant immédiatement à l'aide de ces mêmes valeurs (D) les autres expressions inverses des précédentes, savoir :

$$\Delta_1^{-2}\varphi = \left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}\right)^2, \qquad \Delta_1^{-2}\psi = \left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}\right)^2,$$

$$\Delta_1^{-2}\varpi = \left(\frac{x}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varpi}\right)^2,$$

en vertu de formules très connues que l'on trouve dans la plupart des traités d'analyse et dont nous rappelons également la démonstration dans notre *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées curvilignes dans les problèmes de Mécanique* (équations (18), page 18 et (8), page 14), puis en en déduisant enfin les valeurs des invariants demandés. Par ce moyen les deux équations (18) et (B) seront bien alors deux équations linéaires aux dérivées partielles, l'une du second et l'autre du premier ordre entre la fonction inconnue θ ou $l\theta$ et les variables indépendantes φ, ψ, ϖ, la seconde de ces équations ne devant être, vérifiée que pour les seuls points de la surface $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) = 0$.

familles coordonnées, parallélipipède ayant pour arrêtes par conséquent les trois éléments de normale $\partial n, \partial n', \partial n''$ dont les valeurs sont, en vertu de la formule (40bis) du *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (page 44),

$$(19) \qquad \partial n = \frac{d\varphi}{\Delta_1\varphi}, \qquad \partial n' = \frac{d\psi}{\Delta_1\psi}, \qquad \partial n'' = \frac{d\varpi}{\Delta_1\varpi},$$

l'élément de masse sera par suite actuellement

$$dm = \rho\, \partial n \partial n' \partial n'' = \rho\, \frac{d\varphi d\psi d\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi},$$

et par conséquent, en considérant toujours un volume fixe, délimité par une surface arbitraire, que nous désignerons par S, au sein du milieu proposé, la quantité totale de chaleur gagnée, pendant le temps dt, par la masse renfermée à l'intérieur de ce volume, aura pour première expression :

$$(20) \qquad \mathbf{S}\, cgdm \frac{d\theta}{dt} dt = \iiint cg\rho\, \frac{d\varphi d\psi d\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi} \frac{d\theta}{dt} dt.$$

Nous en obtiendrons comme tout à l'heure une seconde, en évaluant encore d'abord la quantité de chaleur qui traverse dans le même temps dt un élément ω de la surface S qui limite ce volume, c'est-à-dire le gain ou la perte de chaleur qui s'effectue pour la masse considérée par ce même élément dans ce temps dt, laquelle sera toujours donnée par la formule (13), où $\partial\theta$ sera alors, par définition d'abord, puis en ayant égard aux trois égalités (19),

$$\partial\theta = \frac{\theta}{\varphi} d\varphi + \frac{\theta}{\psi} d\psi + \frac{\theta}{\varpi} d\varpi = \frac{\theta}{\varphi} \cdot \Delta_1\varphi\, \partial n + \frac{\theta}{\psi} \cdot \Delta_1\psi\, \partial n' + \frac{\theta}{\varpi} \cdot \Delta_1\varpi\, \partial n'',$$

en sorte que cette quantité de chaleur aura dès lors pour expression, en tenant compte de la valeur qui précède,

$$(21) \left\{ \begin{aligned} -Q\omega \frac{\partial\theta}{\partial N} dt &= -Q\omega \left(\Delta_1\varphi \frac{\theta}{\varphi} \frac{\partial n}{\partial N} + \Delta_1\psi \frac{\theta}{\psi} \frac{\partial n'}{\partial N} + \Delta_1\varpi \frac{\theta}{\varpi} \frac{\partial n''}{\partial N} \right) dt \\ &= -Q\omega \left(\Delta_1\varphi \frac{\theta}{\varphi} \cos\alpha + \Delta_1\psi \frac{\theta}{\psi} \cos\beta + \Delta_1\varpi \frac{\theta}{\varpi} \cos\gamma \right) dt, \end{aligned} \right.$$

en désignant cette fois par α, 6, γ, les angles de la normale intérieure N de cette surface S, non plus avec les axes de coordonnées rectilignes x, y, z, qui n'interviennent plus en rien dans la question actuelle, mais avec les normales aux trois surfaces coordonnées, qui jouent désormais le rôle de ces axes rectilignes dans la question précédente; car il est clair que δn, $\delta n'$, $\delta n''$, et δN correspondant par hypothèse aux mêmes accroissements simultanés $d\varphi, d\psi, d\varpi$ des coordonnées φ, ψ, ϖ, on aura dès lors entre eux les relations :

$$(22) \qquad \delta n = \delta N \cos \alpha, \qquad \delta n' = \delta N \cos 6, \qquad \delta n'' = \delta N \cos \gamma.$$

Cette expression du flux élémentaire pour le cas actuel étant acquise, nous aurons évidemment pour celle du gain ou de la perte totale de chaleur, éprouvée par cette même masse, pendant le temps dt

$$(23) \quad -\sum Q\omega \frac{\delta \theta}{\delta N} dt = -\sum Q\omega \left(\Delta_1 \varphi \frac{\theta}{\varphi} \cos\alpha + \Delta_1 \psi \frac{\theta}{\psi} \cos 6 + \Delta_1 \varpi \frac{\theta}{\varpi} \cos\gamma \right) dt,$$

la sommation $\sum$ s'étendant à tous les éléments qui composent la surface S.

Nous transformerons maintenant, comme tout à l'heure, cette dernière somme, en la décomposant en trois sommes partielles, correspondant chacune à l'un des termes de la parenthèse, et nous considérerons à part, pour la première, qui sera $-\Sigma\, Q\, \omega\, \Delta_1 \varphi \frac{\theta}{\varphi} \cos \alpha\, dt$, les deux points où la surface S est rencontrée par un même arc d'intersection PQ de deux surfaces ψ et ϖ quelconques (*), points pour lesquels la coordonnée φ prend les deux valeurs φ_1 et φ_2, les deux autres coordonnées ψ et ϖ ayant par hypothèse les mêmes valeurs. En se laissant guider par des analogies évidentes, on apercevra sans peine alors que le cylindre projetant relatif au plan coordonné yz, que nous considérions

(*) Il y aurait lieu de placer ici, relativement aux points de rencontre de cet arc d'intersection avec la surface fermée S, une observation complètement analogue à celle que nous avons déjà faite plus haut pour les coordonnées rectilignes. (Voir la note de la page 18.)

dans la question précédente, et dont les génératrices étaient des droites parallèles à l'axe rectiligne des x, se trouve remplacé dans celle-ci par une surface S_0, circonscrite à la surface S, et engendrée par l'un de ces arcs d'intersection PQ, spécifiés tout à l'heure, ledit arc étant choisi de telle sorte que ses deux points de rencontre avec la surface S se confondent constamment en un seul, que nous désignerons d'une façon générale par φ_0; et dès lors, que l'ensemble de ces points φ_0, qui constituera la courbe de contact de la surface S avec son enveloppe S_0, jouera le rôle de la courbe de contour apparent dans le système précédent, d'où il suit tout d'abord que les deux points de rencontre φ_1 et φ_2 d'un même arc d'intersection PQ avec la surface S seront situés de part et d'autre de cette courbe de contact.

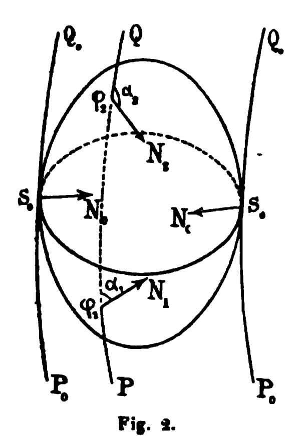


Fig. 2.

Or, par sa définition même, tout le long de cette courbe, les surfaces S et S_0 ayant mêmes plans tangents et mêmes normales, il s'ensuit qu'en un quelconque de ses points φ_0, la normale N_0 de la surface S sera aussi normale à l'arc P_0Q_0 générateur de l'enveloppe S_0, et normal lui-même par hypothèse à la surface φ en ce point, comme étant l'intersection de deux surfaces ψ et ϖ. Cela revient à dire qu'en chacun des points φ_0 de cette courbe, l'angle α sera droit, et comme il variera d'une façon continue, qu'en général il sera aigu pour tous les points φ_1 situés d'un certain côté de cette courbe, et obtus pour tous les points φ_2 situés de l'autre côté.

Si donc nous convenons de nouveau de distinguer par les indices 1 et 2 les deux portions de la surface S, ainsi séparées par cette courbe de contact, et pour lesquelles l'angle α est constamment aigu ou obtus, on voit qu'en désignant par ω_1 et ω_2 les aires de deux éléments de cette surface empruntés à ces deux portions, situés aux deux points φ_1 et φ_2, à la rencontre du même arc d'intersection PQ avec la surface S, éléments qui, étant tous

deux arbitraires de forme et de grandeur, peuvent être choisis de telle façon qu'ils aient chacun le rectangle $\delta n'\delta n''$ relatif à ce point pour projection sur le plan tangent de la surface φ relative au même point, c'est-à-dire que l'on peut supposer déterminés, eu égard aux valeurs (19), par les deux équations

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1 \cos\alpha_1 &= (\delta n'\delta n'')_1 = \frac{d\psi d\varpi}{(\Delta_1\psi\Delta_1\varpi)_1},\\ \omega_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = -\omega_2\cos\alpha_2 &= (\delta n'\delta n'')_2 = \frac{d\psi d\varpi}{(\Delta_1\psi\Delta_1\varpi)_2},\end{aligned}\right.$$

on voit alors, disons-nous, qu'en effectuant séparément les sommations correspondant à chacune des deux portions de la surface, on devra écrire pour la première des trois sommes qui composerait l'expression (23)

$$\begin{aligned} -\sum Q\omega\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\cos\alpha\,dt &= -Q\left[\sum_1\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\right)_1\omega_1\cos\alpha_1 + \sum_2\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\right)_2\omega_2\cos\alpha_2\right]dt\\ &= -Q\left[\sum_1\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\right)_1\frac{d\psi d\varpi}{(\Delta_1\psi\Delta_1\varpi)_1} - \sum_2\left(\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\right)_2\frac{d\psi d\varpi}{(\Delta_1\psi\Delta_1\varpi)_2}\right]dt\\ &= Q\left[\sum_2\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)_2 d\psi d\varpi - \sum_1\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)_1 d\psi d\varpi\right]dt,\end{aligned}$$

les deux sommations $\sum_1$ et $\sum_2$ qui sont maintenant relatives au même élément $d\psi d\varpi$, s'étendant à présent l'une et l'autre à toutes les valeurs des variables ψ et ϖ qui correspondent à des points situés à l'intérieur de la surface circonscrite S_0 définie plus haut. D'où il suit qu'elles peuvent être remplacées chacune par une intégrale double prise entre les limites que nous venons de dire, intégrales dont la différence équivaudra alors à une intégrale triple, étendue à tout le volume délimité par la surface S, ainsi que l'indiquent les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} -\sum Q\omega\,\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\cos\alpha\,dt &= Qdt\iint\left[\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)_2 - \left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)_1\right]d\psi d\varpi\\ &= Qdt\iiint\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)d\varphi d\psi d\varpi.\end{aligned}$$

On trouverait évidemment par le même procédé les deux autres égalités

$$\left\{\begin{aligned} -\sum Q\omega\Delta_1\psi\frac{\theta}{\psi}\cos 6\,dt &= Q\,dt\iiint\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)d\varphi d\psi d\varpi,\\ -\sum Q\omega\Delta_1\varpi\frac{\theta}{\varpi}\cos\gamma\,dt &= Q\,dt\iiint\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)d\varphi d\psi d\varpi,\end{aligned}\right.$$

de sorte qu'en additionnant ces trois dernières égalités, on aura pour la somme totale (23)

$$-\sum Q\omega\frac{\delta\theta}{\delta N}dt = Q\,dt\iiint\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)\right]d\varphi d\psi d\varpi;$$

et, en égalant dès lors cette seconde expression de la quantité de chaleur considérée à la précédente (20), nous aurons l'équation

$$\iiint cg\rho\frac{d\varphi d\psi d\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{d\theta}{dt}dt$$
$$= Qdt\iiint\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)\right]d\varphi d\psi d\varpi,$$

ou, en mettant en facteur Qdt, et faisant passer tous les termes dans un même membre, puis se rappelant que les deux intégrales triples sont relatives au même volume,

$$Qdt\iiint\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{cg\rho}{Q}\cdot\frac{1}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{d\theta}{dt}\right]d\varphi d\psi d\varpi = 0.$$

Or cette intégrale devant ainsi être nulle encore, quel que soit le volume arbitrairement choisi à l'intérieur duquel on la suppose

calculée, lorsque l'on y remettra pour θ la fonction de φ, ψ, ϖ, qui représentera la température, le Lemme démontré plus haut, et dont nous avons déjà fait usage dans le cas précédent, exigera de nouveau que la fonction intégrée soit identiquement nulle dans cette hypothèse : ce qui revient à dire que cette fonction θ vérifiera, en un point quelconque du corps, l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{\theta}{\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\frac{\theta}{\psi}\right)+\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\frac{\theta}{\varpi}\right)-\frac{k}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\frac{d\theta}{dt}=0,$$

en posant encore, comme dans le cas précédent, $k=\frac{cg\rho}{\mu}$, et nous retombons bien, comme on le voit, sur l'équation (18) déjà obtenue.

Nous avons donc ainsi fourni une démonstration entièrement rigoureuse de cette équation pour le système le plus général de coordonnées orthogonales, et basée sur la considération directe de ces coordonnées elles-mêmes, ainsi que le font Lamé, dans ses *Coordonnées Curvilignes* (§ XVI, pages 25-27), ou sa *Théorie Analytique de la Chaleur* (§ XIX, pages 27-29), et Résal, dans son excellent *Traité de Physique Mathématique* (*Chaleur*, § VI et VII, formules (11) et (12)), pour les deux systèmes cylindrique et sphérique seulement, mais en ayant recours l'un et l'autre au parallélipipède d'Euler et de Bernouilli, dont l'emploi donne lieu à la critique formulée plus haut dans la note de la page 11 ci-dessus, et généralement admise par tout le monde aujourd'hui (*).

(*) Si l'on voulait de même à présent, en vue d'établir pour ce cas général l'équation à la surface imposée par la loi du Rayonnement, au lieu de simples transformations analytiques comme dans la note de la page 23, avoir de nouveau recours à la considération directe des quantités géométriques qui entrent dans les calculs, raisonnant exactement comme nous l'avons fait pour arriver à l'équation (A) dans la note de la page 21, nous obtiendrons encore l'équation demandée en égalant au produit $e\theta\omega dt$ l'expression (21) du flux de chaleur élémentaire, calculée pour la surface externe du corps, et dans laquelle les angles α, β, γ seront dès lors ceux de la normale *extérieure* de cette surface avec les normales aux trois surfaces coordonnées, et auront par suite pour cosinus (en ayant égard

Ces préliminaires indispensables étant établis, abordons maintenant la question qui forme l'objet principal de cette étude.

---

aux valeurs connues des cosinus directeurs de la normale à cette surface $F(x, y, z) = 0$ ou $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) = 0$, par rapport aux trois axes rectilignes), savoir

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\lambda + \frac{F}{y}\mu + \frac{F}{z}\nu\right), \\ \cos\beta &= \pm\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\lambda' + \frac{F}{y}\mu' + \frac{F}{z}\nu'\right), \\ \cos\gamma &= \pm\frac{1}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\lambda'' + \frac{F}{y}\mu'' + \frac{F}{z}\nu''\right), \end{aligned}\right.$$

expressions dans lesquelles les valeurs des neuf cosinus directeurs, $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu''$ devront être remplacées par celles fournies par le tableau (18) de notre ***Mémoire sur l'emploi des Coordonnées Curvilignes*** (page 19), et qui, en supposant cette substitution opérée, se réduiront alors simplement aux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\frac{x}{\varphi} + \frac{F}{y}\frac{y}{\varphi} + \frac{F}{z}\frac{z}{\varphi}\right) = \pm\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\mathcal{F}}\frac{\mathcal{F}}{\varphi}, \\ \cos\beta &= \pm\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\frac{x}{\psi} + \frac{F}{y}\frac{y}{\psi} + \frac{F}{z}\frac{z}{\psi}\right) = \pm\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\mathcal{F}}\frac{\mathcal{F}}{\psi}, \\ \cos\gamma &= \pm\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1 F}\left(\frac{F}{x}\frac{x}{\varpi} + \frac{F}{y}\frac{y}{\varpi} + \frac{F}{z}\frac{z}{\varpi}\right) = \pm\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\mathcal{F}}\frac{\mathcal{F}}{\varpi}. \end{aligned}\right.$$

En remettant donc ces valeurs à la place de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ dans l'expression (21), pour avoir celle du flux élémentaire relative à la surface rayonnante du corps et l'égalant ensuite au produit $e\theta\omega dt$, nous obtiendrons ainsi l'équation

$$\mp\frac{Q\omega}{\Delta_1\mathcal{F}}\left[\Delta_1\varphi\frac{\theta}{\varphi}\cdot\Delta_1\varphi\frac{\mathcal{F}}{\varphi} + \Delta_1\psi\frac{\theta}{\psi}\cdot\Delta_1\psi\frac{\mathcal{F}}{\psi} + \Delta_1\varpi\frac{\theta}{\varpi}\cdot\Delta_1\varpi\frac{\mathcal{F}}{\varpi}\right]dt = e\theta\omega\, dt;$$

d'où, en multipliant par $\frac{\Delta_1\mathcal{F}}{Q\theta\omega dt}$, puis remplaçant encore $\Delta_1\mathcal{F}$ par sa valeur (2), et posant de nouveau $\frac{e}{Q} = K$, on retrouve bien, comme par la voie analytique, la même équation (B) de la note de la page 23 ci-dessus :

$$\Delta_1^2\varphi\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\cdot\frac{l\theta}{\varphi} + \Delta_1^2\psi\frac{\mathcal{F}}{\psi}\cdot\frac{l\theta}{\psi} + \Delta_1^2\varpi\frac{\mathcal{F}}{\varpi}\cdot\frac{l\theta}{\varpi}$$

$$\pm K\left[\Delta_1^2\varphi\left(\frac{\mathcal{F}}{\varphi}\right)^2 + \Delta_1^2\psi\left(\frac{\mathcal{F}}{\psi}\right)^2 + \Delta_1^2\varpi\left(\frac{\mathcal{F}}{\varpi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

CHAPITRE II.

Équation aux dérivées partielles des familles isothermes de surfaces. — Méthode pour la recherche de ces familles de surfaces. — Solution la plus générale du problème de l'isothermie pour les surfaces du premier et du second ordre.

ÉQUATION DITE DE L'ÉQUILIBRE DE TEMPÉRATURE. — ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES FAMILLES ISOTHERMES DE SURFACES. — L'expérience apprend que tout corps, quels que soient son état initial et les conditions aux limites qu'on lui impose, pourvu qu'on les suppose indépendantes du temps, c'est-à-dire, en d'autres termes, tout corps soumis à l'action de sources constantes de froid ou de chaleur, finit toujours par arriver, au bout d'un temps plus ou moins long, à un état stationnaire que l'on est convenu de désigner par le nom d'*équilibre de température.* L'échange réciproque de chaleur entre les différentes parties du corps, supposé homogène et isotrope, ne cessant pas d'être régi comme devant par l'équation (17), à partir de l'instant où cet état stationnaire est définitivement établi, et à dater duquel on a par conséquent constamment $\frac{d\theta}{dt} = 0$, il s'ensuit que la distribution de la température dans le corps sera, pour ce nouveau régime, déterminée par l'équation aux dérivées partielles $\Delta_2\theta = 0$, laquelle a reçu en conséquence le nom d'*Équation de l'Équilibre de température.*

La température θ en chaque point du corps étant alors supposée déterminée en x, y, z, à l'aide de cette nouvelle équation aux dérivées partielles et des conditions aux limites, ainsi que nous l'avons expliqué, on voit qu'en égalant la fonction ainsi obtenue, que nous désignerons par $f(x, y, z)$, à une constante quelconque, on aura une surface qui sera le lieu des points du corps pour lesquels la température sera précisément égale à la valeur de cette constante. Si donc l'on considère cette constante comme un paramètre variable que nous appellerons θ, on aura ce que l'on nomme une *Famille Isotherme* de surfaces, et l'on dira

de plus qu'elle est ***rapportée à son paramètre thermométrique.*** On convient enfin d'employer encore ces mêmes dénominations lorsque, au lieu de la fonction déterminée $\theta = f(x, y, z)$ elle-même, on en prendra une fonction linéaire quelconque, laquelle vérifiera tout aussi bien évidemment l'équation précitée, ou, en d'autres termes, lorsque l'on considérera la famille de surfaces représentée par l'équation

$$\mathrm{A}f(x,y,z) + \mathrm{B} = u.$$

Ainsi, dans tous les cas, le caractère essentiel du paramètre thermométrique u d'une famille isotherme de surfaces consistant en ce que ce paramètre, considéré comme fonction de x, y et z, vérifie l'équation de l'équilibre de température $\Delta_2 u = 0$, on voit que sa définition comporte essentiellement deux constantes arbitraires, c'est-à-dire que si θ désigne l'une de ses déterminations en particulier, son expression générale sera $u = \sigma\theta + \tau$.

L'expression (10), que nous avons donnée ci-dessus pour le second invariant Δ_2 d'une fonction de point quelconque ω, se trouvera notablement simplifiée, lorsque les trois coordonnées φ, ψ, ϖ satisferont à cette condition, car, en la prenant alors sous la forme précédente (9), on voit que cette même expression se réduira dans cette hypothèse à la forme simple, complètement analogue à celle (2) rencontrée dans tous les cas pour l'invariant du premier ordre Δ_1,

$$(25) \qquad \Delta_2\omega = \Delta_1^2\varphi \cdot \frac{\omega^2}{\varphi^2} + \Delta_1^2\psi \cdot \frac{\omega^2}{\psi^2} + \Delta_1^2\varpi \; \frac{\omega^2}{\varpi^2}.$$

et qui se rapproche beaucoup plus de la forme originaire relative aux coordonnées rectilignes.

Dès lors l'énumération sommaire que nous avons faite des équations les plus connues de la Physique Mathématique dans lesquelles cet invariant intervient, équations que nous avons groupées plus haut sous le numéro (11), et qui toutes bénéficieront de la simplification que nous venons de dire, fait comprendre tout de suite l'avantage très grand qu'il y aura à prendre

pour système coordonné un système ainsi composé de trois familles isothermes, rapportées chacune à leur paramètre thermométrique, pour tous les problèmes relatifs à cette branche de la Science, dans lesquels l'emploi des coordonnées curvilignes sera imposé par la nature de la question (*). Ainsi, en particulier, l'équation du mouvement de la chaleur (17), établie tout à l'heure, devient simplement, avec cette hypothèse,

$$(26) \qquad \Delta_1^2\varphi \cdot \frac{\theta^2}{\varphi^2} + \Delta_1^2\psi \cdot \frac{\theta^2}{\psi^2} + \Delta_1^2\varpi \cdot \frac{\theta^2}{\varpi^2} = k\frac{d\theta}{dt},$$

et c'est effectivement en la ramenant à cette forme que Lamé a pu résoudre ainsi le premier le difficile problème de l'équilibre de température pour un corps limité par un ellipsoïde, en faisant usage d'un système de coordonnées mieux approprié que tout autre pour cet objet, et qui a reçu son nom en souvenir de ce fait considérable dans l'histoire de la Science, système auquel, en raison de son importance, nous consacrerons en entier le dernier Chapitre du présent travail.

De là résulte immédiatement la raison d'être de la recherche qui fait l'objet de ce Mémoire, vu l'intérêt très grand qui s'attache dès lors à connaître exactement, par le moyen de sa solution la plus générale, quelles sont les surfaces que l'on pourra faire entrer dans la composition d'un semblable système.

(*) « De là est venue l'idée des coordonnées curvilignes, dont l'emploi est indispensable » quand on veut traiter des corps de formes données, dans les diverses branches de la » physique mathématique.

» En effet, dans toutes ces branches, il s'agit toujours d'intégrer, ou de déterminer, » une ou plusieurs fonctions qui doivent vérifier une ou plusieurs équations aux diffé» rences partielles du second ordre, exprimant les lois physiques qui régissent les fonc» tions dont il s'agit. — Et, en outre, ces fonctions, ou leurs intégrales générales, doivent » vérifier d'autres équations aux différences partielles du premier ordre, pour tous les » points appartenant à la surface qui limite le corps que l'on veut traiter.

» Or, ce problème de double intégration serait complètement inabordable, si l'on ne » parvenait pas à *rapporter les points du corps à un système de coordonnées tel, que la » surface, ou les diverses parties qui la composent, soient exprimées par une de ces » coordonnées égalée à une constante.* C'est ainsi qu'on a pu traiter : le prisme rec» tangle à l'aide des coordonnées rectilignes; le cylindre droit par les coordonnées » polaires; la sphère à l'aide des coordonnées sphériques; l'ellipsoïde par les coordon» nées elliptiques. » (LAMÉ, LEÇONS SUR LES COORDONN. CURVIL. *Discours préliminaire*, pp. VIII-IX)

Mais la propriété caractéristique du paramètre thermométrique $\theta = f(x, y, z)$ d'une famille isotherme quelconque de surfaces étant ainsi de vérifier l'équation aux dérivées partielles $\Delta_2\theta = 0$, il est facile de voir que le paramètre en général d'une semblable famille, c'est-à-dire par conséquent d'une famille de surfaces propre à caractériser l'ensemble des points d'un milieu homogène et isotrope affectés d'une même température à l'état stationnaire, ne remplira pas forcément cette même condition, car il est clair que toute fonction arbitraire Φ de la fonction $f(x, y, z)$ et d'un paramètre variable λ donnera lieu à une autre équation, qui pourra être mise sous l'une ou l'autre des trois formes équivalentes

$$\Phi\left[f(x, y, z), \lambda\right] = 0, \qquad \lambda = \mathfrak{F}\left[f(x, y, z)\right], \qquad f(x, y, z) = F(\lambda),$$

et qui représentera exactement la même famille de surfaces, bien que son paramètre λ, considéré comme fonction de x, y, z, ne vérifie plus évidemment en général l'équation $\Delta_2\lambda = 0$.

Une première question se pose donc alors, qui est la suivante. Étant donnée une famille quelconque de surfaces $\varphi(x, y, z) = \lambda$, à quel caractère analytique reconnaîtra-t-on que cette famille de surfaces est isotherme ?

La réponse est simple et facile, et découle immédiatement de la définition qui précède du paramètre thermométrique. Pour que cette dernière équation représente une famille isotherme de surfaces, il faut et il suffit que la fonction $\varphi(x, y, z)$ puisse être mise sous la forme $\varphi(x, y, z) = \mathfrak{F}[f(x, y, z)]$, ce qui revient à dire qu'il devra exister entre les deux paramètres θ et λ la relation arbitraire

$$(27) \qquad \lambda = \mathfrak{F}(\theta), \qquad \text{ou inversement} \qquad \theta = F(\lambda).$$

Or deux différentiations successives donneront alors, en vertu de la définition même du paramètre thermométrique θ,

$$\Delta_2\theta = F'(\lambda).\Delta_2\lambda + F''(\lambda).\Delta_1^2\lambda = 0,$$

d'où l'on tirera, par suite, la condition

$$(28)\qquad \frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda} = -\frac{F''(\lambda)}{F'(\lambda)} = -\frac{d.lF'(\lambda)}{d\lambda} = -\Psi(\lambda),$$

ou

$$(29)\qquad \Delta_2\lambda + \Psi(\lambda)\,\Delta_1^2\lambda = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda} = \Lambda$ devra pouvoir être exprimé en fonction de λ seule : condition dont on s'assurera aisément, si l'équation de la famille de surfaces peut être résolue, par rapport à l'une des variables, en remettant dans l'expression Λ de ce rapport, calculée à l'aide de l'équation proposée $\lambda = \varphi(x, y, z)$, à la place de l'une des coordonnées x, y, z, sa valeur tirée de cette même équation, et alors, pour que la condition demandée soit satisfaite, il faudra que les deux autres coordonnées disparaissent d'elles-mêmes; soit plus généralement, pour le cas où cette substitution ne serait pas possible, en vérifiant directement que deux quelconques des trois équations

$$(30)\qquad \frac{\Lambda}{y}\frac{\lambda}{z} - \frac{\Lambda}{z}\frac{\lambda}{y} = 0,\qquad \frac{\Lambda}{z}\frac{\lambda}{x} - \frac{\Lambda}{x}\frac{\lambda}{z} = 0,\qquad \frac{\Lambda}{x}\frac{\lambda}{y} - \frac{\Lambda}{y}\frac{\lambda}{x} = 0,$$

qui se réduisent à deux, et sont une conséquence nécessaire de l'hypothèse

$$\Lambda = -\Psi(\lambda),\quad \frac{\Lambda}{x} = -\Psi'(\lambda)\frac{\lambda}{x},\quad \frac{\Lambda}{y} = -\Psi'(\lambda)\frac{\lambda}{y},\quad \frac{\Lambda}{z} = -\Psi'(\lambda)\frac{\lambda}{z},$$

sont bien identiquement satisfaites, car il est clair qu'elles entraineront alors entre les deux différentielles totales $d\Lambda$ et $d\lambda$ une relation de la forme $d\Lambda = \Omega d\lambda$, laquelle équivaut précisément à la même hypothèse que nous venons de dire.

Cette dernière condition étant supposée remplie, une seconde question non moins importante se pose aussitôt. La famille de surfaces donnée étant ainsi reconnue isotherme, quelle sera dès lors l'expression de son paramètre thermométrique en fonction du paramètre donné λ, que l'on peut par opposition désigner avec Lamé par le nom de *paramètre géométrique ?*

La réponse à cette nouvelle question est alors fournie par

l'équation (28), dans laquelle il faut maintenant considérer la fonction $\Psi(\lambda)$ comme donnée, et la fonction $F(\lambda)$ comme inconnue, et que l'on peut écrire dans ce but, en y remettant à la place de $F(\lambda)$, sa valeur θ résultant de l'hypothèse (27),

$$(31) \qquad \frac{d}{d\lambda}\log\frac{d\theta}{d\lambda} = \Psi(\lambda),$$

et d'où l'on tirera, en conséquence, par une première intégration,

$$(32) \qquad \log\frac{d\theta}{d\lambda} + \log\sigma = \int \Psi(\lambda)\,d\lambda \qquad \text{ou} \qquad \sigma\frac{d\theta}{d\lambda} = e^{\int \Psi(\lambda)d\lambda},$$

et de là, par une seconde intégration, en intervertissant les deux membres,

$$(32^{\text{bis}}) \qquad \int e^{\int \Psi(\lambda)d\lambda}\,d\lambda = \sigma\theta + \tau,$$

équation dont le second membre représente précisément le paramètre thermométrique de la famille donnée, avec les deux constantes arbitraires qui entrent essentiellement, avons-nous dit, dans sa définition, et qui dès lors, étant résolue par rapport à λ, fournira l'expression demandée du paramètre géométrique en fonction du paramètre thermométrique. Nous présenterons tout à l'heure, en terminant ce Chapitre, trois exemples simples de ce calcul, dont l'un nous fournira comme conséquence une interprétation physique intéressante des fonctions elliptiques de première espèce.

On voudra bien remarquer que nous avons dit, dès les premiers mots de cette théorie, comme nous le dirons constamment dans tout le cours de cet ouvrage, *famille isotherme* de surfaces, et non pas, ainsi que le dit Lamé, et qu'on le fait le plus généralement depuis lui, famille de *surfaces isothermes :* locution très vicieuse, à notre sens, en ce qu'elle fait croire a priori que la qualification d'*isotherme*, et par conséquent la définition correspondante, vise la surface elle-même, sauf à envisager ensuite une famille composée de surfaces ainsi définies individuellement, de même que l'on peut considérer une famille de sphères, d'ellipsoïdes, de cônes ou de tout autre type défini géométriquement,

tandis que la définition en question s'applique au contraire directement à la famille elle-même, et que cette même qualification d'isotherme, attribuée à une surface considérée isolément, ne présente, à notre avis, absolument aucun sens.

Effectivement, non seulement le sens de cette expression employée dans ces conditions ne ressort en aucune façon de la définition précitée, laquelle consiste tout entière à proprement parler dans l'équation $\Delta_2\theta = 0$, ou plus généralement l'équation ci-dessus (29); mais il y a plus, et l'on est autorisé à penser (nous ne savons au juste si la remarque en a déjà été faite, ne l'ayant rencontrée nulle part), qu'étant donnée une surface individuelle arbitrairement choisie $z = f(x, y)$, il existera en général une infinité de familles isothermes différentes qui reproduiront cette même surface, chacune pour une valeur convenablement déterminée du paramètre, ce qui montre bien l'inanité d'une semblable expression ainsi employée.

En effet, si l'on suppose ladite équation (29) intégrée sous la forme où elle se présente en l'état, c'est-à-dire λ y étant prise pour fonction inconnue, l'intégrale générale qui fournira l'expression de λ en x, y, z, comprendra des fonctions arbitraires qui seront telles que λ puisse se réduire, pour $z = z_0$ (z_0 désignant une constante *numérique* arbitrairement choisie), à une fonction donnée arbitrairement d'x et d'y, ou, en d'autres termes, que la famille isotherme de surfaces admette pour trace sur un plan donné parallèle aux xy une famille de courbes arbitrairement choisie. Mais on pourra aussi, avant d'intégrer cette même équation, changer de variables, et prendre z pour inconnue et x, y, et λ pour variables indépendantes. Or, si on l'intègre sous la dernière forme ainsi obtenue, l'intégrale générale qui exprimera alors z en fonction d'x, y et λ, devra renfermer des fonctions arbitraires qui seront telles que, pour une valeur *numérique* $\lambda = \lambda_0$ arbitrairement choisie, l'expression de z se réduise à une fonction d'x et y arbitrairement donnée, c'est-à-dire telle, par conséquent, que l'intégrale puisse reproduire la surface $z = f(x, y)$ supposée donnée arbitrairement à l'avance : et comme la constante λ_0 demeure arbitraire dans ce raisonnement, il y a donc lieu de présumer qu'en général il existera une infinité d'équa-

tions différentes entre z, x, y et λ, c'est-à-dire une infinité de familles isothermes différentes de surfaces, qui toutes satisferont également à la condition que nous venons de dire.

A la vérité, la conclusion qui précède n'est peut-être pas d'une certitude absolue, en raison des nombreuses lacunes ou irrégularités qui existent encore dans la théorie des équations aux dérivées partielles, ou, si l'on aime mieux, à cause des surprises que réservent à chaque instant les théories fondées sur la considération des dérivées des fonctions en général; mais si l'on abandonne les faits exceptionnels pour ne se préoccuper que de la généralité des cas, cette même conclusion offrira dès lors un degré de vraisemblance suffisant pour enlever toute signification certaine à la locution contre laquelle nous venons de nous élever, et pour la faire proscrire par conséquent du langage mathématique, à moins que l'on ne soit expressément convenu à l'avance de lui attribuer un sens faisant l'objet d'une définition nouvelle (*), qui ne sera en aucune façon une conséquence nécessaire de celle des familles isothermes de surfaces que nous venons d'énoncer.

Telles sont les deux questions fondamentales qui s'imposent, pour ainsi dire d'elles-mêmes, au début de la théorie des familles isothermes de surfaces, et qu'il nous était indispensable de rappeler d'une façon claire et précise, avant d'entreprendre la recherche que nous avons en vue dans ce travail, avec la solution qu'en a donnée Lamé, créateur de la théorie. Mais nous ne croyons pas devoir nous en tenir là, et puisque nous avons dû revenir sur ce sujet, on nous permettra d'élargir tant soit peu la question, et d'y ajouter encore, à titre de commentaires et de développements, une modeste contribution personnelle, dont les résultats nous seront d'un grand secours pour la recherche générale qui fait l'objet de ce Mémoire.

(*) C'est ce que nous avons fait dans notre *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées Curvilignes*, où nous adoptons cette expression, en vue d'abréger le discours, pour tenir lieu de la circonlocution : « Surface susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme. » (*Voir* l'AVANT-PROPOS et l'ERRATA (pp. 55 et 82) insérés en tête de ce Mémoire, pp. XXIII et XXV.)

INSUFFISANCE DE LA SOLUTION THÉORIQUE FOURNIE PAR L'INTÉGRALE GÉNÉRALE DE CETTE ÉQUATION. — Il semble au premier abord, d'après ce qui précède, que la solution du problème de l'isothermie soit dès lors renfermée tout entière dans l'intégration générale de l'équation aux dérivées partielles $\Delta_2\theta = 0$, ou plus généralement de l'équation (29), en sorte que cette intégration étant supposée effectuée par un procédé quelconque, il n'y ait plus de question. Mais il en va tout autrement dans la réalité. En effet, d'abord même au point de vue purement théorique, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que l'on eût déterminé, non seulement l'intégrale générale de ces équations, mais encore toutes leurs solutions singulières, ce que l'on ne sera jamais sûr d'avoir réalisé effectivement, vu l'absence de méthodes générales pour la recherche des solutions de cette espèce dans les équations aux dérivées partielles du second ordre; puis, au point de vue pratique, pour pouvoir utiliser les résultats de ces intégrations en vue de la constitution de nouveaux systèmes orthogonaux, il ne nous suffit pas d'être assurés que toutes les surfaces satisfaisant à la question sont bien comprises dans telle ou telle formule plus ou moins compliquée que nous aura fourni l'analyse, mais il nous faut encore pouvoir décider simplement, à la vue de ces formules, si telle famille déterminée de surfaces est comprise ou non dans ce résultat. Or les intégrales générales dont nous venons de parler, si elles fournissent bien à la vérité le moyen d'obtenir immédiatement autant de solutions particulières du problème que l'on voudra, satisfont fort mal par ailleurs à ce second côté de la question, et n'offrent dès lors pour l'objet que nous avons en vue qu'une utilité très restreinte.

Nous ferons mieux comprendre notre pensée à ce sujet, en envisageant d'abord, à titre d'exemple, les deux cas particuliers des cônes et des cylindres, cas pour lesquels l'intégration de l'équation $\Delta_2\theta = 0$, se ramène à l'intégrale classique de l'équation des Cordes Vibrantes.

La chose est manifeste pour les cylindres, car si l'on prend l'axe des z parallèle aux génératrices, la coordonnée z n'entrant plus dans l'équation de la famille de surfaces, l'équation $\Delta_2\theta = 0$

se réduit alors à

$$(33)\qquad \frac{\theta^2}{x^2}+\frac{\mathfrak{s}^2}{y^2}=0;\qquad \text{ou}\qquad \frac{\theta^2}{y^2}=-\frac{\theta^2}{x^2},$$

et donne par suite pour intégrale générale, en faisant $i=\sqrt{-1}$,

$$(34)\qquad \theta=f_1(x+iy)+f_2(x-iy);$$

mais le même fait est moins évident dans le cas des familles de cônes. Nous ne savons si le résultat auquel il va nous conduire pour l'équation générale des familles isothermes de cônes en coordonnées rectilignes a déjà été signalé; en tout cas, ne l'ayant rencontré nulle part, nous croyons opportun de l'indiquer ici, aussi bien pour servir de point d'appui à la remarque sur laquelle nous nous proposons d'appeler l'attention, que parce que nous aurons l'occasion d'en faire usage utilement dans le Chapitre suivant.

L'équation $F(x, y, z, \lambda)=0$, ou $\varphi(x, y, z)=\lambda$ étant supposée représenter une famille de surfaces coniques, si on l'exprime à l'aide des coordonnées sphériques

$$(34^{\text{bis}})\qquad x=r\sin\theta\cos\omega,\qquad y=r\sin\theta\sin\omega,\qquad z=r\cos\theta,$$

se transformera, vu son homogénéité, en x, y, z, dans celle-ci

$$(35)\qquad F(\sin\theta\cos\omega, \sin\theta\sin\omega, \cos\theta, \lambda)=0,\qquad \text{ou}\qquad \lambda=f(\theta, \omega);$$

et, en même temps, l'expression classique de l'invariant Δ_2 d'une fonction de point quelconque V (*) (expression qu'il est facile d'ailleurs de déduire de notre formule (10) (**), en y faisant

(*) Voir si l'on veut SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, § 91, p. 129, en haut; ou encore JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. I, § 42, p. 45, en bas.

(**) Si l'on admet comme donnée l'expression classique de l'élément d'arc en coordonnées sphériques, le mode le plus simple d'opérer sera évidemment d'en conclure, par la comparaison avec l'expression générale de l'élément d'arc en coordonnées quelconques (ainsi que nous le faisons dans notre *Mémoire sur l'emploi des Coordonnées Curvilignes*, page 153, au bas), les valeurs des trois invariants Δ_1, savoir

$$(\alpha)\qquad \Delta_1\rho=1,\qquad \Delta_1\psi=\frac{1}{\rho\sin\varpi},\qquad \Delta_1\varpi=\frac{1}{\rho},$$

$\omega = V$, $\varphi = r$, $\psi = \omega$, $\varpi = \theta$), savoir

$$(35^{bis})\qquad \Delta_2 V = \frac{1}{r}\frac{d^2.rV}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2V}{d\omega^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\frac{dV}{d\theta}\right)}{d\theta},$$

---

et, par suite, celles des coefficients

$$(\epsilon)\quad \begin{cases} \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\Delta_1\varpi = \dfrac{1}{\varphi^2\sin\varpi}, \\ \dfrac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi} = \varphi^2\sin\varpi, \qquad \dfrac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi} = \dfrac{1}{\sin\varpi}, \qquad \dfrac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi} = \sin\varpi, \end{cases}$$

lesquelles, étant reportées dans cette formule générale (10), donneront presque immédiatement, eu égard au changement de notation ci-dessus spécifié, la formule en question (35bis). — C'est ce que fait M. BERTRAND dans son *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* (t. I, § 186, p. 187, en haut).

Mais si, au contraire, sans supposer aucune notion antérieure, l'on se propose d'appliquer de toutes pièces ladite formule (10) (à titre de vérification, par exemple), au système particulier de coordonnées défini par les équations (34bis), il faudra, en premier lieu, retrouver les mêmes valeurs (α), à l'aide de l'un ou l'autre des deux procédés indiqués dans la note de la page 24, c'est-à-dire : soit, quant au second d'abord, en partant des équations (34bis) elles-mêmes, récrites avec le changement de notation convenu, savoir

$$x = \varphi\sin\varpi\cos\psi, \qquad y = \varphi\sin\varpi\sin\psi, \qquad z = \varphi\cos\varpi,$$

et faisant usage des trois dernières formules de cette note, qui donneront alors immédiatement

$$\begin{cases} \Delta_1^{-2}\varphi = \sin^2\varpi\cos^2\psi + \sin^2\varpi\sin^2\psi + \cos^2\varpi = \sin^2\varpi + \cos^2\varpi = 1, \\ \Delta_1^{-2}\psi = \varphi^2\sin^2\varpi\sin^2\psi + \varphi^2\sin^2\varpi\cos^2\psi = \varphi^2\sin^2\varpi(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = \varphi^2\sin^2\varpi, \\ \Delta_1^{-2}\varpi = \varphi^2\cos^2\varpi\cos^2\psi + \varphi^2\cos^2\varpi\sin^2\psi + \varphi^2\sin^2\varpi = \varphi^2(\cos^2\varpi + \sin^2\varpi) = \varphi^2, \end{cases}$$

c'est-à-dire précisément les inverses des valeurs précédentes (α); soit, quant au premier procédé, en partant des formules de transformation inverses de ces mêmes équations (34bis), transcrites avec les mêmes notations, savoir :

$$(\gamma)\qquad \varphi^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{tang}^2\varpi = \frac{x^2+y^2}{z^2},$$

et invoquant alors simplement les valeurs de définition des trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, qui appelleront dans ce cas les transformations suivantes.

Remarquant tout d'abord que ces dernières équations donneront

$$(\delta)\quad \begin{cases} \cos^2\psi = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 = z^2\operatorname{tang}^2\varpi, \quad \varphi^2 = z^2(\operatorname{tang}^2\varpi+1) = \dfrac{z^2}{\cos^2\varpi}, \\ \text{d'où} \\ z^2 = \varphi^2\cos^2\varpi, \quad x^2 + y^2 = z^2.\operatorname{tang}^2\varpi = \varphi^2\cos^2\varpi.\operatorname{tg}^2\varpi = \varphi^2\sin^2\varpi, \end{cases}$$

donnera pour la valeur de λ, exprimée par l'équation (35),

$$\Delta_2\lambda = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\lambda}{d\omega^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\left(\sin\theta\frac{d\lambda}{d\theta}\right)}{d\theta}\right];$$

et dès lors l'équation $\Delta_2\lambda = 0$ (en désignant exceptionnellement dans ce calcul par λ le paramètre thermométrique lui-même, afin d'éviter la confusion avec la coordonnée sphérique θ) sera, en multipliant par $r^2 \sin^2\theta$,

$$\frac{d^2\lambda}{d\omega^2} + \sin\theta\frac{d\left(\sin\theta\frac{d\lambda}{d\theta}\right)}{d\theta} = 0. \tag{36}$$

---

puis différentiant successivement en x, y, z ces mêmes équations (γ), ce qui donnera

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi\frac{d\varphi}{dx} = x, & \varphi\frac{d\varphi}{dy} = y, & \varphi\frac{d\varphi}{dz} = z, \\ \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{d\psi}{dx} = -\frac{y}{x^2}, & \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{x}, & \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{d\psi}{dz} = 0, \\ \frac{\text{tang}\,\varpi}{\cos^2\varpi}\frac{d\varpi}{dx} = \frac{x}{z^2}, & \frac{\text{tang}\,\varpi}{\cos^2\varpi}\frac{d\varpi}{dy} = \frac{y}{z^2}, & \frac{\text{tang}\,\varpi}{\cos^2\varpi}\frac{d\varpi}{dz} = -\frac{x^2+y^2}{z^3}, \end{array}\right.$$

on trouvera dès lors, en élevant au carré, et ajoutant dans chaque ligne,

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi^2\Delta_1^2\varphi = x^2 + y^2 + z^2, \\ \frac{1}{\cos^4\psi}\Delta_1^2\psi = \frac{1}{x^2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right] = \frac{1}{x^2}\frac{x^2+y^2}{x^2}, \\ \frac{\text{tang}^2\varpi}{\cos^4\varpi}\Delta_1^2\varpi = \frac{1}{z^2}\left[\frac{x^2+y^2}{z^2} + \left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)^2\right] = \frac{1}{z^2}(\text{tang}^2\varpi + \text{tang}^4\varpi), \end{array}\right.$$

et enfin, en tenant compte des équations ci-dessus (γ) et (δ),

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi^2\Delta_1^2\varphi = \varphi^2, \quad \text{ou} \quad \Delta_1^2\varphi = 1, \\ \Delta_1^2\psi = \frac{1}{x^2}\frac{x^2+y^2}{x^2}\cos^4\psi = \frac{1}{x^2}\frac{x^2+y^2}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varphi^2\sin^2\varpi}, \\ \Delta_1^2\varpi = \frac{\cos^4\varpi}{z^2}(1+\text{tang}^2\varpi) = \frac{\cos^4\varpi}{\varphi^2\cos^2\varpi}\frac{1}{\cos^2\varpi} = \frac{1}{\varphi^2}, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire de nouveau les valeurs précédentes (α) qu'il s'agissait d'établir, et desquelles l'on conclura comme tout à l'heure la même formule demandée (35bis).

Sous cette forme, on aperçoit immédiatement que, si l'on adopte à la place de la variable θ la fonction χ de cette variable définie par l'équation

$$(37) \qquad d\chi = \frac{d\theta}{\sin\theta} \qquad \text{ou} \qquad \chi = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta,$$

cette même équation deviendra simplement

$$(38) \qquad \frac{d^2\lambda}{d\omega^2} + \frac{d\left(\frac{d\lambda}{d\chi}\right)}{d\chi} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\lambda}{d\omega^2} + \frac{d^2\lambda}{d\chi^2} = 0, \quad (^*)$$

et admettra par suite pour intégrale, comme l'équation ci-dessus (33) relative aux cylindres, l'équation

$$(39) \qquad \lambda = f_1(\omega + \chi i) + f_2(\omega - \chi i),$$

d'où l'on pourra déduire autant de solutions particulières du problème que l'on voudra, satisfaisant chacune à deux conditions arbitrairement données, relativement à la section des différentes surfaces composant la famille par un même plan azimutal ($\omega = 0$, par exemple), et à leurs plans tangents correspondant à cette section (**).

(*) En supposant même que l'idée si simple et si naturelle de ce changement de variable ne se fût pas présentée de prime abord à l'esprit, on eût encore été conduit au même résultat par voie de méthode générale, en appliquant à l'équation (36) le procédé classique d'Euler pour la transformation des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (Voir Euler, *Institutiones calculi integralis*, t. III, pp. 258 et sequ., ou Jordan, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. III, § 273, pp. 351-352.)

(**) On pourra, par exemple, s'imposer les deux conditions, que pour cette section par le plan-origine des azimuts ou des xz, l'angle θ compris entre l'axe des z et l'une des génératrices correspondantes soit d'une part une fonction arbitrairement donnée du paramètre $f(\lambda)$, c'est-à-dire que l'on ait, pour $\omega = 0$,

$$(\alpha) \qquad \theta_0 = f(\lambda), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\theta_0}{d\lambda} = f'(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)_0 = \frac{d\lambda}{d\theta_0} = \frac{1}{f'(\lambda)},$$

ou en résolvant par rapport à λ, puis remplaçant θ_0 par sa valeur en fonction de χ_0, tirée de l'équation de définition (37),

$$(\beta) \qquad \lambda = F(\theta_0) = F(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\chi_0}) = F_1(\chi_0);$$

Or, revenons maintenant aux coordonnées planes, et dans ce but récrivons tout d'abord cette dernière équation sous la forme équivalente

$$(40)\qquad \lambda = F_1\left[\operatorname{tg}(\omega + \chi i)\right] + F_2\left[\operatorname{tg}(\omega - \chi i)\right],$$

---

et, d'autre part, que le plan tangent correspondant, qui contient déjà la génératrice, contienne en outre une autre direction (Ω, Θ) arbitrairement donnée en fonction de λ, condition qui le détermine dès lors complètement, et sera exprimée analytiquement par l'équation

$$(\gamma)\qquad \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)_0 \sin\Theta\cos\Omega + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)_0 \sin\Theta\sin\Omega + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)_0 \cos\Theta = 0.$$

Or, si l'on se reporte aux formules classiques qui donnent l'expression des dérivées $\frac{\lambda}{x}, \frac{\lambda}{y}, \frac{\lambda}{z}$ en fonction des coordonnées sphériques r, ω, θ et des dérivées relatives à ces coordonnées (voir, si l'on veut, SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t I, § 90, formules (4), p. 223), et qui se réduiront dans le cas actuel, en raison de ce que l'on a par hypothèse $\frac{d\lambda}{dr} = 0$, à celles-ci

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx} &= \frac{1}{r}\left[\frac{d\lambda}{d\theta}\cos\theta\cos\omega - \frac{d\lambda}{d\omega}\frac{\sin\omega}{\sin\theta}\right],\\ \frac{d\lambda}{dy} &= \frac{1}{r}\left[\frac{d\lambda}{d\theta}\cos\theta\sin\omega + \frac{d\lambda}{d\omega}\frac{\cos\omega}{\sin\theta}\right],\end{aligned}\right. \qquad \frac{d\lambda}{dz} = -\frac{1}{r}\frac{d\lambda}{d\theta}\sin\theta,$$

on voit que la condition précédente (γ), relative à la section $\omega = 0$, sera, étant exprimée en coordonnées sphériques,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)_0 \cos\theta_0 . \sin\Theta\cos\Omega + \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)_0 \frac{1}{\sin\theta_0} . \sin\Theta\sin\Omega - \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)_0 \sin\theta_0 . \cos\Theta = 0;$$

et, dès lors, si l'on y remplace à la fois Θ et Ω par leurs valeurs données en fonction de λ, ainsi que θ_0 et $\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)_0$ par leurs valeurs ci-dessus également données (α), on voit que cette équation étant alors résolue par rapport à $\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)_0$, fournira une valeur déterminée en λ, qu'on pourra ensuite exprimer en fonction de χ_0 à l'aide de la valeur (6), soit :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right)_0 = \Phi(\lambda) = \Phi\left[F_1(\chi_0)\right] = F_2(\chi_0).$$

En résumé donc, les conditions imposées (α) et (γ) équivaudront à celle-ci, que, pour $\omega = 0$, λ et $\frac{d\lambda}{d\omega}$ se réduisent à deux fonctions données $F_1(\chi)$ et $F_2(\chi)$. Or la discussion du problème des Cordes Vibrantes nous a appris que l'intégrale générale (39) permettait toujours de satisfaire à ces deux conditions, et nous enseigne le procédé à suivre pour déterminer, par leur moyen, les deux fonctions arbitraires f_1 et f_2, qui y figurent.

car il est bien clair que, f et F étant deux fonctions arbitraires, les deux symboles $f(\alpha) = f(\text{arc tg}\,[\text{tg}\,\alpha])$ et $F\,[\text{tg}\,\alpha]$ ont exactement la même signification et la même étendue, et désignons, pour simplifier par u et v les deux expressions imaginaires conjuguées

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \text{tang}\,(\omega + \chi i) = \frac{\text{tg}\,\omega + \text{tg}\,\chi i}{1 - \text{tg}\,\omega\,\text{tg}\,\chi i}, \\ v &= \text{tang}\,(\omega - \chi i) = \frac{\text{tg}\,\omega - \text{tg}\,\chi i}{1 + \text{tg}\,\omega\,\text{tg}\,\chi i}. \end{aligned}\right.$$

Or, ayant en général, quel que soit χ,

$$\text{tang}\,\chi i = \frac{\sin \chi i}{\cos \chi i} = \frac{\frac{i}{2}(e^{\chi} - e^{-\chi})}{\frac{1}{2}(e^{\chi} + e^{-\chi})} = i\,\frac{e^{2\chi} - 1}{e^{2\chi} + 1},$$

et d'ailleurs, dans le cas particulier, par suite de la valeur (37),

$$\chi = \log \text{tg}\,\frac{1}{2}\theta = \log \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right),$$

d'où

$$e^{2\chi} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{2\chi} - 1}{e^{2\chi} + 1} = -\cos\theta,$$

nous aurons donc simplement dans la question actuelle

$$\text{tang}\,\chi i = -\,i\cos\theta,$$

et par suite, en substituant dans la valeur (41) de u, et revenant après cela aux coordonnées rectilignes,

$$u = \frac{\text{tg}\,\omega - i\cos\theta}{1 + \text{tg}\,\omega\,.\,i\cos\theta} = \frac{\frac{y}{x} - i\frac{z}{r}}{1 + \frac{y}{x}\cdot i\frac{z}{r}} = \frac{ry - izx}{rx + izy}$$

$$= \frac{(ry - izx)(rx - izy)}{(rx + izy)(rx - izy)} = \frac{(r^2 - z^2)\,xy - irz\,(x^2 + y^2)}{r^2x^2 + z^2y^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(xy - irz)}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)} = \frac{xy - irz}{x^2 + z^2};$$

Par conséquent, les deux expressions conjuguées (41) de u et v seront, en coordonnées rectilignes,

$$(42)\qquad u = \frac{xy - irz}{x^2 + z^2}, \qquad v = \frac{xy + irz}{x^2 + z^2},$$

et en les substituant dès lors, à la place de leurs valeurs (41), dans notre intégrale générale (40) de l'équation $\Delta_2\lambda = 0$, c'est-à-dire dans l'équation

$$(42^{bis})\qquad \lambda = F_1(u) + F_2(v),$$

celle-ci deviendra définitivement

$$(43)\qquad \lambda = F_1\left(\frac{xy - irz}{x^2 + z^2}\right) + F_2\left(\frac{xy + irz}{x^2 + z^2}\right),$$

et fournira, pour chaque choix particulier des fonctions arbitraires F_1 et F_2, une double solution du problème; car, en supposant, dans ces conditions, le second membre ramené à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, il est clair que les deux fonctions P et Q vérifieront alors séparément l'équation $\Delta_2\lambda = 0$, en vertu de la définition même des quantités imaginaires, et pourront être adoptées dès lors indifféremment pour expression de λ (*).

(*) Le sens et le mode d'emploi de cette formule seront donc alors exactement les mêmes que pour toutes celles que donne Cauchy dans ses *Exercices de Physique Mathématique* (notamment, t. I, pp. 10, 138, et 215), pour représenter ce qu'il appelle les *déplacements symboliques* d'un système de molécules (supposés définis également par un système d'équations aux dérivées partielles, exclusivement linéaires et homogènes, de même que l'équation actuelle $\Delta_2\lambda = 0$), c'est-à-dire qu'en posant suivant ses notations $\bar{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2\sqrt{-1}$, l'équation en question (43), fournissant par hypothèse pour expression *symbolique* du paramètre la valeur $\bar{\lambda} = P + Q\sqrt{-1}$, équivaudra dès lors à elle seule aux deux équations réelles $\lambda_1 = P$ et $\lambda_2 = Q$, qui fourniront en conséquence chacune une solution différente pour l'expression réelle du paramètre demandé. La présence de l'imaginaire i dans cette formule n'est donc nullement un obstacle à son emploi sûr et commode, non plus que dans les formules précédentes (34) et (39), pour la solution de tel problème particulier que l'on voudra, dans lequel la famille de surfaces cherchée sera astreinte à satisfaire, en outre de l'équation $\Delta_2\lambda = 0$, à deux conditions données, ainsi que nous l'avons fait pour l'équation (39) dans la seconde note de la page 44.

Il est facile d'ailleurs de s'assurer directement que les deux fonctions P et Q ci-dessus définies satisferont séparément à l'équation proposée $\Delta_2\lambda = 0$ (ce qui équivaut à vérifier *a posteriori* les résultats analytiques que nous avons obtenus pour solutions), en procédant pour cette dernière formule (43) de la façon que nous allons indiquer, car pour les deux autres ce calcul est tellement simple qu'il n'y a pas lieu de nous y arrêter.

Telle est donc assurément l'équation la plus générale en coordonnées rectilignes des familles isothermes de surfaces coniques,

---

L'expression (43) ou (42bis) donnant, étant différentiée par rapport à une variable quelconque α,

$$\frac{\lambda}{\alpha} = F'_1 \cdot \frac{u}{\alpha} + F'_2 \cdot \frac{v}{\alpha}, \qquad \frac{\lambda^2}{\alpha^2} = F''_1 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + F'_1 \cdot \frac{u^2}{\alpha^2} + F''_2 \left(\frac{v}{\alpha}\right)^2 + F'_2 \cdot \frac{v^2}{\alpha^2},$$

on déduira de la seconde égalité, en faisant successivement $\alpha = x, y, z$, et ajoutant,

$$\Delta_2 \lambda = F''_1 \cdot \Delta_1^2 u + F'_1 \cdot \Delta_2 u + F''_2 \cdot \Delta_1^2 v + F'_2 \cdot \Delta_2 v,$$

et par conséquent il n'y aura qu'à s'assurer que les deux expressions (42) de u et v vérifient séparément les deux couples de conditions

$$\Delta_1^2 u = 0, \qquad \Delta_2 u = 0, \qquad \text{et} \qquad \Delta_1^2 v = 0, \qquad \Delta_2 v = 0;$$

c'est-à-dire, comme u et v sont deux imaginaires conjuguées $A \pm Bi$, qui donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta_1^2 (A \pm Bi) = \Delta_1^2 A - \Delta_1^2 B \pm 2i \left(\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy} + \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dz}\right), \\ &\Delta_2 (A \pm Bi) = \Delta_2 A \pm i \Delta_2 B, \end{aligned}\right.$$

que, pour les expressions (42) de u et v, les quantités A et B vérifient bien les quatre conditions

$$(\alpha) \quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1^2 A - \Delta_1^2 B = 0, \qquad \Delta_2 A = 0, \qquad \Delta_2 B = 0, \\ &\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy} + \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dz} = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour procéder à cette vérification, qui serait extrêmement pénible, soit avec les coordonnées sphériques, soit avec les coordonnées rectilignes, que nous avons successivement employées dans la question, la voie la plus facile consistera, en raison du dénominateur commun de ces expressions (42), à adopter un système de coordonnées cylindriques, en conservant la coordonnée y, et substituant dans le plan des zx, à x et à z, deux coordonnées polaires, en posant $x = \rho \cos \varphi$, et $z = \rho \sin \varphi$, système dans lequel on aura, pour les expressions des dérivées et des deux invariants Δ_1 et Δ_2 d'une fonction de point quelconque V, les formules classiques que l'on trouve dans tous les traités d'Analyse (voir par exemple Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. I, § 91, form. (2) et (6), pp. 127 et 128),

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\rho}\cos\varphi - \frac{dV}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}, \qquad \frac{dV}{dz} = \frac{dV}{d\rho}\sin\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}, \\ &\Delta_1^2 V = \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2, \qquad \Delta_2 V = \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right)}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\varphi^2}. \end{aligned}\right.$$

laquelle donne lieu à un paradoxe, dont le besoin de solution fera bien ressortir la nécessité des développements complémentaires que nous nous proposons d'apporter à la théorie de Lamé. En effet, il semble à première vue qu'elle ne doive renfermer que des surfaces de degré pair seulement, car le dénominateur commun des

---

Or les expressions (42) de u et v, étant transformées dans le même système, les deux quantités A et B et leurs dérivées premières prendront alors les valeurs

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned} &A=\frac{y\cos\varphi}{\rho}, \quad \frac{dA}{dy}=\frac{\cos\varphi}{\rho}, \quad \frac{dA}{d\rho}=-\frac{y\cos\varphi}{\rho^2}, \quad \frac{dA}{d\varphi}=-\frac{y\sin\varphi}{\rho},\\ &B=\frac{\sin\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho}, \quad \frac{dB}{dy}=\frac{y\sin\varphi}{\rho\sqrt{y^2+\rho^2}}, \quad \frac{dB}{d\rho}=-\frac{y^2\sin\varphi}{\rho^2\sqrt{y^2+\rho^2}}, \quad \frac{dB}{d\varphi}=\frac{\cos\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho},\end{aligned}\right.$$

et donneront dès lors séparément, en vertu des formules précédentes (6),

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_1^2 A &= \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}+\frac{y^2\cos^2\varphi}{\rho^4}+\frac{1}{\rho^2}\frac{y^2\sin^2\varphi}{\rho^2}=\frac{1}{\rho^2}\left(\cos^2\varphi+\frac{y^2}{\rho^2}\right),\\ \Delta_1^2 B &= \frac{y^2\sin^2\varphi}{\rho^2(y^2+\rho^2)}+\frac{y^4\sin^2\varphi}{\rho^4(y^2+\rho^2)}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\cos^2\varphi(y^2+\rho^2)}{\rho^2}\\ &= \frac{1}{\rho^4(y^2+\rho^2)}\left[\rho^2y^2\sin^2\varphi+y^4\sin^2\varphi+\cos^2\varphi(y^4+\rho^4+2y^2\rho^2)\right]\\ &= \frac{y^4+\rho^4\cos^2\varphi+\rho^2y^2+\rho^2y^2\cos^2\varphi}{\rho^4(y^2+\rho^2)}=\frac{y^2(y^2+\rho^2)+\rho^2\cos^2\varphi(\rho^2+y^2)}{\rho^4(y^2+\rho^2)}\\ &= \frac{1}{\rho^4}(y^2+\rho^2\cos^2\varphi)=\frac{1}{\rho^2}\left(\cos^2\varphi+\frac{y^2}{\rho^2}\right)=\Delta_1^2 A,\end{aligned}\right.$$

d'où, en premier lieu, déjà

$$\Delta_1^2 A-\Delta_1^2 B=0.$$

Semblablement, on aura pour les dérivées secondes

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2A}{dy^2}=0, \quad \rho\frac{dA}{d\rho}=-\frac{y\cos\varphi}{\rho}, \quad \frac{d\left(\rho\frac{dA}{d\rho}\right)}{d\rho}=\frac{y\cos\varphi}{\rho^2}, \quad \frac{d^2A}{d\varphi^2}=-\frac{y\cos\varphi}{\rho},\\ &\frac{d^2B}{dy^2}=\frac{\rho\sin\varphi}{(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho\frac{dB}{d\rho}=-\frac{y^2\sin\varphi}{\rho\sqrt{y^2+\rho^2}}, \quad \frac{d\left(\rho\frac{dB}{d\rho}\right)}{d\rho}=\frac{y^2\sin\varphi(y^2+2\rho^2)}{\rho^2(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2B}{d\varphi^2}=-\frac{\sin\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho},\end{aligned}\right.$$

arguments de l'une et l'autre des fonctions arbitraires n'étant pas décomposable en facteurs réels, et les deux termes de chacune de ces fractions étant de degré pair, aucune combinaison algébrique de ces arguments, si l'on fait ensuite disparaître les radicaux introduits par la fonction $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ne pourra

---

d'où l'on conclura, par la dernière formule ci-dessus (6) :

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta_2 A &= \frac{1}{\rho}\frac{y\cos\varphi}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{y\cos\varphi}{\rho} = 0,\\
\Delta_2 B &= \frac{\rho\sin\varphi}{(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\rho}\frac{y^2\sin\varphi(y^2+2\rho^2)}{\rho^2(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\sin\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho}\\
&= \frac{\sin\varphi}{\rho^3(y^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\rho^4 + y^4 + 2\rho^2y^2 - (y^2+\rho^2)^2\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

Enfin, pour la dernière condition, les deux premières formules (6) donnant

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dz} &= \left(\frac{dA}{d\rho}\cos\varphi - \frac{dA}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\left(\frac{dB}{d\rho}\cos\varphi - \frac{dB}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\\
&\quad + \left(\frac{dA}{d\rho}\sin\varphi + \frac{dA}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\left(\frac{dB}{d\rho}\sin\varphi + \frac{dB}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\\
&= \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\rho}\cos^2\varphi - \left(\frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\rho} + \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\varphi}\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\\
&\quad + \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\rho}\sin^2\varphi + \left(\frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\rho} + \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\varphi}\right)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + \frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\\
&= \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\varphi},
\end{aligned}\right.$$

on aura donc de nouveau, avec les dérivées premières (γ),

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dx}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy} + \frac{dA}{dz}\frac{dB}{dz} &= \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dy} + \frac{dA}{d\rho}\frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{dA}{d\varphi}\frac{dB}{d\varphi}\\
= \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\frac{y\sin\varphi}{\rho\sqrt{y^2+\rho^2}} &+ \frac{y\cos\varphi}{\rho^2}\,\frac{y^2\sin\varphi}{\rho^2\sqrt{y^2+\rho^2}} - \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\cos\varphi\sqrt{y^2+\rho^2}}{\rho}\\
&= \frac{y\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2\sqrt{y^2+\rho^2}}\left[1 + \frac{y^2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}(y^2+\rho^2)\right] = 0,
\end{aligned}$$

donner définitivement une équation réelle de degré impair en x, y et z. Et ce fait, d'un énoncé si précis, constituerait évidemment, s'il était confirmé, un résultat majeur pour la théorie des familles isothermes de cônes algébriques ; mais il se trouve démenti presque aussitôt, comme on va le voir, par un simple coup d'œil rétrospectif jeté sur l'équation aux dérivées partielles (38), qui nous a servi de point de départ.

En effet, lorsque l'on considère l'équation $\Delta_2\lambda = 0$ sous cette forme (38), il est deux solutions très simples, en quelque sorte parallèles, qui s'offrent immédiatement à l'esprit, savoir

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = A\omega + B = A \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + B, \quad \text{ou} \quad \dfrac{y}{x} = \operatorname{tang}(a\lambda + b), \\ \text{et} \\ \lambda = A\chi + B = A \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta + B = A \log\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + B, \ (*) \end{array}\right.$$

c'est-à-dire la famille des plans azimutaux, et celle des cônes de révolution, du système des coordonnées sphériques, solutions dont la première, consistant en une équation homogène en x, y, z, doit évidemment être envisagée comme définissant une famille de surfaces coniques : or l'on voit qu'elle est exprimée par une équation réelle de degré impair en x, y, z, sans que l'on s'explique néanmoins comment elle peut être comprise dans l'intégrale générale (43), ou, en d'autres termes, sans que l'on aperçoive comment on pourra déterminer deux fonctions F_1 et F_2, capables

---

et par conséquent les quatre conditions (α), qu'il s'agissait de vérifier dans le cas actuel, sont bien satisfaites simultanément pour les valeurs de A et B relatives aux expressions proposées (42) : résultat qui confirme pleinement *a posteriori* l'exactitude de la double solution fournie comme nous l'avons expliqué, par notre équation trouvée ci-dessus (43).

(*) Tel est bien en effet le résultat auquel on parviendra, en appliquant à la famille des cônes $\frac{x^2+y^2}{z^2} = \operatorname{tang}^2\theta$ le procédé de Lamé que nous avons exposé un peu plus haut, pour la détermination du paramètre thermométrique d'une famille isotherme de surfaces. Mais si l'on veut s'en assurer en effectuant ce calcul, il faudra se rappeler, qu'en vue de conserver à la coordonnée sphérique θ son symbole habituel, nous avons étendu dans la question actuelle au paramètre thermométrique le symbole λ, dont nous avions fait usage exclusivement, dans la théorie générale exposée ci-dessus, pour représenter un paramètre géométrique.

de procurer l'identification de la forme (43) avec cette seconde forme de la première équation (44).

Cette apparente contradiction provient de ce que la propriété, que nous avons reconnue tout à l'heure à la forme d'équation (43), n'appartient qu'aux équations correspondant à une *expression algébrique* de λ, fournie par cette même équation, tandis qu'en raison du changement possible du paramètre dans l'équation de la famille de surfaces, c'est-à-dire de la substitution, à la place du paramètre thermométrique, d'une fonction arbitrairement choisie (algébrique ou transcendante) de ce paramètre (fonction qui constituera dès lors un nouveau paramètre auquel Lamé donne le nom de *géométrique*), les familles algébriques, qui satisfont à la condition d'isothermie, pourront fort bien n'être pas exclusivement fournies par les expressions de λ de forme algébrique provenant de la formule (43) : ou, en d'autres termes, il pourra arriver qu'une valeur transcendante de λ empruntée à cette formule fournisse néanmoins une famille de surfaces algébriques. C'est ce qui a lieu notamment pour les deux solutions simples (44) signalées tout à l'heure, qui, tout transcendantes qu'elles sont relativement à λ, correspondent cependant à deux familles algébriques, savoir, les plans, et les cônes de révolution, représentés par les équations

$$\frac{y}{x} = \tang \omega, \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \tang^2 \theta;$$

et l'on en aurait un second exemple plus étendu en considérant, ainsi que nous allons le dire à l'instant, pour le cas général, à la place des cônes de révolution, la famille de cônes homofocaux

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 0,$$

et recherchant l'expression de son paramètre thermométrique par le procédé que nous avons indiqué d'après Lamé.

En se plaçant à ce nouveau point de vue, et se reportant aux calculs qui nous ont conduit à cette forme d'intégrale (43), on aperçoit de suite qu'il suffira, pour retrouver la forme en ques-

tion (44), de prendre, pour les deux fonctions F_1 et F_2 qui figurent dans cette équation (43) ou (42bis), celles définies par les égalités

$$F_1(\alpha) = F_2(\alpha) = \frac{1}{2}(A \operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha + B),$$

car l'équation (42bis) deviendra, avec ce choix particulier de fonctions,

$$\lambda = \frac{1}{2} A (\operatorname{arc} \operatorname{tg} u + \operatorname{arc} \operatorname{tg} v) + B,$$

ou ce qui est la même chose, en tenant compte des définitions (41) de u et v,

$$\lambda = \frac{1}{2} A(\omega + \chi i + \omega - \chi i) + B = A\omega + B = A \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + B.$$

Mais, si l'on est ainsi conduit tout naturellement à cette détermination par les considérations mêmes qui nous avaient amené à cette forme d'intégrale (43), il en eût été tout autrement si, faisant abstraction en pensée de ces mêmes considérations, l'on se fût trouvé de prime abord en présence de cette même intégrale générale, et il y a beaucoup de chance dans cette hypothèse pour que l'on n'eût pas aperçu alors que ce type (44) y était réellement compris, ou du moins on eût été fort embarrassé de décider la question d'après la seule connaissance de ce même type d'équation, et en ne s'inspirant d'aucune autre considération théorique.

Une remarque toute semblable s'offrira, pour le cas général, à propos de l'intégrale générale de l'équation $\Delta_2\theta = 0$, que l'on peut déduire immédiatement en faisant $u = \theta$, $t = z$, $a = i = \sqrt{-1}$, $z = 0$, de celle de l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

donnée par Poisson, pour la théorie des Petits Mouvements d'un

Gaz, ou de la Propagation du Son (*), sous la forme simple et remarquable

$$u = \frac{1}{4\pi} \mathbf{S}\, F_1(x + at\cos\alpha, y + at\cos 6, z + at\cos\gamma)\, td\omega$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt} \mathbf{S}\, F_2(x + at\cos\alpha, y + at\cos 6, z + at\cos\gamma)\, td\omega,$$

($\mathbf{S}$ indiquant une somme étendue à tous les éléments ω d'une surface sphérique de rayon 1, situés chacun par hypothèse sur la direction (α, 6, γ)), solution qui sera par conséquent, pour le problème qui nous occupe, en opérant le changement de notation que nous venons de dire, et faisant dès lors la sommation $\mathbf{S}$ dans le plan seul des xy et non plus dans l'espace,

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(x + iz\cos\alpha, y + iz\sin\alpha)\, zd\alpha \\ & + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz} \int_0^{2\pi} F_2(x + iz\cos\alpha, y + iz\sin\alpha)\, zd\alpha. \end{aligned} \right.$$

Cette formule, qui, comme les précédentes (34), (39), et (43), fournira encore une double solution du problème pour chaque choix particulier des fonctions F_1 et F_2 (**), procurera bien également, ainsi qu'elles, le moyen d'obtenir autant que l'on voudra de solutions de forme algébrique, satisfaisant chacune à deux conditions arbitrairement données à l'avance, ainsi que nous l'avons expliqué à propos du cas précédent (***), si les deux

(*) Voir, si l'on veut, pour la détermination de cette intégrale, DUHAMEL, *Cours de Mécanique*, t. II, § 217, notamment formule (4), pp. 349-350; ou JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. III, § 294, pp. 378-382; ou encore DUHAMEL, *Éléments de Calcul infinitésimal*, t. II, § 157 (1re édit., pp. 223-226.)

(**) Voir le premier alinéa de la note de la page 47.

(***) On pourra cette fois s'imposer, entre autres, les deux conditions :

1° Que la section de la famille de surfaces par un plan fixe (le plan xy par exemple) soit une famille de courbes arbitrairement donnée, c'est-à-dire que l'on ait pour $z = 0$

$$(\alpha) \quad \theta_0 = f_1(x, y), \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0 = \frac{d\theta_0}{dx} = \frac{df_1(x, y)}{dx}, \quad \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0 = \frac{d\theta_0}{dy} = \frac{df_1(x, y)}{dy};$$

fonctions arbitraires F_1 et F_2 ainsi déterminées sont deux fonctions algébriques telles, que la quadrature relative à α n'introduise les variables x, y, z, c'est-à-dire les coefficients de la variable d'intégration, que sous forme simplement algébrique; mais rien n'indique que l'on pourra obtenir ainsi la totalité des familles isothermes de surfaces algébriques.

Et, en effet, ce n'est point à une expression algébrique du paramètre thermométrique θ, que correspond, par exemple, la solution remarquable du problème, trouvée par Lamé, pour les surfaces du second ordre, mais à la valeur transcendante fort compliquée

$$(46) \qquad \theta = \text{Arg sin am}\, \rho = \int_0^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2\rho^2)}},$$

où ρ^2 désigne la racine de l'équation du troisième degré

$$(47) \quad k^2h^2(\rho^2)^3 - \left[x^2+y^2+z^2-(1+k^2)h^2\right](\rho^2)^2 + (1+k^2)(x^2+y^2)\rho^2 - x^2 = 0;$$

car tel serait bien le résultat que l'on obtiendrait, en supposant

---

2° Que pour chacune des surfaces composant la famille, et en chaque point (x, y) de cette même section, le plan tangent ait une orientation déterminée, c'est-à-dire soit normal à une certaine direction (α, β, γ), donnée arbitrairement en fonction de x, y et θ_0, condition qui le définit dès lors complètement, et qui s'exprimera analytiquement par l'équation

$$(\beta) \qquad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0 \cos\beta + \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0 \cos\gamma = 0.$$

Or, si l'on remet dans cette équation, d'abord à la place de $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0$ et $\left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0$ leurs valeurs (α), puis au lieu de cos α. cos β, cos γ leurs valeurs données en x, y, et θ_0, et enfin, cela fait, à la place de θ_0 lui-même sa valeur donnée (α), on voit que cette même équation (β) fournira alors pour $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0$ une valeur également déterminée, $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0 = f_2(x, y)$, en sorte que les deux conditions géométriques proposées équivaudront en définitive à ces deux conditions analytiques, que, pour $z = 0$, θ et $\frac{d\theta}{dz}$ se réduisent simultanément aux deux fonctions données $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$. — Or, l'expression (45) de θ étant précisément composée de telle façon (voir DUHAMEL, *Éléments de Calcul infinitésimal*, t. II, § 157, pp. 223-226) que pour $z = 0$, elle se réduise, ainsi que sa dérivée $\frac{d\theta}{dz}$, respectivement aux deux fonctions $F_2(x, y)$ et $F_1(x, y)$, on voit ainsi qu'il suffira, pour satisfaire à la question, d'adopter dans cette même expression (45), pour les deux fonctions arbitraires F_2 et F_1, précisément les deux fonctions déterminées f_1 et f_2 que nous venons de spécifier.

résolue par rapport à θ l'équation des surfaces homofocales

$$(48)\qquad \frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\theta}-\frac{y^2}{\operatorname{cn}^2\theta}-\frac{z^2}{\frac{1}{k^2}\operatorname{dn}^2\theta}=k^2,$$

que nous démontrerons dans ce Chapitre constituer la solution la plus générale du problème pour les surfaces du second ordre.

La considération exclusive des expressions de forme algébrique fournies par la formule (45) ne procurera donc en réalité aucune indication utile sur l'étendue et la nature des véritables solutions algébriques du problème, c'est-à-dire sur celles des surfaces algébriques capables de former des familles isothermes. Et il est hors de doute que la belle découverte de Lamé, que nous venons de rappeler, lui eût échappé, s'il eût borné son attention à la seule équation aux dérivées partielles précitée, et à son intégrale générale obtenue d'une façon quelconque.

En outre, il y aura lieu de se demander si la solution (46) et (47), ou (48), est bien, en réalité, renfermée dans l'intégrale générale (45), ou si elle ne constitue pas une solution singulière de l'équation $\Delta_2\theta = 0$ (*), car, sauf les solutions particulières évidentes

$$\theta = Ax + a,\qquad \theta = By + b,\qquad \theta = Cz + c,$$

ou celle, un peu moins restreinte, qui en découle par voie de conséquence immédiate

$$(49)\qquad \theta = f(\lambda) = Ax + By + Cz + D,$$

c'est-à-dire une famille de plans parallèles, solutions complètement analogues aux solutions simples (44), rencontrées pour le

(*) On pourrait induire quelque présomption de vraisemblance en faveur de cette supposition de ce fait remarquable, que nous démontrons dans la suite (et qui n'a peut-être pas encore été signalé), à savoir que c'est pour la *seule* valeur $m = 2$ que le type d'équation $\frac{x^m}{a+\lambda}+\frac{y^m}{b+\lambda}+\frac{z^m}{c+\lambda}=1$ peut fournir une famille de surfaces isothermes, en sorte que l'équation des surfaces homofocales du second ordre constitue en réalité, au point de vue de l'isothermie, un type entièrement isolé dans l'échelle des différents degrés.

cas particulier précédemment examiné (et qui sont fournies évidemment par la formule (45) en prenant pour les fonctions F_1 et F_2 respectivement une constante et une fonction linéaire) (*), aucun moyen simple et sûr ne permet d'apercevoir le choix particulier qu'il faudrait faire pour les fonctions arbitraires F_1 et F_2, pour pouvoir tirer de l'intégrale générale (45), soit la solution particulière (46) et (47), soit l'expression du paramètre θ correspondant à toute autre famille isotherme supposée donnée en particulier, ce qui réduit par suite à fort peu de chose les services que nous pouvons attendre ici de cette formule intégrale (45).

Nous n'avons envisagé dans les considérations qui précèdent, pour la recherche des familles isothermes, que l'intégrale générale de l'équation de l'équilibre de température $\Delta_2\theta = 0$, et non celle de l'équation aux dérivées partielles de forme plus générale (29). Celle-ci, en effet, outre qu'elle sera dans tous les cas beaucoup plus difficile à obtenir, en raison des termes non linéaires contenus dans cette équation (22), ne pourra très probablement jamais être fournie par aucune méthode, qu'à la condition de supposer particularisée à l'avance la fonction arbitraire $\Psi(\lambda)$, qui entre dans cette équation (29), et dès lors cette même forme d'équation perdant ainsi le seul avantage de généralité qu'elle possédait sur l'équation $\Delta_2\theta = 0$, et étant notablement plus compliquée par ailleurs, sera encore beaucoup moins propre qu'elle à l'étude de la question envisagée sous cet aspect.

Il est donc indispensable de reprendre à nouveau le problème, en l'abordant cette fois directement, tel qu'il se présente dans la pratique, c'est-à-dire de chercher un procédé qui permette de

---

(*) Ou, plus généralement, la solution $\theta = F(x, y, z)$, en désignant par $F(x, y, z)$ un polynôme entier de degré m, dont les coefficients sont supposés vérifier toutes les conditions, en nombre moindre évidemment, qui expriment que les coefficients de tous les différents termes en x, y, z du polynôme $\Delta_2 F(x, y, z)$ sont séparément nuls; car on reconnaît très aisément que la solution générale (45) donnera pour θ une expression de cette forme, en prenant simplement pour les fonctions arbitraires $F_1(x, y, z)$ et $F_2(x, y, z)$ deux polynômes entiers (à coefficients imaginaires) dont les degrés soient respectivement $(m-1)$ et m.

décider sûrement et commodément si telle catégorie, donnée comme l'on voudra, de surfaces algébriques peut constituer une famille isotherme, et, le cas échéant, de déterminer quels devront être pour cela les expressions de ses coefficients. — Tel sera l'objet auquel nous consacrerons le reste de ce Chapitre.

Méthode pour la recherche des familles isothermes composées de surfaces algébriques appartenant a une catégorie déterminée. — La méthode que nous avons indiquée, d'après Lamé, pour reconnaître si une famille de surfaces donnée réalise ou non la condition de l'isothermie, et qui consiste à proprement parler dans une simple vérification, présente le défaut de toutes les méthodes de déduction fondées sur des procédés purement différentiels, à savoir que ses conclusions sont limitées strictement au type particulier qui fait l'objet de la recherche, et ne font connaître en aucune façon s'il existe d'autres types, rentrant dans une même catégorie définie par la forme ou le degré de l'équation, qui réalisent également ce même caractère de l'isothermie. Ainsi, pour prendre l'exemple le plus saillant, pour les surfaces du second ordre, Lamé pose d'emblée le type des surfaces homofocales, et il établit très nettement et très rapidement, à l'aide de la vérification que nous reproduirons un peu plus loin, qu'une pareille famille de surfaces satisfait bien à la condition de l'isothermie, mais rien ne montre dans son raisonnement que ce type soit le seul, ni même le plus général, tandis qu'il serait intéressant de savoir s'il existe, en dehors de ce type, d'autres familles du second ordre réalisant également le caractère de l'isothermie. Aussi croyons-nous faire œuvre utile en présentant pour le même objet, une méthode d'induction rigoureuse, basée, elle au contraire, sur des procédés de calcul intégral, qui, bien que plus longue et plus pénible assurément, aura ce grand avantage de nous fournir en toute certitude la solution complète du problème de l'isothermie, relativement à une catégorie de surfaces déterminée, et nous permettra d'affirmer en particulier que, pour les surfaces du second ordre, le type signalé par Lamé est bien réellement le seul qui satisfasse à la question.

A cet effet, représentons par $\varphi(x, y, z, \lambda) = 0$, ou plus simplement par $\mathrm{A} = 0$, en faisant $\varphi(x, y, z, \lambda) = \mathrm{A}$, une équation de forme donnée en x, y, z, les coefficients étant supposés des fonctions indéterminées du paramètre λ. Il s'agit de savoir s'il est possible de déterminer ces coefficients de telle sorte que la famille de surfaces représentée par cette équation soit isotherme, et, le cas échéant, d'effectuer cette détermination.

Si nous conservons, dans ce but, notre notation habituelle pour les dérivées partielles relatives aux trois variables x, y, z, considérées seules comme indépendantes, et la notation usuelle avec la caractéristique ∂ pour les dérivées partielles relatives aux quatre variables x, y, z et λ, considérées simultanément comme indépendantes, en différentiant deux fois de suite par rapport à x l'équation proposée, et faisant, pour abréger,

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \lambda} = \mathrm{A}' \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \lambda^2} = \mathrm{A}'',$$

nous obtiendrons successivement, suivant une formule connue,

$$(50) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \mathrm{A}' \dfrac{\lambda}{x} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \dfrac{\lambda}{x} = -\dfrac{1}{\mathrm{A}'}\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial x}\dfrac{\lambda}{x} + \mathrm{A}''\left(\dfrac{\lambda}{x}\right)^2 + \mathrm{A}'\dfrac{\lambda^2}{x^2} = 0, \end{cases}$$

ou, en remettant dans cette équation à la place de $\frac{\lambda}{x}$ la valeur qui précède,

$$\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2} - \frac{2}{\mathrm{A}'}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial x} + \mathrm{A}''\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2 + \mathrm{A}'\frac{\lambda^2}{x^2} = 0;$$

d'où l'on conclura ensuite, en ajoutant les trois équations semblables, supposées écrites successivement pour x, y, z,

$$(51) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial z^2} - \dfrac{2}{\mathrm{A}'}\left(\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}\dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial z}\right) \\ \qquad + \mathrm{A}''.\Delta_1^2\lambda + \mathrm{A}'.\Delta_2\lambda = 0. \end{cases}$$

Or, si l'on suppose isotherme la famille de surfaces proposée, on devra avoir, en vertu de l'équation ci-dessus (28), en représentant par $T = -\Psi(\lambda)$ une fonction arbitraire du paramètre λ,

$$(52)\qquad \frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda} = -\Psi(\lambda) = T, \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2\lambda = T\Delta_1^2\lambda,$$

et, par suite, on aura dans le cas actuel

$$\begin{aligned} \Lambda''.\Delta_1^2\lambda + \Lambda'.\Delta_2\lambda &= (\Lambda'' + T\Lambda')\Delta_1^2\lambda \\ &= (\Lambda'' + T\Lambda').\frac{1}{\Lambda'^2}\left[\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2\right], \end{aligned}$$

en ayant égard à la valeur de $\Lambda_1^2\lambda$ que l'on déduit immédiatement de l'équation de droite (50). On obtient donc définitivement, en reportant cette dernière valeur dans l'équation (51), et multipliant en même temps par Λ'^2,

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Lambda'^2\left(\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2}\right) - 2\Lambda'\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\frac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\frac{\partial\Lambda'}{\partial y} + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\frac{\partial\Lambda'}{\partial z}\right) \\ &\qquad + (\Lambda'' + T\Lambda')\left[\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \end{aligned} \right.$$

équation qui devra être vérifiée, quels que soient x, y, z, lorsque la famille proposée sera isotherme, c'est-à-dire que, si l'on borne l'application de cette théorie, comme nous le ferons expressément, aux seules surfaces algébriques, tous les coefficients des différents termes en x, y, z devront être séparément nuls. Or, en raison de la présence des deux dérivées Λ' et Λ'' dans cette équation, la seconde n'y entrant que linéairement seulement, il est visible que ces différents coefficients contiendront dans leur expression, non seulement les coefficients de l'équation proposée $\Lambda = 0$, mais encore leurs dérivées premières et secondes, celles-ci sous forme linéaire seulement, en sorte que ces derniers coefficients, c'est-à-dire nos inconnues, seront ainsi astreints à à vérifier un système d'équations différentielles du second ordre,

linéaire par rapport aux dérivées secondes, dont le nombre sera égal à celui des coefficients de l'équation que nous venons de former (53) (*).

Si l'équation proposée $\Lambda = 0$, supposée algébrique, est de degré m, les deux dérivées Λ' et Λ'' étant du même degré en x, y, z, les trois termes dont se compose cette équation (53) seront tous trois du degré $3m - 2$, savoir pour chacun

$$2m + (m - 2) = m + (m - 1) + (m - 1) = m + 2(m - 1) = 3m - 2,$$

nombre qui, sauf pour $m = 1$, sera toujours plus grand que m. Le nombre n des coefficients de l'équation proposée, c'est-à-dire des inconnues, sera donc ainsi dans tous les cas moindre que le nombre N des coefficients de cette dernière équation (53), ou des équations auxquelles devront satisfaire ces inconnues, résultat auquel il fallait s'attendre *a priori*, du moment que la condition de l'isothermie constitue pour une famille de surfaces une particularité spéciale, et qu'en conséquence il ne sera pas toujours possible, avec une forme donnée pour l'équation $\Lambda = 0$, de déterminer ces coefficients de telle sorte que la famille en question réalise cette condition, ce qui serait au contraire toujours possible, si le nombre des équations à satisfaire était égal ou inférieur au nombre des inconnues à déterminer (**). De plus, le rapport $\frac{N - n}{n}$, dont la valeur mesure en quelque sorte la *surabondance* du système, croissant constamment et assez rapi-

(*) On pourra à la vérité, si l'on veut, réduire d'une unité dans tous les cas, et souvent de plusieurs, le nombre des équations à vérifier, en faisant disparaître un terme (ou éventuellement plusieurs à la fois) de l'équation en question (53), par l'élimination de ce terme (ou de ces termes, lorsque ce sera possible) à l'aide de l'équation proposée $\Lambda = 0$ elle-même, multipliée à cet effet par un facteur convenable. Nous faisons usage de cet artifice dans l'exemple ci-après II° relatif à la sphère.

(**) Comme pour $m = 1$ on aura $N = n$, il est donc certain *a priori* qu'il existera des familles isothermes de plans; et par conséquent, pour le premier ordre, le problème de l'isothermie se réduira à déterminer la forme des expressions en λ des divers coefficients de la famille de plans: détermination fort importante par les conséquences géométriques qu'elle entraîne, ainsi que nous le montrerons.

dement avec m (*) à partir de $m = 2$, cas pour lequel l'excès $N - n$ du nombre des équations sur celui des inconnues est déjà égal à 26 (ou 25, suivant que l'on aura disposé arbitrairement, ou non, du coefficient du terme indépendant), on voit par là qu'il y aura de moins en moins de chances de rencontrer de pareilles familles de surfaces algébriques, au fur et à mesure que l'on élèvera le degré, ou simplement le nombre des termes, de l'équation de la famille de surfaces à laquelle on appliquera la méthode.

De ce simple aperçu on peut déduire, en outre, pour le cas le plus général, trois conséquences importantes.

En premier lieu, la solution étant actuellement fournie par un

---

(*) En effet, le nombre des termes d'un polynôme complet de degré m à trois variables étant

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} = \frac{m^3+6m^2+11m+6}{6} = 1 + \frac{m}{6}(m^2+6m+11),$$

si l'on convient, dans l'équation $A = 0$, d'attribuer à l'avance pour coefficient au terme indépendant une constante quelconque arbitrairement choisie, le nombre n des inconnues sera en réalité seulement $n = \frac{m}{6}(m^2 + 6m + 11)$ D'autre part, le nombre N des termes de l'équation (53), dont le premier membre est un polynôme complet de degré $3m - 2$, étant

$$N = \frac{(3m-1)3m(3m+1)}{1.2.3} = \frac{3m}{6}(9m^2 - 1),$$

et, par suite, le rapport $\frac{N}{n}$ et sa dérivée ayant en général pour expressions

$$\frac{N}{n} = 3\frac{9m^2 - 1}{m^2 + 6m + 11}, \qquad \frac{d}{dm}\left(\frac{N}{n}\right) = 3\frac{54m^2 + 200m + 6}{(m^2 + 6m + 11)^2},$$

l'on voit, tous les coefficients de cette dérivée étant positifs, que le dit rapport ira constamment en croissant, pour toutes les valeurs positives de m. Il en sera donc évidemment de même de l'autre rapport, envisagé ci-dessus, $\frac{N-n}{n} = \frac{N}{n} - 1$, lequel croît même assez rapidement à partir de $m = 1$, car ses valeurs successives pour les premiers nombres entiers sont respectivement, d'après l'expression précédente du rapport $\frac{N}{n}$, savoir

$$\left\{\begin{array}{lllll} m = 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \\ \frac{N-n}{n} = \frac{1}{3}, & 2 + \frac{8}{9}, & 5 + \frac{12}{38}, & 7 + \frac{7}{17}, & 9 + \frac{4}{22}, \ldots \end{array}\right.$$

résultat qui rend dès lors très vraisemblable le fait conjectural que nous énonçons plus haut.

système d'équations différentielles ordinaires, et non plus par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, la recherche des solutions singulières, s'il en existe, sera soumise à une méthode régulière et classique (*), ce qui n'avait pas lieu auparavant.

En second, lieu il est clair que la solution la plus générale de la question ne comportera plus dans le cas actuel, c'est-à-dire en restreignant le problème aux seules surfaces algébriques, que des constantes arbitraires seulement, et non plus des fonctions arbitraires (sauf, bien entendu, celle figurée par la fonction T), comme le ferait supposer le mode d'intégration de l'équation de l'équilibre de température $\Delta_2\theta = 0$, emprunté à la Physique Mathématique, que nous relatons un peu plus haut.

En troisième lieu enfin, si l'on excepte le cas de $m = 1$ pour lequel on aura $N = n$, toutes les équations du système, au nombre de N, étant, avons-nous dit, linéaires par rapport aux dérivées secondes des n inconnues, si l'on prend n distinctes de ces équations, et qu'on en tire les valeurs des n dérivées secondes pour les reporter dans les autres équations, on formera, en général, un système de $N - n$ équations différentielles du premier ordre seulement, qui devront être compatibles pour qu'il existe une solution, et auxquelles les n inconnues seront astreintes à satisfaire. Or, en supposant que parmi ces équations il en existe au moins n qui soient distinctes, l'obligation pour les n inconnues, de vérifier en particulier le système ainsi formé de n de ces équations simultanées du premier ordre, montre que, toutes les fois que l'on sera parvenu à constituer un pareil système, la solution la plus générale du problème ne saurait renfermer, au maximum, plus de n constantes arbitraires. Encore n'est-il pas sûr que ces n constantes existent bien alors en réalité dans la solution, car en supposant obtenue l'intégrale générale de ce dernier système avec ses n constantes arbitraires, il faudra que les mêmes expressions des inconnues vérifient encore, non seulement les $N - 2n$ autres équations du premier ordre, mais

(*) Voir, par exemple, Jordan, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. III, § 10, pp. 14-16.

aussi les n équations du second ordre que nous avions mises tout d'abord à part, et qui nous avaient servi à éliminer les n dérivées secondes. Or il est fort possible que la vérification ultérieure de ces $N - n$ équations, des premier et second ordres, ne puisse être ensuite obtenue qu'à la condition d'établir un certain nombre de relations entre les constantes introduites par l'intégration, relations qui réduiraient par conséquent d'un nombre égal le nombre des constantes réellement arbitraires de la solution. Le développement du calcul pourra seul trancher cette nouvelle question, mais, quelle qu'en doive être la réponse, nous sommes toujours assurés à l'avance que la solution la plus générale ne pourra comporter qu'un nombre de constantes arbitraires au plus égal à celui des inconnues, c'est-à-dire des coefficients de l'équation proposée $\Lambda = 0$, nombre qui, pour le degré m, sera par conséquent au maximum de $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}$. Cette dernière remarque sera du plus grand secours, comme on le verra, pour la solution du problème à l'aide de notre méthode.

Il est, à la vérité, un cas que nous avons dû laisser de côté dans le raisonnement qui précède : c'est celui dans lequel on ne pourrait ainsi former, par l'élimination des dérivées secondes entre les N équations primitivement posées, qu'un nombre $n - k$ d'équations distinctes du premier ordre, moindre que le nombre n des inconnues, et insuffisant par conséquent pour assurer à elles seules leur détermination. Mais il est facile de voir que, même pour ce cas, une conclusion analogue s'imposera encore en général, si le nombre k des équations ainsi manquantes n'est pas supérieur à 2.

En effet, comme l'on pourra, en général, sans modifier la nature ni la définition de la famille de surfaces représentée par l'équation $\Lambda = 0$:

1° Diminuer d'une unité seulement le nombre des coefficients à déterminer de cette équation, en attribuant à l'avance pour coefficient à l'un des termes en particulier une fonction de λ ou une constante arbitrairement choisies, par exemple en divisant tous les termes par le coefficient de l'un deux, de manière à donner à ce terme pour coefficient l'unité;

2° Cela fait, disposer ensuite arbitrairement d'un seul des nouveaux coefficients, en le prenant, soit pour le paramètre lui-même, soit pour une fonction déterminée de ce paramètre sans constante arbitraire (en renonçant toutefois dès lors à adopter pour paramètre le paramètre géométrique lui-même);

On voit qu'en opérant sur l'équation $\Lambda = 0$, dont n désignait par hypothèse dans les raisonnements qui précèdent le nombre des termes distincts en x, y, z, les deux préparations que nous venons de dire, le nombre des inconnues se trouvera réduit à $n - 2$. Si donc l'élimination des dérivées secondes, ainsi que nous l'avons expliqué, a procuré un nombre au moins égal à $n - 2$ d'équations du premier ordre, et que l'introduction dans ces équations des hypothèses que nous venons de dire n'en fasse disparaître aucune, ces $n - 2$ équations du premier ordre formeront encore un système complet, permettant de déterminer ces inconnues avec un nombre $n - 2$ de constantes arbitraires, lequel sera par conséquent dans ce cas le nombre maximum de celles qui pourront entrer dans la solution la plus générale.

Les mêmes considérations font voir encore que, même pour le cas général, c'est-à-dire celui où l'élimination des dérivées secondes fournira de prime abord un nombre d'équations du premier ordre précisément égal à n, ce nombre n, admis tout à l'heure comme maximum pour les constantes arbitraires de la solution la plus générale, pourra encore être réduit de deux unités, en supposant que l'on ait effectué au préalable, sur l'équation $\Lambda = 0$, les deux préparations indiquées tout à l'heure; et, comme le nombre des inconnues, ou des coefficients à déterminer, ne saurait être réduit davantage sans préjuger, et par conséquent risquer d'altérer, la forme de la solution, il est clair que, dans cette dernière hypothèse, les $n - 2$ constantes d'intégration, introduites par notre méthode dans la solution la plus générale, seront alors relativement à cette solution des constantes *essentielles*, c'est-à-dire que leur nombre pourra bien être augmenté (*),

(*) Il est bien clair, en effet, que si, pour un problème particulier, l'on suppose obtenue dans ces conditions par notre méthode une solution renfermant n constantes, et que l'on

mais ne saurait être diminué par aucun changement ultérieur du paramètre.

Si, au contraire, l'on n'a pas eu préalablement cette attention, et que l'on ait conservé dans l'équation $A = 0$ un coefficient indéterminé pour chaque terme, le nombre des constantes introduites par l'intégration sera bien encore, en général, égal à n, ainsi que nous l'avons expliqué, n étant toujours le nombre des inconnues ou des coefficients à déterminer; seulement il est clair que, dans ce cas, au nombre de ces constantes, il y en aura deux qui seront *surabondantes* ou non essentielles, puisqu'en partant de la forme équivalente de l'équation $A = 0$, réduite comme nous l'avons expliqué, l'on eût trouvé alors deux constantes de moins dans la solution la plus générale du problème (*).

---

y remplace ensuite λ par $f(\lambda)$, $f(\lambda)$ désignant, par exemple, un polynome entier de degré m à coefficients indéterminés, la solution, sous cette nouvelle forme, contiendra alors en apparence $n+m+1$ constantes arbitraires. Il y aura donc alors, entre les deux groupes de constantes, successivement introduits dans la solution, une distinction fondamentale à établir, distinction que nous exprimerons en attribuant aux premières la dénomination *d'essentielles*, et aux secondes celles de *surabondantes*.

(*) Ainsi, par exemple, pour les plans et les surfaces à centre du second ordre, l'on n'obtiendra dans la solution que des constantes essentielles, en partant pour l'équation $A = 0$, au lieu des deux types symétriques qui se présentent les premiers à l'esprit

$$(\alpha) \qquad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K,$$

de deux formes d'équation telles que

$$(6) \qquad ax + by + z = \lambda, \qquad \frac{x^2}{\lambda} + by^2 + cz^2 = 1.$$

a, b, c désignant encore des fonctions indéterminées du paramètre λ.

Mais le faible avantage qu'offrent ainsi les formes analogues à (6), d'une complète parité entre toutes les constantes d'intégration, est largement compensé par deux sérieux inconvénients, correspondant à l'une et à l'autre des deux conditions sus-énoncées : le premier, de présupposer d'une façon ferme dans la solution l'existence des termes ainsi particularisés, et par conséquent d'exclure à l'avance, quand bien même elles existeraient en réalité, les solutions particulières pour lesquelles ces termes feraient défaut (pour les exemples précités (α), d'une part les plans parallèles à l'axe des z et ceux menés par l'origine, et d'autre part les cylindres parallèles à l'axe des x et les cônes du second ordre ayant pour sommet l'origine); et le second de rompre la symétrie entre les trois coordonnées, qui est une condition *sine qua non* du succès de nos calculs. Aussi nous en tiendrons-nous, le plus souvent, à l'équation primitive analogue à (α) malgré le léger défaut de pure forme inhérent à la solution à laquelle elle conduira, et sur lequel il suffit évidemment d'avoir appelé l'attention du Lecteur, pour qu'il ne présente plus dès lors aucune espèce d'inconvénient.

Nous vérifierons successivement chacune de ces prévisions, sur les différents exemples d'application de cette méthode que nous nous proposons de traiter, à l'occasion de plusieurs questions importantes relatives au problème de l'isothermie.

Le seul cas, dans lequel la conclusion ci-dessus relative au nombre des constantes arbitraires fera réellement défaut, sera donc celui où, même en tenant compte des considérations qui précèdent, l'élimination de toutes les dérivées secondes entre les N équations primitivement posées ne fournirait qu'un nombre $n - k$ d'équations distinctes du premier ordre, moindre que celui des inconnues à déterminer, et dans lequel par conséquent il faudrait nécessairement leur adjoindre k de ces équations primitives du second ordre pour compléter le système propre à leur détermination. Or, comme il sera évidemment possible, en revenant dans ce cas aux n équations primitives distinctes qui auront déjà servi à l'élimination des dérivées secondes entre les N équations posées, d'éliminer entre elles seules $n - k$ des dérivées secondes, si l'on prend alors précisément les k équations ainsi obtenues pour les adjoindre, ainsi que nous venons de le dire, aux $n - k$ équations du premier ordre résultant de la première élimination, l'on voit que les n inconnues seront alors déterminées par un système différentiel de n équations, contenant, avec les n dérivées premières, k seulement des dérivées secondes, et qui par conséquent, étant ramené à la forme normale, sera de l'ordre $n + k$: d'où il suit que, pour ce cas exceptionnel, dont nous fournirons également un exemple, l'ensemble des expressions les plus générales des inconnues contiendra précisément ce même nombre $n + k$ de constantes arbitraires.

Ce nombre $n + k$ sera donc en même temps, dans ce cas, le nombre maximum des constantes essentielles qui pourront entrer dans la solution la plus générale, si l'on suppose, encore comme plus haut, que l'on ait accompli au préalable sur l'équation proposée $\Lambda = 0$ les deux préparations que nous avons indiquées (pp. 64 et 65); sinon, parmi ces $n + k$ constantes, il s'en trouvera encore une ou deux qui seront surabondantes, suivant que l'on aura négligé de remplir l'une seulement, ou les deux à la fois, des deux conditions sus-énoncées.

Notons enfin, avant d'aller plus loin, que jusqu'ici, sauf en quelques points secondaires, aucune des considérations qui précèdent ne vise exclusivement le problème spécial à l'occasion duquel nous avons été amené à les présenter, c'est-à-dire la forme particulière de notre équation générale (53) qui résulte directement de celle de l'équation proposée (29), en sorte que la même méthode pourrait être appliquée sans doute, avec le même succès, à la recherche des solutions algébriques, de forme déterminée, de toute autre équation aux dérivées partielles du second ordre, à trois variables indépendantes.

La théorie, que nous venons d'exposer, laisse complètement arbitraire le choix du paramètre géométrique λ, c'est-à-dire son expression en fonction du paramètre thermométrique θ, ou, ce qui revient au même, le choix de la fonction $T = -\Psi(\lambda)$ définie par l'équation (52), qui détermine précisément cette expression par le moyen des équations (32) ou (32bis). En général, c'est-à-dire sauf le seul cas où l'on prendrait $\lambda = \theta$ ou $T = 0$, les constantes arbitraires essentielles, dont le nombre maximum est fixé par cette théorie, existeront donc dans la solution, *en sus* ou *indépendamment* de celles qui entreront dans cette dernière expression de λ que nous venons de dire, et qui seront évidemment des constantes surabondantes, à savoir : soit celles qui pourront y être introduites à volonté dans chaque cas par la fonction $T = -\Psi(\lambda)$, puisqu'elle est complètement arbitraire (*), soit simplement les deux constantes de définition σ et τ du paramètre thermométrique (**), lesquelles en tout état de cause y figureront en vertu de l'équation (32bis), et cela toujours de la même manière, c'est-à-dire de telle sorte que le paramètre θ n'intervienne dans cette expression que par la fonction linéaire $u = \sigma\theta + \tau$.

Dans le cas unique, au contraire, où l'on aura adopté de prime abord le paramètre thermométrique θ pour variable indépendante

---

(*) Voir la note antérieure de la page 65.

(**) Car, on les fera disparaître de la solution, d'après ce que nous allons dire à l'instant, en prenant simplement pour paramètre, à la place de θ, la fonction linéaire $u = \sigma\theta + \tau$.

[ou fait $T = 0$ dans l'équation générale (53)], il est bien clair qu'au nombre des constantes d'intégration introduites par notre méthode, se trouveront alors comprises les deux constantes précitées σ et τ, lesquelles accompagneront forcément, de la manière que nous venons de dire, le paramètre thermométrique θ, puisque le résultat ainsi obtenu directement devra être évidemment le même que si l'on eût résolu la question, en appliquant d'abord notre méthode à la même équation $\Lambda = 0$ avec un paramètre géométrique quelconque, puis rapportant ensuite la famille de surfaces à son paramètre thermométrique à l'aide du procédé de Lamé. C'est bien effectivement ce que nous aurons encore l'occasion de constater à propos d'un exemple important.

Disons enfin, en terminant cet exposé général, pour répondre à une objection qui se présentera certainement à l'esprit du Lecteur, que la multiplicité des équations que l'on sera amené à considérer par cette méthode, bien que peu encourageante assurément de prime abord, ne constituera pas cependant un obstacle irréductible à son succès, si l'on a soin de faire usage dans cette question d'une notation symétrique et compréhensive, qui permette d'englober un grand nombre d'équations d'un même type sous une formule unique. Nous fournissons une preuve indéniable de cette assertion dans la Note I de l'Appendice qui termine ce Mémoire, dans laquelle nous appliquons pas à pas notre méthode à l'équation la plus générale du second degré, pour laquelle le nombre des coefficients inconnus étant de *dix*, celui des équations à vérifier est de *trente-cinq*.

Application de la méthode au plan, et a la sphère. — Appliquons donc cette méthode, à titre d'exemple, aux trois classes de surfaces les plus simples et le plus fréquemment considérées, à savoir les plans, les sphères, et les surfaces du second ordre en général, ainsi qu'à un type simple emprunté à la catégorie des équations de degré supérieur.

1° (*Plans*). — Faisant pour ce cas, ainsi que nous avons dit,

$$\Lambda = Ax + By + Cz + D, \qquad (53^{bis})$$

les coefficients A, B, C, D, de l'équation $\Lambda = 0$, étant supposés des fonctions actuellement indéterminées du paramètre, nous en déduirons, en introduisant pour simplifier les écritures l'inconnue auxiliaire $S = A^2 + B^2 + C^2$,

$$(54)\quad \left\{\begin{array}{l} \Lambda' = A'x + B'y + C'z + D', \qquad \Lambda'' = A''x + B''y + C''z + D'', \\ \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2 = S, \qquad \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial x}\frac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\frac{\partial\Lambda'}{\partial y} + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\frac{\partial\Lambda'}{\partial z} = AA' + BB' + CC' = \frac{1}{2} S', \end{array}\right.$$

et par suite, en substituant ces valeurs dans notre équation générale (53), celle-ci sera dès lors pour ce cas

$$-(A'x + B'y + C'z + D')S' + \left[(A'' + TA')x + (B'' + TB')y + (C'' + TC')z + D'' + TD'\right]S = 0.$$

Nos quatre inconnues A, B, C, D seront alors déterminées par la condition de vérifier les quatre équations du second ordre

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{ll} -A'S' + (A'' + TA')S = 0, & -B'S' + (B'' + TB')S = 0, \\ -C'S' + (C'' + TC')S = 0, & -D'S' + (D'' + TD')S = 0, \end{array}\right.$$

lesquelles pourront encore être écrites sous forme de rapports égaux

$$\frac{A'' + TA'}{A'} = \frac{B'' + TB'}{B'} = \frac{C'' + TC'}{C'} = \frac{D'' + TD'}{D'} = \frac{S'}{S},$$

ou plus simplement, en éliminant des trois premières de ces équations la fonction arbitraire T,

$$(56)\qquad \frac{A''}{A'} = \frac{B''}{B'} = \frac{C''}{C'} = \frac{D''}{D'} = \frac{S'}{S} - T;$$

par où l'on voit déjà qu'après avoir disposé arbitrairement de cette fonction T, ou ce qui revient au même, choisi à volonté le paramètre géométrique λ en fonction du paramètre thermomé-

trique θ, la solution la plus générale du problème envisagé devra renfermer huit constantes arbitraires (*).

Cela posé, si l'on ne s'impose pas tout d'abord la condition que la famille de surfaces soit rapportée à son paramètre thermométrique, le mode le plus simple d'intégrer le système précédent (56) sera évidemment de prendre pour la fonction arbitraire T la valeur $T = \frac{S'}{S}$, auquel cas le dit système se réduira par là à celui-ci

$$A'' = 0, \qquad B'' = 0, \qquad C'' = 0, \qquad D'' = 0,$$

lequel n'admet manifestement d'autre solution que son intégrale générale, savoir

$$(56^{bis}) \qquad A = \alpha\lambda - a, \quad B = 6\lambda - b, \quad C = \gamma\lambda - c, \quad D = \delta\lambda - d,$$

en sorte qu'en reportant ces valeurs dans l'expression proposée (53bis) de A, l'on voit que toutes les familles isothermes de plans sans exception seront comprises dans l'équation

$$(57) \qquad (\alpha\lambda - a)\,x + (6\lambda - b)\,y + (\gamma\lambda - c)\,z + \delta\lambda - d = 0,$$

ou

$$(58) \qquad \lambda = \frac{ax + by + cz + d}{\alpha x + 6y + \gamma z + \delta}.$$

De cette forme générale d'équation ressort immédiatement une conséquence géométrique importante, à savoir que tous les plans qui composent une famille isotherme passent toujours par une même droite, qui est l'intersection des deux plans

$$(59) \qquad ax + by + cz + d = 0, \qquad \alpha x + 6y + \gamma z + \delta = 0,$$

lesquels font eux-mêmes partie de la famille pour les valeurs du

---

(*) Ce premier résultat déjà est parfaitement conforme aux prévisions formulées par notre théorie, car le nombre N des équations du second ordre (55) étant ici égal au nombre n des inconnues, le nombre $n - k$ des équations du premier ordre qu'il est possible de former par l'élimination des dérivées secondes est dès lors égal à zéro. On a donc dans le cas actuel $k = n = 4$, et par conséquent le nombre des constantes arbitraires que contiendra l'expression la plus générale des inconnues sera $n + k = 2 . 4 = 8$ (p. 67).

paramètre $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Dans le cas d'une famille de plans parallèles, on devra considérer que cette droite s'est transportée tout entière à l'infini avec l'un de ces plans, car la distance du second plan à l'origine grandit infiniment, lorsque dans l'expression (58) l'on fait tendre α, β, γ, simultanément vers zéro, en laissant d'ailleurs arbitraires leurs rapports mutuels, c'est-à dire, par conséquent, quelle que soit l'orientation de ce second plan.

Cette propriété caractéristique, si nette et si simple, nous sera d'un très grand secours dans le chapitre suivant, pour la détermination des systèmes orthogonaux isothermes, dans lesquels on suppose *a priori* qu'il existe une famille de plans.

Si l'on tient, au contraire, à obtenir comme résultat du calcul la même famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, il faudra, d'après la définition (52) de la fonction T, faire dans les équations (55) ou (56), $T = 0$, auquel cas elles deviendront

$$\frac{A''}{A'} = \frac{B''}{B'} = \frac{C''}{C'} = \frac{D''}{D'} = \frac{S'}{S} = \frac{\rho''}{\rho'},$$

en introduisant pour la symétrie une seconde inconnue auxiliaire ρ, qui sera dès lors, comme A, B, C, D, une fonction déterminée du paramètre thermométrique θ. Nous aurons donc à présent, en intégrant toutes ces équations une première fois,

$$(60) \qquad A' = \alpha\rho', \quad B' = \beta\rho', \quad C' = \gamma\rho', \quad D' = \delta\rho', \quad S = \sigma\rho',$$

puis une seconde fois, sauf la dernière,

$$(61) \qquad A = \alpha\rho - a, \quad B = \beta\rho - b, \quad C = \gamma\rho - c, \quad D = \delta\rho - d;$$

et enfin, en remettant ces valeurs de A, B, C, D dans la dernière des cinq équations que nous venons d'écrire, après y avoir remplacé l'inconnue auxiliaire S par sa valeur de définition (54), la dernière inconnue ρ sera alors déterminée en fonction du paramètre θ au moyen d'une équation intégrable par quadrature, qui nous reste seule désormais à calculer.

Pour effectuer cette dernière détermination, écrivant, au moyen

des valeurs (61) de A, B, C, D, celle (54) de S ainsi qu'il suit

$$(62)\qquad S = (\alpha\rho - a)^2 + (6\rho - b)^2 + (\gamma\rho - c)^2 = P\rho^2 - 2Q\rho + R,$$

P, Q, R désignant pour abréger les trois quantités constantes

$$(63)\qquad P = \alpha^2 + 6^2 + \gamma^2,\quad Q = \alpha a + 6b + \gamma c,\quad R = a^2 + b^2 + c^2,$$

lesquelles donnent suivant une formule connue

$$(64)\quad \left\{ \begin{aligned} PR - Q^2 &= (\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (\alpha a + 6b + \gamma c)^2 \\ &= (6c - \gamma b)^2 + (\gamma a - \alpha c)^2 + (\alpha b - 6a)^2, \end{aligned} \right.$$

puis, mettant cette dernière expression (62) de S sous forme d'une somme de deux carrés, qui seront tous les deux positifs, en vertu de la valeur qui précède, savoir

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} S = \frac{1}{P}(P\rho^2 - 2PQ\rho + PR) &= \frac{1}{P}\left[(P\rho - Q)^2 + PR - Q^2\right] \\ &= \frac{PR - Q^2}{P}\left[\left(\frac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}}\right)^2 + 1\right], \end{aligned} \right.$$

et enfin reportant, comme nous l'avons dit, cette valeur dans la dernière équation (60), nous obtiendrons, pour déterminer l'inconnue auxiliaire ρ, l'équation

$$\frac{PR - Q^2}{P}\left[1 + \left(\frac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}}\right)^2\right] = \sigma\rho',$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{PR - Q^2}}{\sigma} = \frac{\dfrac{P}{\sqrt{PR - Q^2}}\dfrac{d\rho}{d\theta}}{1 + \left(\dfrac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}}\right)^2}.$$

Mais cette équation, dans laquelle figure la constante arbitraire σ, étant désormais la seule que nous ayons à considérer, le premier membre est une constante arbitraire indépendante, que nous pourrons par conséquent tout aussi bien désigner simplement

par σ, et dès lors cette équation devenant ainsi, en séparant les variables,

$$\sigma d\theta = \frac{\frac{P d\rho}{\sqrt{PR - Q^2}}}{1 + \left(\frac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}}\right)^2},$$

donnera en intégrant

$$(66) \qquad \sigma\theta + \tau = \text{arc tg}\left(\frac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{P\rho - Q}{\sqrt{PR - Q^2}} = \text{tang}(\sigma\theta + \tau),$$

et enfin, en résolvant par rapport à ρ,

$$(67) \qquad \rho = \frac{1}{P}\left[Q + \sqrt{PR - Q^2}\,\text{tang}\,(\sigma\theta + \tau)\right],$$

valeur qui est bien réelle, eu égard à la seconde valeur (64), et qu'il n'y aura plus qu'à substituer dans les expressions (61), pour avoir celle des coefficients de la famille de plans rapportée à son paramètre thermométrique.

Le rapprochement des formules (56bis) et (61), trouvées successivement pour ces deux hypothèses, fait voir d'ailleurs que le paramètre géométrique λ correspondant à la première forme (57), considéré comme fonction de θ, n'est autre que cette dernière fonction ρ (67), dont nous venons précisément de déterminer l'expression.

Le résultat, auquel nous venons de parvenir, est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable, que l'on apercevra en spécifiant le choix des axes coordonnés, et prenant pour axe des z la droite fixe intersection des deux plans (59), par laquelle passent tous les plans de la famille considérée.

En effet, si l'on prend, dans cette hypothèse, pour plan des yz le second plan (59), auquel cas le numérateur et le dénominateur de l'expression (58) de λ se transformeront alors respectivement dans les suivants

$$ax + by + cz + d = Lx' + My', \qquad \alpha x + 6y + \gamma z + \delta = Nx',$$

on voit que pour appliquer à l'équation générale de la famille isotherme de plans (58), qui sera devenue par cette transformation

(68) $$\lambda = \frac{Lx' + My'}{Nx'} = \frac{L}{N} + \frac{M}{N}\frac{y'}{x'},$$

les formules de la théorie qui précède, il faudra faire à la fois dans ces formules

$$a = L,\ b = M,\ c = 0,\ d = 0;\quad \alpha = N,\ 6 = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0;$$

et par suite aussi, d'après les définitions (63),

$$\left\{\begin{array}{l} P = N^2, \qquad Q = NL, \qquad R = L^2 + M^2, \\ PR - Q^2 = N^2(L^2 + M^2) - N^2L^2 = N^2M^2. \end{array}\right.$$

L'expression (67) de ρ, à laquelle nous sommes arrivés tout à l'heure, deviendra donc avec ce choix des axes,

(68bis) $$\rho = \frac{1}{N^2}\left[NL + NM \tang(\sigma\theta + \tau)\right] = \frac{L}{N} + \frac{M}{N}\tang(\sigma\theta + \tau),$$

et comme cette fonction ρ (67) se confond, ainsi que nous l'avons remarqué, avec le paramètre λ de la forme d'équation (58), nous trouverons par suite, en effaçant maintenant les accents, par la simple comparaison des valeurs égales (68) et (68bis), pour l'équation de la même famille de plans rapportée à son paramètre thermométrique, dans la nouvelle hypothèse,

(69) $$\frac{y}{x} = \tang(\sigma\theta + \tau),$$

équation qui pourra représenter dès lors, aussi bien que la première forme (57) ou (58), toutes les familles isothermes de plans sans exception, et qui montre en outre que le paramètre thermométrique, relatif à chaque plan d'une semblable famille, n'est autre que l'azimut de ce plan par rapport à un certain plan de la même famille, pris pour origine.

A la vérité, d'une part, ce dernier type d'équation (69), qui

n'est autre que la première solution particulière (44) relative à la catégorie des cônes, avait bien été déjà signalé par Lamé, comme définissant une famille isotherme, et, d'autre part, notre type général (58) pouvant inversement être déduit de celui-ci rien qu'en y effectuant un simple changement de coordonnées rectilignes, la direction des nouveaux axes demeurant cette fois arbitraire, et y faisant en même temps $\lambda = \text{tang}\,(\sigma\theta + \tau)$, le procédé de Lamé exposé plus haut (pp. 35-37) permettrait ensuite d'arriver sans peine à la relation, entre les deux paramètres (géométrique et thermométrique) de la famille de surfaces, que nous avons trouvée ci-dessus. Mais il faut bien faire attention que ce procédé de Lamé, excellent pour vérifier l'isothermie de la famille de surfaces ainsi donnée, et pour découvrir la relation que nous venons de dire (*), n'eût renseigné en rien sur la forme de la solution la plus générale, forme que l'on eût pu croire dès lors beaucoup plus compliquée, ni sur le nombre des constantes qu'elle devait renfermer. Ainsi, par exemple, une présomption, fondée sur l'analogie avec la forme que nous avons annoncé déjà devoir trouver pour la solution la plus générale relative au second degré, mais non justifiée par l'événement, eût sans doute amené à penser que pour le premier degré cette solution générale devrait être la suivante

$$\frac{x}{a+\lambda} + \frac{y}{b+\lambda} + \frac{z}{c+\lambda} = h,$$

avec laquelle, les coefficients étant alors des fonctions du deuxième et du troisième degré en λ, aucune propriété caractéristique analogue à celle que nous avons signalée n'eût alors existé.

En supposant donc que l'on fût arrivé à l'aide de la seule transformation des coordonnées, comme nous venons de le dire, à la forme d'équation (57), aucune indication, en dehors de la

---

(*) Nous effectuerons ce calcul à la fin du Chapitre, en même temps que deux autres analogues, comme confirmation des résultats obtenus par notre méthode, avant de les formuler en théorèmes que nous aurons fréquemment l'occasion d'invoquer dans le cours de cette Étude.

méthode que nous avons proposée, n'eût permis de croire que l'on n'eût obtenu ainsi la solution la plus générale de la question, et dispensé par conséquent de rechercher d'autres types que la forme (58) pour l'expression du paramètre λ.

Aussi Lamé n'indique-t-il, à titre de famille isotherme de plans, les deux solutions ci-dessus (69) ou (44), et (49), (dont la seconde est manifestement un cas limite de la première), qu'incidemment (*), et comme faisant partie de systèmes orthogonaux triplement isothermes dont il s'occupe, et non pas dans l'énumération et l'examen successif qu'il fait, au début de sa théorie, des différentes familles isothermes de surfaces (**). Mais il ne signale nulle part l'équation (57) comme étant la forme la plus générale de la solution pour les familles de plans, ni à plus forte raison l'équation (69) comme représentant l'expression la plus générale du paramètre thermométrique, ainsi que nous venons de le faire, expression que son procédé ne lui permettait d'obtenir qu'en supposant la forme de la solution la plus générale préalablement connue. Ce premier exemple, si simple qu'il soit, témoigne donc déjà d'une façon irrécusable de l'utilité de la méthode, qu'après celle due à Lamé, nous avons proposée pour aborder le problème de l'isothermie.

II° (*Sphères*). — Pour ce second exemple, sachant que dans tous les cas l'équation de la surface contiendra un terme en $(x^2 + y^2 + z^2)$ qui comprendra l'ensemble des termes du second degré, nous donnerons $-\frac{1}{2}$ pour coefficient à ce terme, et faisant alors

$$\Lambda = Ax + By + Cz + D - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

l'équation $\Lambda = 0$ sera évidemment l'équation la plus générale

(*) Lamé, *Leçons sur les Coord. Curv.*, § XXXII-XXXIII (pages 52-54), et § XCIX (page 179).

(**) Lamé, *Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc., §§ III, VI-X et XIII (pages 4, 6-13 et 17-18). Les différentes familles de surfaces qu'il passe ainsi en revue dans ces pages sont au reste toutes du second ordre, et ne sont que des cas particuliers, ou des cas-limites, de la solution remarquable découverte par lui et formulée en dernier lieu, à savoir celle des familles de surfaces homofocales.

d'une famille de sphères. Or, cette expression de Λ donnant

$$
(70)\left\{
\begin{aligned}
&\Lambda' = A'x + B'y + C'z + D', \qquad \Lambda'' = A''x + B''y + C''z + D'',\\
&\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\frac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\frac{\partial\Lambda'}{\partial y} + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\frac{\partial\Lambda'}{\partial z} = (A-x)A' + (B-y)B' + (C-z)C'\\
&\qquad = AA' + BB' + CC' + D' - \Lambda',\\
&\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2 = (A-x)^2 + (B-y)^2 + (C-z)^2\\
&= A^2 + B^2 + C^2 - 2\left[Ax + By + Cz - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right]\\
&\qquad = A^2 + B^2 + C^2 + 2D - 2\Lambda,\\
&\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2} = -3,
\end{aligned}
\right.
$$

si nous convenons encore cette fois de prendre le paramètre thermométrique θ pour variable indépendante, ce qui équivaudra à faire de nouveau la fonction arbitraire $T = 0$, et si nous tenons compte en même temps de l'équation proposée $\Lambda = 0$, en vue d'éliminer le terme en $(x^2 + y^2 + z^2)$, auquel nous avons attribué à l'avance un coefficient déterminé (et qui ne doit pas dès lors intervenir dans les conditions qui déterminent les coefficients des autres termes), notre équation générale (53) sera dans le cas actuel

$$-3\Lambda'^2 - 2\Lambda'(AA' + BB' + CC' + D' - \Lambda') + \Lambda''(A^2 + B^2 + C^2 + 2D) = 0,$$

ou simplement, en réduisant, et remplaçant Λ' et Λ'' par leurs valeurs (70),

$$
\begin{aligned}
-(A'x + B'y + C'z + D')^2 - 2(A'x + B'y + C'z + D')(AA' + BB' + CC' + D')&\\
+ (A''x + B''y + C''z + D'')(A^2 + B^2 + C^2 + 2D) = 0.&
\end{aligned}
$$

Or, tous les termes du second degré, en x, y, z, qui proviennent tous du seul premier terme Λ'^2, devant disparaître séparément, il sera nécessaire que l'on ait tout d'abord

$$(71)\quad A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0, \quad \text{ou} \quad A = a, \quad B = b, \quad C = c,$$

ce qui réduira dès lors la même équation à la suivante

$$-D'^2 - 2D'^2 + D''(a^2 + b^2 + c^2 + 2D) = 0,$$

ou plus simplement celle-ci

$$(72) \qquad -3D'^2 + D''(l^2 + 2D) = 0,$$

en représentant, pour abréger, par l^2 la constante

$$(73) \qquad l^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

et dès lors cette même équation, étant intégrée deux fois, nous fournira l'expression du dernier coefficient D en fonction de θ.

Cela posé, si l'on ne tient pas tout d'abord à ce que la famille de surfaces soit rapportée à son paramètre thermométrique, on pourra prendre pour paramètre géométrique $\lambda = l^2 + 2D$, D étant précisément la fonction qui résulterait de l'intégration de l'équation du second ordre (72), et alors, comme d'une part l'équation $A = 0$ pourra évidemment s'écrire avec cette hypothèse, et en tenant compte de la valeur de définition (73) de l^2,

$$(74) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \lambda,$$

et comme d'autre part les trois équations (71), qui déterminent dans le cas actuel les trois coefficients A, B, C, n'admettent encore évidemment pas d'autre solution que celle que nous avons adoptée, il s'ensuit dès lors que cette dernière équation représente certainement de nouveau toutes les solutions possibles du problème, et que, par conséquent, toute famille isotherme de sphères se compose exclusivement de sphères concentriques.

Cette première conclusion nous sera également très utile dans le Chapitre suivant pour la recherche qui fait l'objet de ce Mémoire.

En second lieu, si l'on désire au contraire résoudre complètement la question dans les termes mêmes où nous l'avions posée tout d'abord, c'est-à-dire obtenir comme solution la famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, l'équation (72) étant écrite, en la divisant par $D'(l^2 + 2D)$,

$$-\frac{3}{2}\frac{2D'}{l^2 + 2D} + \frac{D''}{D'} = 0,$$

donnera, en intégrant une première fois par quadrature,

$$-\frac{3}{2}\log(l^2+2D)+\log D' = \log(-\sigma),$$

ou, en repassant aux nombres, et changeant ensuite les signes des deux membres,

$$-D'(l^2+2D)^{-\frac{3}{2}} = \sigma,$$

et enfin en intégrant une seconde fois par quadrature

$$(l^2+2D)^{-\frac{1}{2}} = \sigma\theta+\tau \qquad \text{ou} \qquad l^2+2D = \frac{1}{(\sigma\theta+\tau)^2}.$$

Et par conséquent, en reportant cette valeur, à la place de λ, au second membre de l'équation (74) dans lequel nous avions fait par hypothèse $\lambda = l^2+2D$, cette même équation (74) deviendra définitivement sous la forme demandée

$$(75) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = \frac{1}{(\sigma\theta+\tau)^2},$$

laquelle montre à son tour que le paramètre thermométrique $\sigma\theta+\tau$ est simplement, pour chaque surface de la famille, l'inverse du rayon : résultat que fournirait à la vérité le procédé de Lamé, appliqué à l'équation (74), ainsi que nous le vérifierons à la fin de ce Chapitre, mais à la condition d'être parvenu préalablement à cette même forme, pour la découverte de laquelle cette méthode ne procure aucune indication, et laisse de nouveau par conséquent, même dans ce cas si simple, la solution véritable du problème de l'isothermie complètement indécise.

Application de la méthode aux surfaces du second ordre, et a un type d'ordre supérieur. — III° (*Surfaces du second ordre en général*). — Pour ce troisième exemple plus compliqué, en vue d'arriver plus facilement et plus rapidement au but, nous diviserons la question, et nous envisagerons tout d'abord un cas particulier seulement du problème, en astreignant à l'avance toutes les surfaces composant la famille à deux conditions spé-

ciales, qui pourront fort bien ne pas se trouver remplies dans le cas général, à savoir : 1° d'avoir toutes un centre qui soit le même pour toutes les surfaces, et que l'on pourra prendre dès lors pour origine des coordonnées; 2° d'avoir également toutes les mêmes plans principaux, que nous adopterons semblablement pour plans coordonnés, en sorte que pour ce cas, en représentant toujours par $\Lambda = 0$ l'équation de la famille en question, nous aurons alors pour la fonction Λ une expression de la forme

$$(76) \qquad \Lambda = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - H, \ (^*)$$

les coefficients A, B, C, H étant des fonctions du paramètre, qu'il s'agit de déterminer par la condition que la famille de surfaces $\Lambda = 0$ soit isotherme.

Pour cela, tirant successivement de la valeur qui précède

$$(77) \left\{ \begin{aligned} &\Lambda' = A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - H', \qquad \Lambda'' = A''x^2 + B''y^2 + C''z^2 - H'', \\ &\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\frac{\partial\Lambda'}{\partial x} + \frac{\partial\Lambda}{\partial y}\frac{\partial\Lambda'}{\partial y} + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\frac{\partial\Lambda'}{\partial z} = 4\,(AA'x^2 + BB'y^2 + CC'z^2), \\ &\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)^2 = 4\,(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2), \\ &\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2} = 2\,(A + B + C), \end{aligned} \right.$$

et reportant ces valeurs dans l'équation générale (53), celle-ci sera dans la question actuelle

$$(78) \left\{ \begin{aligned} &(A'x^2+B'y^2+C'z^2-H')^2.2(A+B+C) - 2\Lambda'.4(AA'x^2+BB'y^2+CC'z^2) \\ &\qquad + (\Lambda''+T\Lambda').4(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

équation dont le terme indépendant de x, y, z peut être écrit dès

(*) Nous écrivons H pour terme constant et non pas 1, comme on le fait généralement, afin de pouvoir comprendre éventuellement dans notre résultat la variété du cône qu nous échapperait avec l'autre hypothèse. La valeur que nous rencontrerons pour ce coefficient H nous sera d'ailleurs utile à un autre point de vue un peu plus loin.

maintenant, et fournira tout d'abord, étant égalé à zéro, la première condition

$$- H'^2 . 2 (A + B + C) = 0,$$

à laquelle on ne pourra satisfaire qu'en faisant, soit $H' = 0$, soit $A + B + C = 0$. Or, le second de ces deux modes de solution, établissant *a priori* entre les coefficients une relation indépendante du paramètre, constitue évidemment par là même une restriction de la forme d'équation primitivement proposée, et ne saurait appartenir dès lors à la solution la plus générale du problème envisagé.

Le premier mode de solution, au contraire, savoir

$$(79) \qquad H' = 0, \qquad \text{ou} \qquad H = h,$$

h étant une constante arbitraire, n'introduit aucune restriction, du moment que l'on peut toujours, comme nous l'avons remarqué, attribuer à l'un des termes en particulier un coefficient arbitrairement choisi; c'est donc cette solution qu'il nous faut adopter.

Cela posé, les expressions ci-dessus (77) de A' et A'' se réduisant, par ce premier résultat, aux suivantes

$$(80) \qquad \text{A}' = A'x^2 + B'y^2 + C'z^2, \qquad \text{A}'' = A''x^2 + B''y^2 + C''z^2,$$

si nous convenons encore, comme pour l'exemple précédent, d'adopter pour paramètre le paramètre thermométrique lui-même, l'introduction de la valeur précédente (79) de H', ainsi que de l'hypothèse $T = 0$ dans l'équation primitivement posée (78), la transformera dans la suivante

$$(A'x^2 + B'y^2 + C'z^2)^2 . 2 (A + B + C) - 2\text{A}' . 4 (AA'x^2 + BB'y^2 + CC'z^2)$$
$$+ \text{A}'' . 4 (A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = 0,$$

ou, en divisant par 2, puis remplaçant alors A' et A'' par leurs nouvelles valeurs (80), et faisant en même temps, pour simplifier l'écriture $A + B + C = S$,

$$(A'x^2 + B'y^2 + C'z^2) \left[(A'x^2 + B'y^2 + C'z^2) S - 4(AA'x^2 + BB'y^2 + CC'z^2) \right]$$
$$+ (A''x^2 + B''y^2 + C''z^2) . 2 (A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = 0,$$

ou encore, en ordonnant dans l'intérieur des crochets,

$$(A'x^2 + B'y^2 + C'z^2)\left[(S - 4A)A'x^2 + (S - 4B)B'y^2 + (S - 4C)C'z^2\right] + 2(A''x^2 + B''y^2 + C''z^2)(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = 0.$$

Dès lors, en effectuant les produits pour chacune des deux lignes séparément, l'on trouvera

$$\begin{aligned}(S - 4A)A'^2x^4 + (S - 4B)B'^2y^4 + (S - 4C)C'^2z^4 \\ + 2B'C'\{S - 2(B + C)\}y^2z^2 + 2C'A'\{S - 2(C + A)\}z^2x^2 \\ + 2A'B'\{S - 2(A + B)\}x^2y^2 \\ + 2\left[A''A^2x^4 + B''B^2y^4 + C''C^2z^4\right. \\ \left. + (B''C^2 + C''B^2)y^2z^2 + (C''A^2 + A''C^2)z^2x^2 + (A''B^2 + B''A^2)x^2y^2\right] = 0,\end{aligned}$$

et, en fin de compte, si l'on a égard à la valeur de définition de S, posée tout à l'heure, qui donne

$$S - 2(B + C) = 2A - S, \quad S - 2(C + A) = 2B - S, \quad S - 2(A + B) = 2C - S,$$

l'on obtiendra, en ordonnant le tout par rapport à x, y, z, pour notre équation générale (53) dans le problème actuel :

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned}&\{(S - 4A)A'^2 + 2A''A^2\}x^4 + \{(S - 4B)B'^2 + 2B''B^2\}y^4 \\ &+ \{(S - 4C)C'^2 + 2C''C^2\}z^4 \\ &+ 2\{(2A - S)B'C' + B''C^2 + C''B^2\}y^2z^2 \\ &+ 2\{(2B - S)C'A' + C''A^2 + A''C^2\}z^2x^2 \\ &+ 2\{(2C - S)A'B' + A''B^2 + B''A^2\}x^2y^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Par conséquent, en vertu de la théorie que nous avons exposée, les trois coefficients A, B, C, qui nous restent seuls à déterminer, devront vérifier les six équations simultanées du second ordre :

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned}&(S - 4A)A'^2 + 2A''A^2 = 0, &\quad (2A - S)B'C' + B''C^2 + C''B^2 = 0, \\ &(S - 4B)B'^2 + 2B''B^2 = 0, &\quad (2B - S)C'A' + C''A^2 + A''C^2 = 0, \\ &(S - 4C)C'^2 + 2C''C^2 = 0, &\quad (2C - S)A'B' + A''B^2 + B''A^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Or, si des trois de gauche l'on tire les valeurs

$$(83)\quad A'' = \frac{1}{2}(4A - S)\frac{A'^2}{A^2}, \qquad B'' = \frac{1}{2}(4B - S)\frac{B'^2}{B^2}, \qquad C'' = \frac{1}{2}(4C - S)\frac{C'^2}{C^2},$$

pour les reporter dans les trois autres du groupe de droite, l'on formera les trois équations du premier ordre seulement

$$(84)\quad \begin{cases} (2A-S)B'C' + \frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^2}.\,C^2 + \frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^2}\cdot B^2 = 0, \\ (2B-S)C'A' + \frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^2}.\,A^2 + \frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^2}\cdot C^2 = 0, \\ (2C-S)A'B' + \frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^2}.\,B^2 + \frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^2}\cdot A^2 = 0, \end{cases}$$

qui, étant divisées respectivement par B^2C^2, C^2A^2, A^2B^2, se transformeront dans les suivantes

$$\begin{cases} (2A-S)\frac{B'C'}{B^2C^2} + \frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^4} + \frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^4} = 0, \\ (2B-S)\frac{C'A'}{C^2A^2} + \frac{1}{2}(4C-S)\frac{C'^2}{C^4} + \frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^4} = 0, \\ (2C-S)\frac{A'B'}{A^2B^2} + \frac{1}{2}(4A-S)\frac{A'^2}{A^4} + \frac{1}{2}(4B-S)\frac{B'^2}{B^4} = 0, \end{cases}$$

et ne contiendront plus alors, en fait de dérivées, que celles des inverses des inconnues, attendu qu'elles pourront s'écrire, en les multipliant par 2 :

$$(85)\quad \begin{cases} (4A-2S)(B^{-1})'(C^{-1})' + (4B-S)(B^{-1})'^2 + (4C-S)(C^{-1})'^2 = 0, \\ (4B-2S)(C^{-1})'(A^{-1})' + (4C-S)(C^{-1})'^2 + (4A-S)(A^{-1})'^2 = 0, \\ (4C-2S)(A^{-1})'(B^{-1})' + (4A-S)(A^{-1})'^2 + (4B-S)(B^{-1})'^2 = 0. \end{cases}$$

Sous cette nouvelle forme, on reconnaît dans ce groupe trois équations linéaires et homogènes (au point de vue *algébrique*) en A, B, C, eu égard à la définition de S, qui pourront être substituées pour la détermination des inconnues au groupe de droite des six équations (82), et qui devront nécessairement être compatibles pour qu'il existe une solution du problème : condition qui revient à dire que leur déterminant D devra être nul, du moment que le système de solution $A=0$, $B=0$, $C=0$ est évidemment inadmissible dans la question actuelle. Si donc

l'égalité ainsi posée n'est pas d'ores et déjà identiquement satisfaite, elle constituera dans ce cas une nouvelle équation du premier ordre qu'il faudra adjoindre par conséquent aux trois équations précédentes (85), qui par cette nouvelle condition se réduiront alors à deux seulement. Si, au contraire, cette même égalité $D = 0$ n'est autre chose qu'une simple identité, ce qui signifiera que ces trois mêmes équations ne sont pas distinctes, il y aura lieu de voir si elles se réduisent à deux ou à une seule, et, si l'on tient à conserver θ pour paramètre, de leur adjoindre une ou deux équations, suivant le cas, prises comme l'on voudra dans le groupe de gauche (82), en vue de compléter le système nécessaire à la détermination des trois inconnues A, B, C, puisqu'alors, avec la variable indépendante θ, ces inconnues ne pourront être déterminées à l'aide d'un système du premier ordre seulement.

Il y a donc lieu tout d'abord, soit pour compléter, soit pour préciser simplement la position de la question, de calculer effectivement le déterminant des équations précitées (85).

Si, dans ce but, après y avoir remplacé S par sa valeur de définition $A + B + C$, on les ordonne par rapport à A, B, C, le groupe en question (85) se présentera sous la forme des trois équations linéaires

$$(86) \qquad \left\{\begin{array}{l} L_1A + M_1B + N_1C = 0, \\ L_2A + M_2B + N_2C = 0, \\ L_3A + M_3B + N_3C = 0, \end{array}\right.$$

les valeurs des divers coefficients étant les suivantes :

$$(87) \qquad \left\{\begin{array}{ll} L_1 = \left[(B^{-1})' - (C^{-1})'\right]^2, & \begin{array}{l} M_1 = \left[(B^{-1})' + (C^{-1})'\right]^2 - 4(B^{-1})'^2, \\ N_1 = \left[(C^{-1})' + (B^{-1})'\right]^2 - 4(C^{-1})'^2, \end{array} \\ M_2 = \left[(C^{-1})' - (A^{-1})'\right]^2, & \begin{array}{l} N_2 = \left[(C^{-1})' + (A^{-1})'\right]^2 - 4(C^{-1})'^2, \\ L_2 = \left[(A^{-1})' + (C^{-1})'\right]^2 - 4(A^{-1})'^2, \end{array} \\ N_3 = \left[(A^{-1})' - (B^{-1})'\right]^2, & \begin{array}{l} L_3 = \left[(A^{-1})' + (B^{-1})'\right]^2 - 4(A^{-1})'^2, \\ M_3 = \left[(B^{-1})' + (A^{-1})'\right]^2 - 4(B^{-1})'^2. \end{array} \end{array}\right.$$

Or, si nous convenons de faire, dans cette question seulement, pour faciliter l'écriture des calculs, d'abord

$$(88)\qquad \alpha = (A^{-1})', \qquad \beta = (B^{-1})', \qquad \gamma = (C^{-1})',$$

puis, cela étant admis,

$$(89)\qquad p = \beta - \gamma, \qquad q = \gamma - \alpha, \qquad r = \alpha - \beta,$$

quantités qui vérifieront dès lors identiquement la relation

$$(90)\qquad p + q + r = 0,$$

nous obtiendrons très facilement, avec ces notations, à la place des expressions (87), en même temps que $L_1 = p^2$, pour valeur des deux autres coefficients de la première équation (86),

$$\left\{\begin{array}{l} M_1 = (\beta + \gamma)^2 - 4\beta^2 = (\beta - \gamma)^2 - 4\beta(\beta - \gamma) = p^2 - 4\beta p, \\ N_1 = (\gamma + \beta)^2 - 4\gamma^2 = (\gamma - \beta)^2 + 4\gamma(\beta - \gamma) = p^2 + 4\gamma p, \end{array}\right.$$

en sorte, qu'en remarquant sur la forme (85) que ces trois équations se déduisent les unes des autres par la permutation des trois lettres A, B, C, qui entraine dès lors celle des trois autres lettres α, β, γ, et par suite aussi des trois autres p, q, r, les trois équations en question (86) pourront être représentées par la forme abrégée

$$(91)\qquad p\mathfrak{P} = 0, \qquad q\mathfrak{Q} = 0, \qquad r\mathfrak{R} = 0,$$

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, désignant de nouveau les expressions linéaires

$$(92)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P} = \mathcal{L}_1 A + \mathcal{M}_1 B + \mathcal{N}_1 C, \\ \mathfrak{Q} = \mathcal{L}_2 A + \mathcal{M}_2 B + \mathcal{N}_2 C, \\ \mathfrak{R} = \mathcal{L}_3 A + \mathcal{M}_3 B + \mathcal{N}_3 C, \end{array}\right.$$

dont les différents coefficients auront cette fois pour valeurs

$$(93)\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{L}_1 = p, & \mathcal{M}_1 = p - 4\beta, & \mathcal{N}_1 = p + 4\gamma, \\ \mathcal{L}_2 = q + 4\alpha, & \mathcal{M}_2 = q, & \mathcal{N}_2 = q - 4\gamma, \\ \mathcal{L}_3 = r - 4\alpha, & \mathcal{M}_3 = r + 4\beta, & \mathcal{N}_3 = r; \end{array}\right.$$

et le déterminant D des équations (86) ou (91), qu'il s'agit de calculer, aura donc pour expression

$$(94) \qquad \mathrm{D} = pqr \,.\, \Delta,$$

Δ étant celui des expressions précédentes (93), savoir

$$(95) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{M}_2 & \mathcal{N}_2 \\ \mathcal{L}_3 & \mathcal{M}_3 & \mathcal{N}_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_3\,(\mathcal{M}_1\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1\mathcal{M}_2) \\ + \mathcal{M}_3\,(\mathcal{N}_1\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1\mathcal{N}_2) \\ + \mathcal{N}_3\,(\mathcal{L}_1\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1\mathcal{L}_2). \end{array} \right.$$

Or, on trouvera sans peine, à l'aide de ces valeurs (93),

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_1\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1\mathcal{M}_2 = 4\mathcal{A}, & \mathcal{N}_1\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1\mathcal{N}_2 = 4\mathcal{B}, \\ & \mathcal{L}_1\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1\mathcal{L}_2 = 4\mathcal{C}, \end{array} \right.$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, désignant encore les expressions

$$(97) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = -\beta q + \gamma r + 4\beta\gamma, \\ \mathcal{B} = -\gamma r + \alpha p + 4\gamma\alpha, \\ \mathcal{C} = -\alpha p + \beta q + 4\alpha\beta, \end{array} \right.$$

dont nous représenterons par $\mathcal{S}$ la somme, savoir

$$(98) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 4\,(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) \\ \qquad = 4\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \end{array} \right.$$

et qui pourront alors être écrites plus simplement, à l'aide de cette dernière quantité,

$$(99) \qquad \mathcal{A} = \tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \beta\gamma, \qquad \mathcal{B} = \tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \gamma\alpha, \qquad \mathcal{C} = \tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \alpha\beta.$$

Cela étant admis, l'on trouvera très aisément par le moyen des valeurs (95), (96), et (93),

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\left[\mathcal{A}\mathcal{L}_3 + \mathcal{B}\mathcal{M}_3 + \mathcal{C}\mathcal{N}_3\right] \\ &= 4\left[\mathcal{A}\,(r - 4\alpha) + \mathcal{B}\,(r + 4\beta) + \mathcal{C}r\right] \\ &= 4\left[(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C})\,r - 4\alpha\mathcal{A} + 4\beta\mathcal{B}\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte alors des valeurs (98), (89), et (99),

$$(100) \qquad \Delta = 4\left[\mathcal{S}(\alpha - \beta) - 4\alpha\left(\tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \beta\gamma\right) + 4\beta\left(\tfrac{1}{4}\mathcal{S} + \gamma\alpha\right)\right] = 0;$$

et par conséquent, en vertu de l'égalité (94), le déterminant D des équations (86) ou (85) qu'il s'agissait de calculer sera, lui aussi, identiquement nul.

Nous nous trouvons donc pour ce problème dans le cas d'exception signalé dans l'exposé de notre méthode générale, dans lequel les équations formées par l'élimination des dérivées secondes sont en nombre moindre que celui des inconnues, puisque l'on voit ainsi que les trois équations du premier ordre (84) ou (85), obtenues de prime abord par cette élimination, ne sont pas distinctes, et dès lors sont compatibles, sans qu'il soit nécessaire de leur adjoindre à cet effet aucune condition ou équation nouvelle; et comme par ailleurs les trois mineurs (96) du déterminant Δ ne sont pas identiquement nuls, ainsi qu'il appert des valeurs (99) et (98), il résulte en outre de ce calcul que ces mêmes équations se réduisent non pas à une seule, mais bien à deux équations distinctes.

En conséquence, d'après notre théorie générale, d'une part, si l'on renonce tout d'abord à conserver pour variable indépendante le paramètre thermométrique lui-même, en adoptant pour paramètre géométrique l'une des trois inconnues A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, ces deux équations du premier ordre suffiront alors pour déterminer les deux autres (pp. 64-65), et par conséquent il ne pourra entrer avec cette hypothèse dans les expressions les plus générales de ces inconnues plus de deux constantes essentielles. D'autre part, si l'on tient au contraire à obtenir comme résultat du calcul l'équation de la famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, comme il suffira dès lors d'adjoindre à ces deux équations du premier ordre une seule équation, empruntée au groupe du second ordre conservé (82) ou (83), pour compléter le système nécessaire à la détermination de nos inconnues, d'après ce que nous avons dit, l'ensemble des expressions les plus générales des quatre inconnues A, B, C, et H devra

contenir cette fois un nombre de constantes arbitraires au plus égal à $n+1=4+1=5$ (p. 67), en y comprenant alors obligatoirement les deux constantes σ et τ du paramètre thermométrique (pp. 68-69). Dans un cas comme dans l'autre, d'ailleurs, la constante h ne sera pas, relativement à l'équation de la famille de surfaces, une constante essentielle, du moment que nous n'avons pas disposé à l'avance, ainsi que nous l'avons expliqué, de l'un des coefficients de l'équation proposée $A=0$, ou, ce qui revient au même, du moment que nous avons laissé dans l'expression (76) de A un coefficient indéterminé pour chaque terme (pp. 64 et 66).

Dans cette pensée, partant de ce fait que nous avons déjà remarqué, que le groupe du premier ordre en question (84) ou (85) ne contient, en fait de dérivées, que celles des inverses de A, B, C, nous adopterons dès lors pour inconnues, comme il semble naturel, ces dernières quantités à la place de A, B, C, en les introduisant également dans le groupe de gauche du second ordre (82), à l'aide de formules telles que

$$(101) \qquad (A^{-1})' = \frac{-A'}{A^2}, \qquad (A^{-1})'' = \left(\frac{-A'}{A^2}\right)' = \frac{-A^2A''+2AA'^2}{A^4},$$

qui permettront d'exprimer A' et A'' en fonction de A^{-1}, $(A^{-1})'$, $(A^{-1})''$, et de même pour les deux autres inconnues B et C. A cet effet, développant la première de ces équations (82) de la façon suivante

$$SA'^2 - 2(2AA'^2 - A''A^2) = 0,$$

puis la divisant par A^4, ce qui donnera

$$S\frac{A'^2}{A^4} - 2\frac{2AA'^2 - A^2A''}{A^4} = 0,$$

nous l'écrirons, en vertu des formules précédentes (101), ainsi que les deux autres de gauche (82), sous la forme

$$(102) \left\{ \begin{array}{ll} S(A^{-1})'^2 - 2(A^{-1})'' = 0, & S(B^{-1})'^2 - 2(B^{-1})'' = 0, \\ & S(C^{-1})'^2 - 2(C^{-1})'' = 0. \end{array} \right.$$

Cela fait, revenons au groupe du premier ordre envisagé tout à l'heure, et considérons-le de nouveau sous la forme (91), dans laquelle chaque équation est composée de deux facteurs, différents pour chacune, savoir, p, q, r d'une part, et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ de l'autre. Partant alors de ce fait, que ces trois équations doivent se réduire à deux, nous observerons que l'on pourra satisfaire aux deux équations que l'on aura choisies pour tenir lieu de ce groupe, de trois manières différentes, savoir : ou bien, en prenant dans chacune des deux le premier facteur; ou encore, en prenant dans l'une le premier facteur, et dans l'autre le second; ou enfin, en prenant dans l'une et l'autre le second facteur. Nous allons examiner successivement, mais dans l'ordre inverse de celui où nous les avons énumérés, ces trois modes différents de solution.

1° « *Deux des trois quantités $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sont supposées nulles* ». — Alors la troisième le sera aussi nécessairement en vertu de l'identité $\Delta = 0$ (100), qui exprime que les trois équations $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$, $\mathfrak{R} = 0$ ne sont pas distinctes, et par conséquent l'équation restante (91) se trouvera satisfaite d'elle-même. Récrivant alors, ainsi qu'il suit, le groupe du second ordre (102)

$$(103) \qquad \frac{1}{2}S = \frac{(A^{-1})''}{(A^{-1})'^2} = \frac{(B^{-1})''}{(B^{-1})'^2} = \frac{(C^{-1})''}{(C^{-1})'^2} = \rho',$$

en introduisant pour la symétrie une inconnue auxiliaire ρ, d'une part nous obtiendrons, en intégrant les trois dernières de ces équations,

$$-\frac{1}{(A^{-1})'} = \rho - a, \qquad -\frac{1}{(B^{-1})'} = \rho - b, \qquad -\frac{1}{(C^{-1})'} = \rho - c,$$

ou encore avec les notations (88),

$$(104) \quad \alpha = (A^{-1})' = \frac{1}{a-\rho}, \qquad \beta = (B^{-1})' = \frac{1}{b-\rho}, \qquad \gamma = (C^{-1})' = \frac{1}{c-\rho};$$

et, d'autre part, les deux équations qui constituent l'hypothèse particulière actuelle, soit $\mathfrak{P} = 0$ et $\mathfrak{Q} = 0$, par exemple, étant

mises à l'aide des expressions (96) sous la forme de rapports égaux, fourniront, eu égard à la valeur précédente (103) de S, la suite d'égalités

$$(105)\qquad \frac{A}{\mathcal{A}} = \frac{B}{\mathcal{B}} = \frac{C}{\mathcal{C}} = \frac{A+B+C}{\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \frac{2\rho'}{\mathcal{S}},$$

d'où nous pourrons tirer les valeurs de A, B, C, ou mieux celles de leurs inverses, savoir

$$(106)\qquad A^{-1} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{A}}\frac{1}{2\rho'}, \qquad B^{-1} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{B}}\frac{1}{2\rho'}, \qquad C^{-1} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{C}}\frac{1}{2\rho'}.$$

Or, si l'on fait pour un instant

$$a + b + c = s, \qquad (a-\rho)(b-\rho)(c-\rho) = \mathrm{F}(\rho),$$

la seconde expression (98) et les suivantes (99) devenant, lorsque l'on y introduira les valeurs actuelles (104) de α, 6, γ,

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{4}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)}(a-\rho+b-\rho+c-\rho) = 4\frac{s-3\rho}{\mathrm{F}(\rho)},\\ \mathcal{A} &= \frac{s-3\rho}{\mathrm{F}(\rho)} + \frac{1}{(b-\rho)(c-\rho)} = \frac{1}{\mathrm{F}(\rho)}(s-3\rho+a-\rho) = \frac{s+a-4\rho}{\mathrm{F}(\rho)},\\ \mathcal{B} &= \frac{+b-4\rho}{\mathrm{F}(\rho)}. \qquad \mathcal{C} = \frac{s+c-4\rho}{\mathrm{F}(\rho)}, \end{aligned}\right.$$

les valeurs précédentes (106) de A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} seront donc, étant exprimées à l'aide de l'inconnue auxiliaire ρ et de sa dérivée,

$$(107)\qquad A^{-1} = \frac{2(s-3\rho)}{(s+a-4\rho)\rho'}, \quad B^{-1} = \frac{2(s-3\rho)}{(s+b-4\rho)\rho'}, \quad C^{-1} = \frac{2(s-3\rho)}{(s+c-4\rho)\rho'},$$

et par conséquent, si l'on introduit ces valeurs dans les trois intégrales premières (104) obtenues tout à l'heure, l'on voit que la seule inconnue ρ qui nous reste actuellement à déterminer

devra vérifier simultanément trois équations différentielles du second ordre du même type (la variable indépendante étant θ, par hypothèse), savoir

$$(108) \qquad \frac{d}{d\theta}\left[\frac{2(s-3\rho)}{(s+g-4\rho)\frac{d\rho}{d\theta}}\right]=\frac{1}{g-\rho},$$

dans laquelle on devra faire successivement $g=a, b, c$. Or cette dernière équation étant évidemment de la forme

$$\mathrm{M}\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\mathrm{N}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=0,$$

M et N étant des fonctions de ρ, s, et g, il est clair que, sauf la solution banale $\frac{d\rho}{d\theta}=0$ ou $\rho=const.$ qui ne saurait être admise dans la question actuelle, car elle donnerait à la fois par les égalités (105) ($\mathcal{S}$ étant alors une constante différente de zéro), $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=0$, toutes les solutions propres de cette dernière équation (qu'elles soient générales, particulières, ou singulières), seront de la forme $\rho=\mathcal{F}(\theta, s, g)$, et par conséquent ρ ne pourra satisfaire simultanément aux trois équations différentes du type (108) qu'à la condition de supposer en même temps $g=a=b=c$. Et comme cette supposition rendra évidemment égales les trois valeurs (107), et par suite aussi leur trois dérivées α, β, γ, ou, ce qui revient au même, entraînera les conditions $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}$, et $p=0$, $q=0$, $r=0$, il est clair dès maintenant, d'une part, que le premier mode de solution actuellement examiné ne fournira qu'une solution particulière du problème, composée d'une famille de sphères, et, d'autre part, que cette solution, bien que rencontrée ainsi par une voie distincte, sera renfermée également à titre de cas particulier dans celle correspondant à l'hypothèse 3°, que nous examinerons dans un instant.

Et, en effet, si l'on fait attention que par les suppositions

$$a=b=c=g, \qquad s=a+b+c=3g,$$

les expressions (107) et, par suite, chacune des intégrales premières (104), se réduisent respectivement aux suivantes

$$(109)\qquad A^{-1}=B^{-1}=C^{-1}=\frac{2.3(g-\rho)}{4(g-\rho)\rho'}=\frac{3}{2\rho'},\qquad \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho'}\right)'=\frac{1}{g-\rho},$$

c'est-à-dire, en développant cette dernière équation, et changeant les signes,

$$\frac{3}{2}\frac{\rho''}{\rho'^2}=\frac{1}{\rho-g}\qquad\text{ou}\qquad \frac{\rho''}{\rho'}-\frac{2}{3}\frac{\rho'}{\rho-g}=0,$$

on trouvera dès lors, en l'intégrant une première fois,

$$\rho'(\rho-g)^{-\frac{2}{3}}=3\sigma\qquad\text{ou}\qquad \frac{1}{3}(\rho-g)^{\frac{1}{3}-1}d\rho=\sigma d\theta,$$

et, en intégrant de nouveau,

$$(\rho-g)^{\frac{1}{3}}=\sigma\theta+\tau\qquad\text{ou}\qquad \rho=g+(\sigma\theta+\tau)^3,$$

d'où l'on tirera enfin, en ayant égard aux valeurs actuelles (109),

$$\rho'=3\sigma(\sigma\theta+\tau)^2\qquad\text{et}\qquad A^{-1}=B^{-1}=C^{-1}=\frac{1}{2\sigma(\sigma\theta+\tau)^2}.$$

Et dès lors, en se reportant aux expressions (76) de Λ et (79) de H, l'équation $\Lambda=0$, obtenue comme solution, pouvant être écrite dans ce cas

$$x^2+y^2+z^2=\frac{h}{2\sigma(\sigma\theta+\tau)^2},$$

l'on voit qu'il suffira de faire en même temps $a=0$, $b=0$, $c=0$, et $h=2\sigma$ pour retrouver littéralement l'équation (75), déjà rencontrée en appliquant directement la méthode de recherches à une famille quelconque de sphères : résultat qui constitue une confirmation, aussi complète qu'on saurait le désirer, de l'exactitude des raisonnements et des calculs qui nous ont amené jusqu'à ce point du développement de la question.

2° « *L'une des trois quantités $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ est supposée nulle, en même temps que l'une des trois autres* p, q, r ». — Dans ce cas, pour que l'équation restante (91) soit vérifiée en même temps que les deux autres choisies pour point de départ, il faudra encore égaler à zéro, soit le premier facteur, soit le second de cette même équation. Or il est clair que cette dernière hypothèse est bien compatible avec les précédentes, mais qu'elle nous ramènera simplement au cas antérieur 1°, du moment que deux des trois quantités $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ seront alors supposées nulles, et que cette hypothèse entraine forcément, comme nous l'avons vu tout à l'heure, les trois conditions $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. Il suffira donc d'examiner l'autre mode de solution, consistant à annuler le premier facteur p, q, r de l'équation restante (91).

Comme dans ce cas, au contraire, deux des trois quantités p, q, r seront alors supposées nulles, l'on voit déjà que les solutions fournies par cette hypothèse 2° ne pourront être que des cas particuliers de celles fournies par l'hypothèse 3°, puisqu'elles supposent déjà les données de celle-ci, mais toutefois avec une équation en plus, savoir l'une des trois équations $\mathfrak{P} = 0$, ou $\mathfrak{Q} = 0$, ou $\mathfrak{R} = 0$, laquelle constitue évidemment dès lors une restriction de ce dernier cas.

Maintenant, pour savoir en quoi consiste la restriction correspondante de la solution, d'une part le tableau (93) donnera alors, pour les valeurs des coefficients des trois équations en question,

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{L}_1 = 0, & \mathfrak{M}_1 = -4\beta, & \mathfrak{N}_1 = 4\gamma, \\ \mathfrak{L}_2 = 4\alpha, & \mathfrak{M}_2 = 0, & \mathfrak{N}_2 = -4\gamma, \\ \mathfrak{L}_3 = -4\alpha, & \mathfrak{M}_3 = 4\beta, & \mathfrak{N}_3 = 0, \end{array}\right.$$

et, d'autre part, l'hypothèse actuelle $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ équivaut évidemment, d'après les définitions (89), aux deux conditions $\alpha = \beta = \gamma$, la valeur commune de ces dérivées ne pouvant être nulle, car alors le paramètre disparaîtrait totalement de l'équation proposée $\Lambda = 0$. Et dès lors les trois équations

$\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q} = 0$, $\mathfrak{R} = 0$, se réduisant par là simplement à celles-ci

$$4\alpha(B - C) = 0, \qquad 4\beta(C - A) = 0, \qquad 4\gamma(A - B) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$B = C, \qquad C = A, \qquad A = B,$$

celle de ces trois équations que l'on aura admise pour hypothèse, ainsi qu'il est dit dans l'énoncé de ce cas 2°, exprimera simplement que la surface est de révolution, tout en appartenant à la catégorie qui constituera la solution du cas suivant 3°, lequel, nous restant seul maintenant à examiner, devra forcément contenir la solution la plus générale du problème, et renfermer encore à titre de cas particuliers, d'après ce que nous venons de voir, les solutions propres aux cas 1° et 2°.

3° « *Deux des trois quantités* p, q, r *sont supposées nulles* ». — Dans ce cas la troisième le sera aussi forcément, en vertu de l'identité (90), et par conséquent l'équation restante (91) sera encore satisfaite d'elle-même.

Dans cette dernière hypothèse, le groupe du premier ordre, formé par l'élimination des dérivées secondes, équivaudra donc simplement aux deux conditions $\alpha = \beta = \gamma$, ou, en y introduisant encore une inconnue auxiliaire ρ,

$$(110) \qquad (A^{-1})' = (B^{-1})' = (C^{-1})' = \rho',$$

lesquelles n'admettront alors évidemment aucune autre solution que leur intégrale générale, savoir

$$(111) \qquad A^{-1} = a^2 + \rho, \qquad B^{-1} = b^2 + \rho, \qquad C^{-1} = c^2 + \rho,$$

d'où nous tirerons

$$(112) \qquad A = \frac{1}{a^2 + \rho}, \qquad B = \frac{1}{b^2 + \rho}, \qquad C = \frac{1}{c^2 + \rho},$$

et

$$(113)\qquad S = A + B + C = \frac{1}{a^2+\rho} + \frac{1}{b^2+\rho} + \frac{1}{c^2+\rho}.$$

Et comme, d'autre part, l'introduction de la même quantité (110) dans l'une quelconque des trois équations du second ordre (102) les réduirait toutes indistinctement à celle-ci

$$S\rho'^2 - 2\rho'' = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho''}{\rho'} = \frac{1}{2}S\rho',$$

l'on voit, en remettant dans la dernière de ces égalités à la place de S sa valeur précédente (113), que l'inconnue auxiliaire ρ sera déterminée à son tour, en fonction de la variable indépendante θ, par l'équation du second ordre

$$(114)\qquad \frac{\rho''}{\rho'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\rho} + \frac{1}{b^2+\rho} + \frac{1}{c^2+\rho}\right)\rho',$$

intégrable évidemment elle-même par simple quadrature.

Cela posé, si l'on ne tient pas tout d'abord à obtenir pour résultat du calcul l'équation de la famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, l'on pourra, sans prendre la peine d'intégrer cette dernière équation, adopter pour paramètre géométrique la fonction ρ elle-même qui résulterait de cette intégration, et, en écrivant donc λ à la place de ρ, les valeurs cherchées des coefficients de la forme proposée (76) de A seront

$$(115)\qquad A = \frac{1}{a^2+\lambda}, \qquad B = \frac{1}{b^2+\lambda}, \qquad C = \frac{1}{c^2+\lambda}, \qquad H = h.$$

Et dès lors il ressortira, avec une complète rigueur, comme conclusion de l'analyse et de la discussion un peu minutieuses que nous venons de présenter, que non seulement la solution la plus générale, mais réellement aussi *la seule* de la question proposée, consistera dans l'équation

$$(116)\qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = h,$$

laquelle renferme en apparence quatre constantes arbitraires, nombre égal à celui des coefficients de l'équation proposée $\Lambda = 0$, mais parmi lesquelles il n'y en a en réalité que deux qui sont essentielles (*), résultat parfaitement conforme aux prévisions déduites de notre théorie, que nous avions formulées un peu plus haut (p. 88).

Si, au contraire, l'on veut poursuivre jusqu'au bout la solution de la question dans les termes mêmes où elle a été posée, c'est-à-dire si l'on tient à obtenir l'équation de la famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique, il restera encore à déterminer l'inconnue auxiliaire ρ par l'intégration de l'équation du second ordre (114). A cet effet, convenant dès maintenant de poser pour tout le cours de ce travail

(117) $$f(\rho) = (a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho),$$

d'où, par suite,

$$lf(\rho) = l(a^2 + \rho) + l(b^2 + \rho) + l(c^2 + \rho),$$

et

(118) $$\frac{d.lf(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{a^2 + \rho} + \frac{1}{b^2 + \rho} + \frac{1}{c^2 + \rho},$$

(*) En effet, si l'on divise cette équation (116) par h, et qu'on l'écrive

$$\frac{x^2}{h(a^2 + \lambda)} + \frac{y^2}{h(b^2 - a^2) + h(a^2 + \lambda)} + \frac{z^2}{h(c^2 - a^2) + h(a^2 + \lambda)} = 1,$$

puis que l'on y fasse ensuite

$$h(a^2 + \lambda) = \lambda', \qquad h(b^2 - a^2) = b'^2, \qquad h(c^2 - a^2) = c'^2,$$

et que l'on y efface enfin les accents, il est clair qu'elle se transformera dans la suivante

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

analogue à celle adoptée par Lamé, comme point de départ, pour l'étude de son système triplement isotherme du second ordre. (*Voir leçons sur les Fonctions Inverses*, §§ XIII et XXXV, pages 17 et 45.)

puis récrivant en conséquence cette même équation (114) sous la forme

$$(119)\qquad \frac{d.l\rho'}{d\theta}=\frac{1}{2}\frac{d.lf(\rho)}{d\rho}\frac{d\rho}{d\theta}\qquad \text{ou}\qquad d.l\rho'=\frac{1}{2}\frac{d.lf(\rho)}{d\rho}d\rho,$$

nous trouverons, en l'intégrant une première fois,

$$l\rho'=l.f(\rho)^{\frac{1}{2}}+l\sigma\qquad \text{ou}\qquad \frac{d\rho}{d\theta}=\sigma\sqrt{f(\rho)},$$

ou encore, en séparant les variables, et remettant à la place de $f(\rho)$ sa valeur de définition (117),

$$(120)\qquad \sigma d\theta=\frac{d\rho}{\sqrt{(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho)}}.$$

Nous effectuerons un peu plus loin sur cette dernière équation la seconde intégration, qui nous reste à accomplir pour avoir l'expression de l'inconnue auxiliaire ρ, laquelle étant reportée dans les expressions ci-dessus (112), fournira la réponse définitive à la question proposée. Mais nous nous contenterons pour l'instant, à l'exemple de Lamé (*), de l'indiquer par une simple quadrature en écrivant l'égalité

$$(121)\qquad \sigma\theta+\tau=\int^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho)}},$$

laquelle suffit à montrer déjà que cette fonction ρ, qui n'est autre que le paramètre λ de la famille déjà obtenue (116), s'exprimera en fonction du paramètre thermométrique θ par des fonctions elliptiques de première espèce. Nous croyons toutefois devoir faire remarquer sans plus attendre, que le nombre des constantes, dans la solution ainsi obtenue, est bien en réalité celui que notre théorie nous avait fixé comme nombre maximum de ces mêmes constantes.

(*) *Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc. (§ XXXV, (page 46), formules (3) et (3bis).

En effet, l'on voit sans peine que, parmi les trois constantes a^2, b^2, c^2, qui figurent dans les expressions (112) ou (115), il y en a une qui est surabondante, relativement à ces expressions des coefficients elles-mêmes, car il est clair que l'une de ces constantes est amenée dans les résultats uniquement par l'équation additionnelle, que nous avons posée à la suite des deux équations du premier ordre (110) pour définir l'inconnue auxiliaire ρ, dont l'introduction, visant simplement un but de symétrie, n'était nullement nécessaire pour pouvoir intégrer les deux équations en question (110), et former ensuite de la même façon une équation toute semblable à (114) pour déterminer la troisième inconnue. En d'autres termes, si l'on aime mieux, nous eussions pu tout aussi bien écrire les mêmes équations (110) en entendant que ρ y désigne, non plus une inconnue auxiliaire, mais bien l'une des trois inconnues A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} elles-mêmes, la première par exemple (*), auquel cas l'intégration de ces mêmes équations, qui n'eussent constitué alors en réalité que deux équations seulement, nous eût donné, sans introduire pour cela aucune restriction, les valeurs

$$A^{-1} = \rho, \qquad B^{-1} = b^2 + \rho, \qquad C^{-1} = c^2 + \rho,$$

qui ne diffèrent des précédentes (111) que par l'absence de la constante a^2.

(*) C'est-à-dire, en fait, que nous eussions pris pour paramètre géométrique λ ou ρ l'inconnue A^{-1} elle-même, ou, ce qui est la même chose, fait après coup $A = \frac{1}{\lambda}$ dans l'équation $A = 0$, ainsi que nous l'indiquons dans l'Exposé général de notre méthode, pour le cas d'exception dans lequel nous nous trouvons (p. 65). Mais ce serait une grave erreur de croire, en raison de la simplicité extrême de forme qu'acquerraient ainsi ces équations, devenues par ce fait $1 = (B^{-1})' = (C^{-1})'$, et de la facilité avec laquelle elles s'intègrent alors, que l'on aurait eu un motif ou un avantage quelconque, pour appliquer notre méthode, à introduire préalablement la même hypothèse dans l'expression proposée (76) de A, qui, égalée à zéro, constitue la famille de surfaces envisagée. En effet, tout d'abord, aucune considération rationnelle n'indiquait spécialement à l'avance de, préférence à tout autre, le choix pour l'un des coefficients A, B, C de cette fonction simple $\frac{1}{\lambda}$ qui procurera seule la simplification en question. Et d'autre part, aussi bien avec ce choix qu'avec tout autre, l'on eût rompu la symétrie essentielle entre les inconnues A, B, C, c'est-à-dire au fond entre les trois axes rectilignes, sans laquelle il eût été bien malaisé d'arriver à découvrir les deux points capitaux qui forment comme le nœud de tout ce calcul, à savoir, d'abord que les trois équations du premier ordre (84) se réduisent à deux, et surtout qu'elles sont composées chacune de *deux facteurs*, ainsi que le montre la forme (91) de ces mêmes équations.

Cette constante ne devant donc pas entrer en ligne de compte comme surérogatoire, on voit ainsi, en rapprochant les expressions (121) et (112), que ces trois dernières ne contiendront en réalité que quatre constantes arbitraires, savoir σ, τ, b^2, et c^2, et par conséquent, qu'étant jointes à la valeur (79) $H = h$ du dernier coefficient, elles renfermeront bien ensemble seulement les $4 + 1 = 5$ constantes prévues par notre théorie (p. 88). C'est au reste le fait qui apparaîtra *littéralement*, lorsqu'après avoir effectué la dernière intégration relative à l'équation (120), nous aurons substitué la valeur qui en résultera pour ρ dans les expressions précitées (112) des coefficients qu'il s'agissait de déterminer.

L'équation (116) des surfaces homofocales, constituant ainsi la seule solution de la question proposée, en contient donc toutes les solutions possibles, soit à titre de cas particuliers, comme la sphère et les surfaces de révolution que nous avons rencontrées expressément d'ailleurs dans notre calcul comme solution des deux cas 1° et 2°, soit à titre de cas limites, correspondant à des valeurs nulles ou infinies des constantes. Il convient donc, avant d'aborder le problème dans toute sa généralité, d'examiner rapidement quels pourront être ces cas limites, c'est-à-dire quelles variétés de surfaces du second ordre l'on devra considérer comme renfermées dans la solution ci-dessus (116).

A cet effet, faisant tout d'abord $h = 0$, dans cette équation (116), nous obtiendrons en premier lieu les cônes homofocaux

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 0; \tag{122}$$

puis remarquant que, si dans cette même équation (116), prise avec l'hypothèse $h = 1$, l'on change a^2, b^2, λ, et z, respectivement en cp, cq, $c\lambda$, et $z - c$, et qu'on écrive en même temps $\frac{c^2 + c\lambda}{c(c+\lambda)}$ à la place de 1 dans le second membre, ce qui la tranformera dans la suivante

$$\frac{x^2}{c(p + \lambda)} + \frac{y^2}{c(q + \lambda)} + \frac{(z - c)^2}{c(c + \lambda)} = \frac{c^2 + c\lambda}{c(c + \lambda)},$$

ou ce qui est la même chose, en réduisant, puis multipliant par c, dans celle-ci

$$(123) \qquad \frac{x^2}{p+\lambda}+\frac{y^2}{q+\lambda}+\frac{z^2}{c+\lambda}=\frac{2z+\lambda}{1+\frac{\lambda}{c}},$$

cette même équation se réduira ensuite, en y faisant $c=\infty$, à celles des paraboloïdes homofocaux

$$(124) \qquad \frac{x^2}{p+\lambda}+\frac{y^2}{q+\lambda}=2z+\lambda,$$

laquelle doit être considérée ainsi comme renfermée à titre de cas limite dans celle précédemment obtenue (116). Or le simple changement de notation, à l'aide duquel cette équation (116) s'est trouvée ainsi transformée dans l'équation (123), n'ayant d'autre influence sur l'expression du rapport $\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}$, que de multiplier par $\frac{1}{c}$ la valeur de ce rapport, il est clair que quelque valeur que l'on attribue à c la famille de surfaces n'aura pas cessé d'être isotherme, et par suite l'équation (124) des paraboloïdes homofocaux est encore une solution du problème.

Et de même, il est clair que, si l'on fait grandir indéfiniment l'une des constantes a^2, b^2, c^2 dans l'équation (116), ou bien p ou q dans cette dernière (124) les deux cylindres ainsi obtenus, soient par exemple

$$(125) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=h, \qquad \text{et} \qquad \frac{y^2}{q+\lambda}=2z+\lambda,$$

qui seront alors elliptique ou hyperbolique quant au premier, et parabolique quant au second, seront encore deux solutions limites renfermées implicitement dans la solution précédente (116).

Il nous sera facile à présent de faire disparaître la restriction, que nous avons apportée tout d'abord à l'énoncé du problème de l'isothermie pour les surfaces du second ordre, et de voir à quelles

conclusions nous conduirait notre méthode, si nous l'appliquions à l'équation la plus générale du second ordre, en prenant, dans l'équation $\Lambda = 0$, pour la fonction Λ, au lieu de la forme très particulière (76), la forme générale à dix coefficients

$$(126)\quad \Lambda = \mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 + \mathcal{C}z^2 + 2\mathcal{D}yz + 2\mathcal{E}zx + 2\mathcal{F}xy + 2\mathcal{G}x + 2\mathfrak{H}y + 2\mathcal{K}z + \mathcal{I},$$

de manière à ne plus rien préjuger relativement aux centres et aux plans principaux des différentes surfaces composant une même famille.

En effet, introduisant pour cela l'hypothèse de $m = 2$, dans les conclusions de notre théorie pour le cas le plus général (conclusions qu'il sera aisé de vérifier sur ce cas simple), nous verrons, en premier lieu, que le premier membre de notre équation générale (53) sera dans le cas actuel un polynome complet de degré $3.2 - 2 = 4$, dont le nombre de termes sera par conséquent de $\frac{5.6.7}{1.2.3} = 35$; et partant de là, si l'on applique de point en point la méthode que nous avons indiquée, comme l'élimination de toutes les dérivées secondes entre les 35 équations du second ordre que l'on sera ainsi conduit à poser, fournira un système complet du premier ordre, c'est-à-dire un système de dix équations simultanées distinctes, entre les dix inconnues $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... $\mathcal{I}$, et leurs dérivées premières (*), l'on sera donc

(*) On formera précisément par cette voie, en effet, le système *normal* du premier ordre, auquel sont astreintes à satisfaire nos dix inconnues, savoir

$$\left\{\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{A}' + \mathcal{A}^2 + \mathcal{F}^2 + \mathcal{E}^2 = 0, \\
\mathcal{B}' + \mathcal{B}^2 + \mathcal{D}^2 + \mathcal{F}^2 = 0, \\
\mathcal{C}' + \mathcal{C}^2 + \mathcal{E}^2 + \mathcal{D}^2 = 0,
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
\mathcal{D}' + (\mathcal{B} + \mathcal{C})\mathcal{D} + \mathcal{E}\mathcal{F} = 0, \\
\mathcal{E}' + (\mathcal{C} + \mathcal{A})\mathcal{E} + \mathcal{F}\mathcal{D} = 0, \\
\mathcal{F}' + (\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{F} + \mathcal{D}\mathcal{E} = 0,
\end{array} \\
\multicolumn{2}{c}{\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{G}' + \mathcal{A}\mathcal{G} + \mathcal{F}\mathfrak{H} + \mathcal{E}\mathcal{K} = 0, \\
\mathfrak{H}' + \mathcal{B}\mathfrak{H} + \mathcal{D}\mathcal{K} + \mathcal{F}\mathcal{G} = 0, \\
\mathcal{K}' + \mathcal{C}\mathcal{K} + \mathcal{E}\mathcal{G} + \mathcal{D}\mathfrak{H} = 0,
\end{array}\right.} \\
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{I}' + \mathcal{G}^2 + \mathfrak{H}^2 + \mathcal{K}^2 = 0,}
\end{array}\right.$$

assuré par là, que l'ensemble des expressions les plus générales de ces inconnues ne pourra renfermer un nombre de constantes arbitraires supérieur à dix, c'est-à-dire que ce nombre sera au plus égal, ainsi que nous l'avons dit, à celui des coefficients de l'expression proposée (126) de A (p. 64). Or, cette conclusion nous suffit sans qu'il soit nécessaire d'intégrer le système en question, pour obtenir immédiatement la solution la plus générale demandée.

Il nous est très facile, en effet, en partant des résultats que nous avons obtenus tout à l'heure, de former de toutes pièces une solution du problème renfermant précisément ce même nombre de dix constantes arbitraires, car si, désignant toujours par A, B, C les expressions rencontrées tout à l'heure (115), nous transformons à l'aide d'un système de coordonnées rectangulaires quelconques

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x'_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z,\\ y' &= y'_0 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,\\ z' &= z'_0 + \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,\end{aligned}\right.$$

l'équation de la famille de surfaces

$$(127)\qquad \mathrm{A}x'^2 + \mathrm{B}y'^2 + \mathrm{C}z'^2 = h,$$

que nous venons d'obtenir pour solution de la question précédente, ce qui la changera dans la suivante

$$(128)\quad \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{D}yz + \mathfrak{E}zx + 2\mathfrak{F}xy + 2\mathfrak{G}x + 2\mathfrak{H}y + 2\mathfrak{K}z + \mathfrak{J} = 0,$$

---

dont les dix équations se partagent, comme cela doit être, en quatre groupes (trois formés de trois équations, et un d'une seule) qui se reproduisent séparément par l'échange des trois équations entre elles, ou des trois derniers termes entre eux pour la dernière, lorsque l'on y permute les trois axes coordonnés, c'est-à-dire en fait *simultanément* les trois groupes $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, et $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{K})$.

Nous montrons dans la Note I de l'Appendice, comment on peut arriver, malgré la complication des calculs, à former effectivement ces équations qui représentent les dix équations figurées par le type (15) de cette Note, traduites dans les notations actuelles, à l'aide de la *clef* fournie par le tableau (41) que l'on trouvera en fin de la même Note.

dans laquelle les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... $\mathcal{J}$, auront les valeurs

$$
(129)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{A} = A\alpha^2 + B\alpha'^2 + C\alpha''^2, \quad &&\mathcal{D} = A\beta\gamma + B\beta'\gamma' + C\beta''\gamma'',\\
&\mathcal{B} = A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2, \quad &&\mathcal{E} = A\gamma\alpha + B\gamma'\alpha' + C\gamma''\alpha'',\\
&\mathcal{C} = A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2, \quad &&\mathcal{F} = A\alpha\beta + B\alpha'\beta' + C\alpha''\beta'',\\
&&&\mathcal{G} = A\alpha x'_0 + B\alpha' y'_0 + C\alpha'' z'_0,\\
&&&\mathcal{H} = A\beta x'_0 + B\beta' y'_0 + C\beta'' z'_0,\\
&&&\mathcal{K} = A\gamma x'_0 + B\gamma' y'_0 + C\gamma'' z'_0,\\
&&&\mathcal{J} = A x_0'^2 + B y_0'^2 + C z_0'^2 - h,
\end{aligned}
\right.
$$

l'expression du rapport $\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}$ n'étant pas altérée par une transformation quelconque de coordonnées, en vertu de la propriété caractéristique des invariants différentiels Δ_1 et Δ_2, il est clair qu'après cette transformation, la famille de surfaces (127) n'aura pas cessé d'être isotherme. Or, si l'on se rappelle que les neuf cosinus α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', sont liés par six relations, en sorte qu'il en reste trois de réellement arbitraires, on voit que l'équation (128) comprendra bien alors dans l'expression de ses coefficients (129) dix constantes réellement arbitraires, savoir les trois cosinus en question, x'_0, y'_0, z'_0, a^2, b^2, c^2, et h. La solution la plus générale relative au problème de l'isothermie pour les surfaces du second ordre, envisagé sans restriction, ne diffère donc pas essentiellement de celle obtenue pour le problème particulier précédemment examiné; d'où il suit que les solutions singulières, s'il en existe, devront être également identiques au fond pour les deux problèmes, puisqu'elles se déduisent précisément de la solution la plus générale à l'aide d'une règle fixe et connue (*), et comme celui que nous avons traité tout d'abord ne comporte aucune solution de ce genre, ainsi que nous l'avons rigoureusement démontré, le problème le plus général en question ne saurait en admettre non plus.

Par conséquent le type (116) des surfaces homofocales, en y

(*) Voir JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, t. III, § 10 (pp. 14-16).

comprenant comme cas limites les cônes (122), les paraboloïdes (124), et les cylindres (125) (*), représentent bien de nouveau, non seulement la solution la plus générale, mais encore la *seule* solution, du problème de l'isothermie relativement à la classe si importante des Surfaces du Second Ordre.

IV° (*Type particulier d'Ordre supérieur*). — Enfin, comme exemple des cas où la méthode de critérium que nous avons indiquée fournit comme solution du problème une conclusion négative, prenons en terminant, pour l'équation $\lambda = 0$, l'équation de degré m dans laquelle λ serait la fonction très simple

$$\lambda = Ax^m + By^m + Cz^m - h,$$

les trois coefficients A, B, C étant supposés expressément tous trois différents de zéro, et h désignant encore comme dans le résultat obtenu tout à l'heure une simple constante demeurant arbitraire. Cette dernière expression donnant alors

$$\left\{\begin{aligned}
&\lambda' = A'x^m + B'y^m + C'z^m, \qquad \lambda'' = A''x^m + B''y^m + C''z^m,\\
&\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda'}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\lambda'}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\lambda'}{\partial z} = m^2(AA'x^{2m-2} + BB'y^{2m-2} + CC'z^{2m-2}),\\
&\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 = m^2\,(A^2x^{2m-2} + B^2y^{2m-2} + C^2z^{2m-2}),\\
&\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} = m(m-1)\,(Ax^{m-2} + By^{m-2} + Cz^{m-2}),
\end{aligned}\right.$$

en reportant ces valeurs dans notre équation générale (53), et procédant ensuite à un classement judicieux des différents

(*) Nous ne jugeons utile de mentionner ici expressément que les seuls cas limites, ou en quelque sorte *asymptotiques*, qui correspondent à des valeurs nulles ou infinies des constantes, et non les simples cas particuliers, tels que la sphère ou les surfaces de révolution, obtenus en supposant dans la solution générale (116), ou dans les précédentes (122) ou (125), les trois constantes a^2, b^2, c^2, ou deux seulement égales entre elles, bien que Lamé les fasse figurer individuellement dans l'énumération et l'examen déjà mentionnés dans la note de la page 77. (LAMÉ, *Leçons sur les Fonctions Inverses*, pages 8-11, et 19-26.)

termes, on obtiendra sans peine pour cette même équation dans ce second exemple, en n'écrivant qu'un coefficient pour chaque type, la suivante

$$
\begin{array}{l}
A\{m(A''+TA')A-(m+1)A'^2\}x^{3m-2}+B\{\;\ldots\;\}y^{3m-2}+C\{\;\ldots\;\}z^{3m-2} \\
+\big[B\{m(C''+TC')B-(m+1)B'C'\}y^{m-2}+C\{m(B''+TB')C-(m+1)C'B'\}z^{m-2}\big]y^m z^m \\
+\big[C\{\ldots\quad\ldots\}z^{m-2}+A\{\ldots\quad\ldots\}x^{m-2}\big]z^m x^m \\
+\big[A\{\ldots\quad\ldots\}x^{m-2}+B\{\ldots\quad\ldots\}y^{m-2}\big]x^m y^m \\
+(m-1)\big[(B+C)A'^2x^4+\ldots+(B+C+2A)B'C'y^2z^2+\ldots\big]x^{m-2}y^{m-2}z^{m-2}=0,
\end{array}
$$

laquelle reproduit bien effectivement, en y faisant $m=2$ et $T=0$, notre équation (81) de l'exemple précédent. Seulement, lorsque l'on supposera $m>2$, il est évident que les différents coefficients que nous avons fait ressortir, appartiendront tous à des termes réellement distincts en x, y, z (circonstance qui n'a plus lieu pour $m=1$ et $m=2$); car ceux de la première ligne de cette dernière équation ne contiennent qu'une variable seulement, ceux des trois lignes suivantes deux variables, et ceux de la dernière ligne les trois variables à la fois. D'où il suit qu'ils devront être égalés tous à zéro séparément, et que notre méthode nous conduit ainsi à poser entre les trois coefficients inconnus A, B, C, les quinze équations, dont les neuf premières du second ordre, et les six autres du premier ordre seulement, dont les types seront

$$
(130)\quad \left\{
\begin{array}{l}
m(A''+TA')A-(m+1)A'^2=0,\ldots \\
(m+1)B'C'=m(C''+TC')B=m(B''+TB')C,\ldots \\
(B+C)A'^2=0,\ldots(B+C+2A)B'C'=0,\ldots
\end{array}
\right.
$$

Or l'élimination des trois quantités $(A''+TA')$, $(B''+TB')$, $(C''+TC')$, entre les neuf premières équations donnant immédiatement dans ces conditions, du moment que A, B, C ne peuvent être supposés nuls,

$$
BC'-CB'=0,\ldots \qquad \text{ou} \qquad \frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=\rho,
$$

la valeur ρ de ces derniers rapports ne pouvant elle-même être supposée nulle, sans réduire simultanément les trois coefficients A, B, C à de simples constantes, on voit que la nouvelle élimination des trois dérivées A′, B′, C′ entre ces dernières équations et celle de la dernière ligne (130) conduira forcément aux six équations

$$(B + C) A^2 = 0, \dots \quad (B + C + 2A) BC = 0, \dots$$

qui ne sauraient évidemment être satisfaites que par des valeurs constantes des coefficients A, B, C (*), en sorte que l'équation $A = 0$ représenterait alors une surface particulière, et non plus une famille de surfaces. D'où l'on peut affirmer en toute certitude, que de quelque façon que l'on prenne les trois coefficients A, B, C, et la constante h, il sera impossible que l'équation

$$Ax^m + By^m + Cz^m = h,$$

représente une famille isotherme de surfaces, sauf pour les deux cas exceptionnels de $m = 1$ et $m = 2$, examinés précédemment.

Cette conclusion, étant rapprochée de la forme d'équation (57), que nous avons obtenue plus haut pour la solution la plus générale du problème relative au premier degré, met en évidence ce fait intéressant, qui n'avait sans doute pas encore été signalé, à savoir que c'est *exclusivement* pour la valeur $m = 2$ que la forme d'équation

$$\frac{x^m}{\alpha + \lambda} + \frac{y^m}{6 + \lambda} + \frac{z}{\gamma + \lambda} = 1,$$

α, 6, γ étant des constantes *supposées différentes*, peut fournir une famille isotherme de surfaces, en sorte que le type analytique des surfaces homofocales du second ordre, constitue en réalité, au point de vue de l'isothermie, un fait isolé parmi les surfaces simplement algébriques.

(*) On aperçoit même très aisément que ces valeurs constantes, dans le cas actuel, ne sont autres que zéro, mais cette particularité ne présente aucun intérêt pour la conclusion qui est le but de notre recherche, et qui resterait la même, quelles que fussent ces valeurs constantes.

Vérification des résultats qui précèdent a l'aide du procédé de Lamé. — Théorèmes relatifs a l'isothermie concernant les surfaces du premier et du second ordre. — Il ne sera pas inutile avant d'abandonner ce sujet, aussi bien à titre de confirmation des résultats précédents obtenus par notre méthode, que pour permettre au lecteur, en lui remettant exactement sous les yeux l'état de la question sur les mêmes points, de comparer le rôle et l'utilité des deux méthodes, il ne sera pas inutile, disons-nous, même au prix de deux ou trois pages de plus, de vérifier rapidement ces résultats à l'aide du procédé de Lamé, dont l'emploi dans ces conditions devient alors sûr et commode; puis cela fait, de formuler ensuite en théorèmes, pour les mieux graver dans l'esprit, les conclusions ainsi doublement fondées de cette Étude, attendu que nous aurons à les invoquer à chaque instant, dans tout le cours de cette Théorie, et surtout dans le Chapitre suivant où seront examinés successivement tous les cas particuliers intéressants du problème.

1° (*Plan*). — Partant de la forme d'équation (57) ou (58) considérée comme donnée, c'est-à-dire de celle-ci

(131) $$\lambda = \frac{N}{D},$$

en faisant pour simplifier,

(132) $$N = ax + by + cz + d, \qquad D = \alpha x + 6y + \gamma z + \delta,$$

on en tirera, en différentiant par rapport à x l'expression (131) de λ,

(133) $$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{D^2}(Da - N\alpha) = \frac{1}{D}\left(a - \alpha\frac{N}{D}\right) = \frac{1}{D}(a - \alpha\lambda);$$

d'où les trois valeurs

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{-1}{D}(\alpha\lambda - a), \qquad \frac{d\lambda}{dy} = \frac{-1}{D}(6\lambda - b), \qquad \frac{d\lambda}{dz} = \frac{-1}{D}(\gamma\lambda - c),$$

et enfin celle-ci

$$(134)\qquad \Delta_1^2\lambda = \frac{1}{D^2}\left[(\alpha\lambda - a)^2 + (\beta\lambda - b)^2 + (\gamma\lambda - c)^2\right] = \frac{1}{D^2}(P\lambda^2 - 2Q\lambda + R),$$

P, Q, R, désignant comme ci-dessus les trois quantités (63). Puis différentiant une seconde fois la valeur (133) prise sous sa première forme, et remarquant que le numérateur $(Da - N\alpha)$ ne contient pas x, ce qui donnera

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = -2(Da - N\alpha)D^{-3}\alpha = \frac{-2\alpha}{D^2}\left(a - \alpha\frac{N}{D}\right) = \frac{2\alpha}{D^2}(\alpha\lambda - a),$$

on aura semblablement, pour les dérivées secondes, les valeurs

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{2\alpha}{D^2}(\alpha\lambda - a), \qquad \frac{d^2\lambda}{dy^2} = \frac{2\beta}{D^2}(\beta\lambda - b), \qquad \frac{d^2\lambda}{dz^2} = \frac{2\gamma}{D^2}(\gamma\lambda - c),$$

et

$$(135)\qquad \Delta_2\lambda = \frac{2}{D^2}\left[\alpha(\alpha\lambda - a) + \beta(\beta\lambda - b) + \gamma(\gamma\lambda - c)\right] = \frac{2}{D^2}(P\lambda - Q),$$

d'où par suite, en divisant l'une par l'autre les deux expressions (135) et (134),

$$\frac{\Delta^2\lambda}{\Delta_1^2\lambda} = \frac{2(P\lambda - Q)}{P\lambda^2 - 2Q\lambda + R} = -\Psi(\lambda).$$

Donc la famille de surfaces donnée (131) est isotherme.

Pour avoir à présent l'expression de son paramètre thermométrique, remarquant que la valeur de la fonction $\Psi(\lambda)$, définie par l'équation qui précède, peut s'écrire $-\frac{d}{d\lambda}\log(P\lambda^2 - 2Q\lambda + R)$, et la reportant dans la seconde équation (32) de Lamé, nous aurons immédiatement

$$\sigma\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{P\lambda^2 - 2Q\lambda + R} \qquad \text{ou} \qquad P\lambda^2 - 2Q\lambda + R = \sigma\frac{d\lambda}{d\theta},$$

en y écrivant σ au lieu de $\frac{1}{\sigma}$, équation en λ alors identique, en tenant compte de la valeur (62) de S, à l'équation en ρ, $S = \sigma\rho'$

8

[la dernière (60)], qui nous a fourni notre expression (67) de ρ, et qui dès lors, étant intégrée comme nous l'avons fait, nous conduirait finalement à cette même expression, et de là encore par un changement de coordonnées à l'équation (69), ainsi que nous nous proposions de le vérifier.

2° (*Sphère*). — De l'équation donnée (74), où nous ferons pour plus de simplicité, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, savoir

(136) $$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,$$

l'on tirerait

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{d\lambda}{dx} = 2x, & \dfrac{d\lambda}{dy} = 2y, & \dfrac{d\lambda}{dz} = 2z, & \Delta_1^2\lambda = 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4\lambda, \\ \dfrac{d^2\lambda}{dx^2} = 2, & \dfrac{d^2\lambda}{dy^2} = 2, & \dfrac{d^2\lambda}{dz^2} = 2, & \Delta_2\lambda = 6, \end{array}\right.$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda} = \frac{6}{4\lambda} = \frac{3}{2\lambda} = -\Psi(\lambda).$$

Donc déjà les sphères concentriques (136) forment une famille isotherme.

Cela fait, l'équation (31) de Lamé sera donc pour ce cas

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\log\frac{d\theta}{d\lambda}\right) = -\frac{3}{2\lambda} \qquad \text{ou} \qquad d\left(\log\frac{d\theta}{d\lambda}\right) + \frac{3}{2}\frac{d\lambda}{\lambda} = 0;$$

d'où, en intégrant une première fois,

$$\frac{d\theta}{d\lambda}\cdot\lambda^{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sigma} \qquad \text{ou} \qquad \sigma d\theta = -\frac{1}{2}\lambda^{-\frac{3}{2}}d\lambda,$$

et, en intégrant de nouveau,

$$\sigma\theta + \tau = \lambda^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{1}{(\sigma\theta + \tau)^2},$$

valeur qui, étant reportée dans l'équation donnée (136), reproduit bien, eu égard à la valeur 0 admise par a, b, c, la même équation (75), à laquelle nous avait conduit directement notre méthode en adoptant pour variable indépendante le paramètre thermométrique θ, et que nous avons retrouvée également un peu plus tard comme cas particulier de la solution relative aux surfaces du second ordre en général (p. 93) (*).

3° (*Surfaces du Second Ordre*). — Vérifions enfin à l'aide du même procédé que la famille de surfaces homofocales (116) réalise bien la condition de l'isothermie exprimée par l'équation (28), qu'elles que soient les valeurs attribuées aux constantes a^2, b^2, c^2, et h.

Pour cela, ayant en différentiant cette équation (116) par rapport à x,

$$\frac{2x}{a^2+\lambda} - \left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

nous poserons, pour abréger l'écriture,

$$\text{(137)} \qquad \text{H} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2},$$

ce qui permettra d'écrire cette dernière équation sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\text{(138)} \qquad \frac{2x}{a^2+\lambda} - \text{H}\frac{d\lambda}{dx} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\text{H}}\frac{2x}{a^2+\lambda},$$

et dès lors une première différentiation de cette même équation (116) nous donnera les trois suivantes

$$\text{(139)} \qquad \frac{2x}{a^2+\lambda} = \text{H}\frac{d\lambda}{dx}, \qquad \frac{2y}{b^2+\lambda} = \text{H}\frac{d\lambda}{dy}, \qquad \frac{2z}{c^2+\lambda} = \text{H}\frac{d\lambda}{dz}$$

(*) Lamé présente le même calcul sous une forme légèrement différente, mais un peu moins simple et moins naturelle, dans les *Leçons sur les Fonctions Inverses*, § VII, page 8.

lesquelles, étant élevées au carré et ajoutées, donneront :

(140) $4\mathrm{H} = \mathrm{H}^2\Delta_1^2\lambda$, d'où $\Delta_1^2\lambda = \frac{4}{\mathrm{H}}$, et $\mathrm{H} = \frac{4}{\Delta_1^2\lambda}$.

Cela fait, différentiant à nouveau la première équation (139) par rapport à x, nous trouverons :

(141) $$\frac{2}{a^2+\lambda} - \frac{2x}{(a^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dx} = \mathrm{H}\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d\mathrm{H}}{dx}\frac{d\lambda}{dx}.$$

Or, la différentiation de l'expression (137) donnant en même temps

(142) $$\frac{d\mathrm{H}}{dx} = \frac{2x}{(a^2+\lambda)^2} - 2\mathrm{K}\frac{d\lambda}{dx},$$

en posant semblablement

(143) $$\mathrm{K} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3},$$

l'équation qui précède (141) deviendra, par la substitution de la valeur (142),

$$\frac{2}{a^2+\lambda} - \frac{2x}{(a^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dx} = \mathrm{H}\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \left[\frac{2x}{(a^2+\lambda)^2} - 2\mathrm{K}\frac{d\lambda}{dx}\right]\frac{d\lambda}{dx},$$

ou, en développant et réduisant,

$$\frac{2}{a^2+\lambda} = \mathrm{H}\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{4x}{(a^2+\lambda)^2}\frac{d\lambda}{dx} - 2\mathrm{K}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2;$$

et par conséquent, en y remettant à la place de la dérivée $\frac{d\lambda}{dx}$ sa valeur (138), nous aurons la première des trois équations

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{2}{a^2+\lambda} &= \mathrm{H}\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{8}{\mathrm{H}}\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3} - 2\mathrm{K}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2,\\
\frac{2}{b^2+\lambda} &= \mathrm{H}\frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{8}{\mathrm{H}}\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3} - 2\mathrm{K}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2,\\
\frac{2}{c^2+\lambda} &= \mathrm{H}\frac{d^2\lambda}{dz^2} + \frac{8}{\mathrm{H}}\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3} - 2\mathrm{K}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2,
\end{aligned}\right.$$

les deux autres devant être fournies évidemment par un calcul semblable. Or si nous ajoutons ces trois dernières équations, en ayant égard successivement à la définition (143) de K, puis aux valeurs réciproques (140) de H et de $\Delta_1^2\lambda$, il est clair que nous obtiendrons ainsi

$$2\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]=\mathrm{H}\Delta_2\lambda+\frac{8}{\mathrm{H}}\mathrm{K}-2\mathrm{K}\Delta_1^2\lambda$$

$$=4\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}+\frac{8}{\mathrm{H}}\mathrm{K}-2\mathrm{K}\frac{4}{\mathrm{H}}=4\frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda},$$

d'où en divisant par 4, et intervertissant les deux membres extrêmes,

$$(144)\qquad \frac{\Delta_2\lambda}{\Delta_1^2\lambda}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]=-\Psi(\lambda),$$

et par conséquent la famille de surfaces (116) réalise bien la condition de l'isothermie exprimée par l'équation (28).

Cela fait, pour trouver maintenant l'expression du paramètre thermométrique, l'équation (31) de Lamé sera dans le cas actuel, en y écrivant, à la place de $\Psi(\lambda)$, la valeur que nous venons de rencontrer pour cette fonction par l'équation qui précède (144),

$$(145)\qquad \frac{d}{d\lambda}\log\frac{d\theta}{d\lambda}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right],$$

ou, ce qui est la même chose, en changeant tous les signes,

$$d.\log\frac{d\lambda}{d\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]d\lambda$$

équation qui coïncide exactement, eu égard à la précédente (118), avec la seconde équation (119), que nous avons obtenue par notre méthode, sauf le changement comme notation de ρ en λ, et qui conduira par conséquent par une première intégration à la même équation (120) ou (121), pour fournir l'expression

du paramètre thermométrique, avec les deux constantes arbitraires qui entrent essentiellement dans sa définition (*).

Mais si l'on se propose de rapporter la famille de surfaces (116) à son paramètre thermométrique, ce n'est pas, à proprement parler, cette dernière expression, mais bien l'expression inverse, c'est-à-dire celle de λ en fonction du paramètre thermométrique $\sigma\theta + \tau = u$, qu'il importe de connaître, en vue de la substituer à λ dans cette même équation (116). Or, pour obtenir cette dernière expression, le moyen le plus simple consistera à intégrer directement l'équation différentielle (120), ou, ce qui est la même chose, celle-ci

$$(146) \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} = du,$$

en y considérant u comme la variable indépendante, parce que, cette équation appartenant à un type simple très connu, on sait à l'avance que l'intégrale sera de la forme

$$\lambda = - a^2 \mathrm{cn}^2(gu + h) - b^2 \mathrm{sn}^2(gu + h),$$

h désignant la constante d'intégration, et g une autre constante déterminée, fonction de a^2, b^2, c^2, et que dès lors on n'aura simplement qu'à trouver les valeurs de cette constante g et du module k, qui procurent la vérification de la même équation (146) par cette expression de λ.

Toutefois, ayant déjà fait entrer les deux constantes arbitraires σ et τ dans la définition de la variable u, savoir $u = \sigma\theta + \tau$, l'introduction des deux nouvelles constantes g et h sera sans

(*) Jusqu'ici, dans cette question, nous n'avons fait, pour ainsi dire, qu'adapter à la notation plus simple et plus symétrique de Jacobi pour les surfaces homofocales (dont on reconnaîtra le très grand avantage dans la suite de ce travail) le calcul de Lamé, qui forme le point de départ de la belle découverte des Coordonnées Thermométriques auxquelles son nom restera toujours attaché. (*Leçons sur les Fonctions Inverses*, § XIII, pp 17-18). Mais il n'en sera pas de même du calcul qui va suivre, relatif à la seconde intégration, savoir celle de l'équation (120) ou (146), qui n'est en réalité qu'*indiquée* et non pas *effectuée* par Lamé dans la théorie que nous venons de rappeler.

intérêt dans la question actuelle, et ferait double emploi avec les précédentes, attendu que les deux notations $g(\sigma\theta + \tau) + h$, ou simplement $\sigma\theta + \tau$, représenteront l'une et l'autre exactement la même quantité. C'est pourquoi il suffira de prendre pour λ l'expression

$$(147) \qquad \lambda = -a^2\mathrm{cn}^2 u - b^2\mathrm{sn}^2 u,$$

laquelle pourra s'écrire, en tenant compte des relations fondamentales

$$\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u = 1, \qquad \mathrm{dn}^2 u + k^2\mathrm{sn}^2 u = 1,$$

sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(148) \quad \begin{cases} \lambda = -a^2(1 - \mathrm{sn}^2 u) - b^2\mathrm{sn}^2 u = -a^2 + (a^2 - b^2)\mathrm{sn}^2 u, \\ \lambda = -a^2\mathrm{cn}^2 u - b^2(1 - \mathrm{cn}^2 u) = -b^2 - (a^2 - b^2)\mathrm{cn}^2 u, \end{cases}$$

qui donneront immédiatement les trois valeurs :

$$(149) \qquad a^2 + \lambda = (a^2 - b^2)\mathrm{sn}^2 u, \qquad b^2 + \lambda = -(a^2 - b^2)\mathrm{cn}^2 u,$$

$$c^2 + \lambda = -(a^2 - c^2) + (a^2 - b^2)\mathrm{sn}^2 u = -(a^2 - c^2)\left[1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\mathrm{sn}^2 u\right].$$

Dès lors, on voit qu'il suffira de faire $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$, pour que cette dernière valeur prenne elle-même la forme analogue

$$(150) \qquad c^2 + \lambda = -(a^2 - c^2)(1 - k^2\mathrm{sn}^2 u) = -(a^2 - c^2)\,\mathrm{dn}^2 u,$$

en sorte que l'on aura alors, en la multipliant par les deux expressions semblables (149),

$$(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) = (a^2 - b^2)^2(a^2 - c^2)\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u,$$

et en extrayant les racines

$$\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} = \pm(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - c^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.$$

Or, comme, d'autre part, la différentiation de l'une ou l'autre des deux expressions (148) donnera

$$(151)\qquad d\lambda = (a^2 - b^2).2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u,$$

on aura donc, en divisant l'une par l'autre ces deux dernières égalités, relativement à la valeur de λ exprimée par l'égalité (147),

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \pm\frac{(a^2-b^2).2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u.du}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-c^2}\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u} = \frac{\pm 2du}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

ou, en revenant à la variable θ,

$$(152)\qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \pm\frac{2\sigma}{\sqrt{a^2-c^2}}\,d\theta,$$

équation qui ne diffère pas en réalité, σ étant arbitraire de l'équation (120) qu'il s'agissait d'intégrer, car l'on en déduirait aussi bien par la différentiation l'équation du second ordre (145) ou (119), qui représente dans le cas actuel, avons-nous vu, l'équation (31) de la théorie de Lamé.

L'expression (147), dans laquelle on attribue au module k la valeur

$$(153)\qquad k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

constitue donc la solution de la question proposée sous la forme la plus propice pour le but que nous avons en vue, qui est de rapporter la famille de surfaces à son paramètre thermométrique. En effet, si nous posons encore, pour simplifier l'écriture, comme nous le ferons plus tard dans le dernier Chapitre de ce travail,

$$(154)\qquad l^2 = a^2 - b^2,\qquad m^2 = b^2 - c^2,\qquad n^2 = c^2 - a^2,$$

d'où

$$(155)\qquad k^2 = \frac{l^2}{-n^2}\qquad \text{et}\qquad n^2 = \frac{l^2}{-k^2},$$

les valeurs (149) et (150) devenant avec ces nouvelles notations

$$(156) \quad a^2+\lambda=l^2\mathrm{sn}^2u, \quad b^2+\lambda=-l^2\mathrm{cn}^2u, \quad c^2+\lambda=-\frac{l^2}{k^2}\mathrm{dn}^2u, \ (*)$$

si l'on substitue ces trois valeurs dans l'équation (116) de la famille proposée, et qu'on la multiplie en même temps par l^2, en y écrivant au second membre $\frac{1}{d^2}$ à la place de h, d étant alors pour l'homogénéité une simple constante numérique de même que h, cette équation se transformera par là dans la suivante

$$(157) \qquad \frac{x^2}{\mathrm{sn}^2u}-\frac{y^2}{\mathrm{cn}^2u}-\frac{z^2}{\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2u}=\frac{l^2}{d^2}, \ (**)$$

qui sera dès lors l'équation de la même famille de surfaces rapportée à son paramètre thermométrique $u=\sigma\theta+\tau$, et qui montre que pour toutes les surfaces composant cette famille

---

(*) Ces trois expressions n'étant autres que les inverses des trois coefficients inconnus (115) du problème précédent, il appert *littéralement* alors de ces valeurs (156), en ayant égard à la définition de la variable u, le fait annoncé par notre théorie (p. 88), et déjà constaté plus haut (pp. 98-99), à savoir que l'ensemble des expressions des quatre inconnues (115) ne renferme que *cinq* constantes réellement arbitraires, qui sont, sous cette nouvelle forme, σ, τ, l^2, k^2, et h.

(**) Par suite de l'introduction de ce paramètre u, cette équation renferme donc seulement *deux* constantes arbitraires essentielles, savoir $\frac{l}{d}$ et k, de même que l'équation (116), ainsi qu'il était évidemment nécessaire *a priori.*

Cette équation d'ailleurs n'est autre que la première équation (10) du § XCVI des *Leçons sur les Fonctions Inverses* (page 126), Lamé y désignant l'amplitude de l'intégrale elliptique de première espèce par le symbole $\mathfrak{A}$ au lieu du symbole *am* introduit par Jacobi dans la notation *sin am.* Mais cette équation qu'il n'écrit qu'incidemment, en vue d'un cas particulier (celui des surfaces de révolution), et en alléguant que « vu son manque de symétrie elle ne saurait être préférée à la première », il la répudie en quelque sorte dans la suite, en n'en faisant mention nulle part dans ses *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes,* quoiqu'elle nous paraisse, au contraire, bien préférable à celle qu'il adopte pour chacune des trois familles composant son système orthogonal triplement isotherme [formules (1) du § LXXX des *Fonctions Inverses* (page 105), ou (55) du § LXVIII des *Coordonnées Curvilignes* (page 120)]. Quant au reproche de dissymétrie par lequel il motive ce rejet, nous montrerons dans le dernier Chapitre de ce travail qu'il n'est pas fondé, ou tout au moins qu'il n'en subsiste rien dans les formules correspondantes, qui donnent l'expression des coordonnées rectilignes en fonction des coordonnées thermométriques, et qui importent seules au point de vue des applications.

isotherme les trois axes seront proportionnels aux trois fonctions simples sn u, cn u, dn u. Ce résultat, étant joint à ceux que nous avons établis par le moyen de notre méthode dans le cours de ce Chapitre nous permettra d'énoncer, comme conclusion de cette Étude, ces quatre théorèmes, dont les réciproques, formulés seuls par Lamé, ne sont en fait qu'une conséquence restreinte (*) :

Théorème I. — « *Dans* toute *famille isotherme de plans, tous » les plans qui la composent passent par une même droite, cette » droite se transportant tout entière à l'infini lorsque la famille » est composée de plans parallèles, et le paramètre thermomé- » trique représente pour chaque plan son azimut relativement à » un plan fixe de la famille pris pour origine.* »

Théorème II. — « *Dans* toute *famille isotherme de sphères, » toutes les sphères qui la composent ont le même centre, et le » paramètre thermométrique représente pour chacune l'inverse » du rayon.* »

Théorème III. — « *Dans* toute *famille isotherme de surfaces » du second ordre, toutes les surfaces qui la composent sont » homofocales, c'est-à-dire qu'elles ont toutes les mêmes plans » principaux, et dans chacun de ces plans, les deux mêmes points » pour foyers de leurs sections relatives à ce plan.* »

Théorème IV. — « *Dans* toute *famille isotherme de surfaces » du second ordre, les trois axes sont respectivement propor-*

(*) Nous indiquons par des caractères romains, dans les énoncés qui suivent imprimés en italiques, les mots qui constituent notre modeste part de contribution personnelle dans les propositions que nous formulons comme résumé de cette théorie.

Ce sont donc, en quelque sorte, les *réciproques* de ces théorèmes, à savoir que les différentes familles de surfaces y désignées sont isothermes, qui sont seules établies par Lamé, et que l'on trouve partout depuis lors formulées à ce sujet. Nous espérons que le Lecteur jugera que les propositions, telles que nous les énonçons, éclairent la question d'un jour assurément plus complet, et que cette addition à l'œuvre du Maître sur ce point, quelque légère qu'elle soit, valait encore la peine d'être produite, même au prix des développements, en apparence exagérés, que nous avons dû apporter pour cela à notre Chapitre II.

» *tionnels aux trois fonctions* sin am, cos am, Δ am, *du para-*
» *mètre thermométrique, les coefficients de proportionnalité*
» *restant d'ailleurs les mêmes pour toutes les surfaces qui com-*
» *posent cette famille* (*). »

Observons enfin, en terminant, que si l'on suppose suivant l'usage les trois constantes, positives ou négatives, a^2, b^2, c^2, rangées par grandeur dans l'ordre suivant $a^2 > b^2 > c^2$, lequel donnera par conséquent

$$(158) \qquad a^2 - b^2 > 0, \qquad a^2 - c^2 > 0, \qquad a^2 - b^2 < a^2 - c^2,$$

la valeur (153) du module k sera bien réelle et plus petite que l'unité, ainsi que l'exige la forme dite *canonique* des fonctions elliptiques de première espèce; et si de plus on suppose le paramètre λ astreint à varier entre les limites $-a^2$ et $-b^2$, les valeurs (148) montrent que l'on pourra satisfaire à l'équation (147) par des valeurs de $\text{sn}^2 u$ et $\text{cn}^2 u$ positives et moindres que 1, ce qui veut dire que le paramètre thermométrique u sera alors réel en même temps que λ.

Sauf ce cas, pour lequel l'équation (157) représentera par suite évidemment un hyperboloïde à deux nappes, on ne pourra satisfaire à l'équation (147), qu'en attribuant à l'une au moins des deux fonctions $\text{sn}^2 u$ ou $\text{cn}^2 u$ des valeurs négatives ou plus

---

(*) Lamé, d'une part, n'ayant pas établi que le type des surfaces homofocales embrasse en réalité, pour les surfaces du second ordre, la totalité des familles isothermes de cet ordre, ne pouvait évidemment formuler cette proposition que pour ce type particulier seulement, et non, comme nous le faisons, pour toutes les familles isothermes du second ordre sans exception.

D'autre part, au lieu de faire usage, pour l'expression des fonctions elliptiques de première espèce, des trois types classiques d'Abel et de Jacobi, il introduit neuf fonctions qui ne coïncident pas exactement avec celles-là, bien qu'ayant avec elles des rapports assez simples (et dont on trouvera la signification exacte mentionnée dans notre dernier Chapitre), et nous semble en cela sacrifier à une préoccupation exclusive de symétrie la clarté des calculs et la lucidité des résultats. Nous montrerons d'ailleurs, en revenant sur le même sujet à la fin de ce Mémoire, que l'on peut s'assurer le bénéfice incontestable d'une symétrie aussi complète, et même plus satisfaisante, sans renoncer pour cela à la clarté inhérente à des symboles consacrés par d'illustres travaux et un usage presque général, et entrés définitivement aujourd'hui dans l'Enseignement classique.

grandes que 1, lesquelles correspondront dès lors forcément à des valeurs imaginaires de la variable u. Mais cette circonstance, inévitable par conséquent si l'on veut constituer un système coordonné avec trois familles de surfaces différentes de ce même type (157) (*), n'empêchera pas néanmoins, comme nous le verrons dans notre dernier Chapitre, de faire usage de ces paramètres u comme coordonnées thermométriques, et d'en tirer un parti précieux pour la solution d'importantes questions, auxquelles ces variables se prêteront mieux que le système des coordonnées elliptiques λ et ses homologues, défini par trois équations du type (116), que nous rencontrerons, comme solution la plus générale du problème, à la fin des deux premiers Chapitres de la Seconde Partie de ce Mémoire.

(*) Pour que trois équations du même type puissent représenter trois familles de surfaces capables de se couper réciproquement, c'est-à-dire par conséquent distinctes, il faut en effet de toute nécessité supposer expressément le paramètre renfermé entre des limites différentes pour chacune, sans quoi, nonobstant la multiplicité des symboles adoptés pour ces paramètres, ces trois équations ne représenteraient alors évidemment qu'une seule et même famille de surfaces.

CHAPITRE III.

Équations générales aux dérivées partielles d'un système orthogonal triplement isotherme. — Solution détaillée du problème pour tous les cas particuliers, qui admettent des surfaces développables dans la composition du système.

Équations aux dérivées partielles, d'après Lamé, d'un système orthogonal quelconque. — Si l'on demande d'écrire d'une façon générale les relations différentielles auxquelles devront satisfaire les paramètres φ, ψ, ϖ des trois familles de surfaces composant un système orthogonal triplement isotherme, l'idée la plus naturelle et qui se présente la première à l'esprit consiste évidemment à astreindre ces trois fonctions à vérifier simultanément les six équations aux dérivées partielles

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}=0, & \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{x}+\frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{y}+\frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{z}=0, \\ \frac{\psi^2}{x^2}+\frac{\psi^2}{y^2}+\frac{\psi^2}{z^2}=0, & \frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{x}+\frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{y}+\frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{z}=0, \\ \frac{\varpi^2}{x^2}+\frac{\varpi^2}{y^2}+\frac{\varpi^2}{z^2}=0, & \frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{x}+\frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{y}+\frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{z}=0, \end{array} \right.$$

dont les trois du second ordre expriment que chaque famille de surfaces est individuellement isotherme, et les trois autres du premier ordre, que ces mêmes familles sont deux à deux orthogonales entre elles. Mais, s'il est ainsi très simple et très facile de poser les équations du problème, il n'en est pas de même pour le résoudre, c'est-à-dire pour intégrer d'une façon générale le système de ces six équations aux dérivées partielles, à cause de la difficulté de déterminer les deux fonctions arbitraires, introduites par l'intégrale générale de chacune des

équations du second ordre (*), par la condition de satisfaire ensuite simultanément aux trois équations du premier ordre. Aussi n'emprunterons-nous cette voie que pour deux sur sept des Cas successivement traités dans cette étude, et encore dans ces deux Cas comme second mode de solution seulement, la question ayant été déjà complètement résolue par un autre mode que nous allons dire.

C'est en faisant appel à une série de considérations en apparence beaucoup plus compliquées, mais qui se prêtent mieux en fait à la réalisation pratique des calculs, que Lamé a posé le premier, d'une façon précise et complète, les équations différentielles du problème, dans des conditions qui permettent d'en espérer la solution avec les ressources actuelles de l'Analyse, lesquelles n'offrent encore aucune méthode certaine pour l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles entre plusieurs inconnues. Il faut dire toutefois qu'après avoir ainsi posé le problème d'une façon magistrale, Lamé ne fait guère dans ses *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes* qu'en ébaucher la solution, mais cette esquisse hardie, si peu justifiée en apparence, et qui semble ne devoir fournir qu'une solution très particulière du problème, lui suffit, grâce à son admirable coup d'œil, pour amener au jour, comme par un prodigieux coup de filet, tout ce que la solution la plus générale contient en réalité d'essentiel, en sorte qu'il ne laisse plus à ceux qui viendront à sa suite que le rôle peu glorieux de constater avec certitude qu'il a déjà tout trouvé, et qu'il ne reste rien désormais à glaner après lui.

Nous allons, en conséquence, rapporter ici fidèlement, mais en le transcrivant avec nos notations, et l'établissant à l'aide de nos travaux antérieurs, le système d'équations aux dérivées partielles, dont Lamé fait ainsi dépendre la détermination de tout système orthogonal triplement isotherme; et après avoir posé de la sorte la question avec lui, nous la résoudrons com-

(*) Voir notre Chapitre II, équation (45).

plètement et rigoureusement, dans les termes mêmes où il l'a posée, et sans sortir un seul instant de la voie qu'il nous aura tracée.

Envisageant donc tout d'abord le problème de la recherche d'un système triple orthogonal dans toute sa généralité, Lamé commence par renverser en quelque sorte les données analytiques du problème, en adoptant pour variables indépendantes les coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ, qui dans les équations précédentes (1) étaient les inconnues, et pour inconnues finales les coordonnées rectilignes x, y, z, qui tout à l'heure étaient les variables indépendantes. Puis il décompose la question en deux distinctes, de façon à parvenir au but en deux étapes successives. — Dans la première, à laquelle correspondra notre Chapitre IV en entier, il se propose d'abord de déterminer les invariants différentiels du premier ordre relatifs aux trois coordonnées curvilignes, $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, en fonction de ces coordonnées φ, ψ, ϖ, elles-mêmes. — Puis, ce premier résultat supposé obtenu, il se propose dans la seconde, comme nous le ferons dans notre Chapitre V, de déterminer les inconnues x, y, z, en fonction des mêmes variables indépendantes φ, ψ, ϖ, à l'aide des expressions précédemment acquises des trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$.

A cet effet, Lamé montre, en premier lieu, qu'il existe dans tout système orthogonal en général six relations différentielles du second ordre entre les trois invariants précités exclusivement, c'est-à-dire six relations dans lesquelles il n'entre que ces seules quantités et leurs dérivées par rapport aux coordonnées φ, ψ, ϖ, à l'exclusion de ces coordonnées elle-mêmes (*). Puis un peu plus loin, en introduisant dans ces relations, et dans celles que l'on peut en déduire par simple combinaison algébrique, à la place des dérivées premières de ces quantités, les grandeurs des six courbures principales du système qui leur sont proportionnelles, il en tire ainsi pareil nombre de relations différentielles du premier ordre entre ces mêmes éléments, relations qu'il traduit alors géométriquement par une série de beaux théo-

(*) *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, Ve leçon, §§ XLIII-XLV, pp. 73-79.

rèmes, relatifs aux courbures principales de tout système orthogonal (*).

Ayant démontré tout au long ces théorèmes, c'est-à-dire en fait les formules dont ils ne sont que la traduction en langage ordinaire, dans notre précédent *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (**) (§ IV, page 88), nous n'aurons plus évidemment, pour retrouver les équations primitives de Lamé, qu'à faire dans ces formules la substitution inverse de celle opérée par Lamé, comme nous venons de le dire, c'est-à-dire de rétablir, par exemple dans les équations (68) (page 80) dudit Mémoire (dont celles qui suivent ne sont que de simples combinaisons algébriques), à la place des six courbures principales $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R'_1}, \frac{1}{R'_2}, \frac{1}{R''_1}, \frac{1}{R''_2}$, les valeurs que nous donnons sous le numéro (59) (page 70) dans le Mémoire en question, savoir (***) :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R_1} = -\Delta_1\varphi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}, & \dfrac{1}{R'_1} = -\Delta_1\psi\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\psi}, & \dfrac{1}{R''_1} = -\Delta_1\varpi\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}, \\ \dfrac{1}{R_2} = -\Delta_1\varphi\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}, & \dfrac{1}{R'_2} = -\Delta_1\psi\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\psi}, & \dfrac{1}{R''_2} = -\Delta_1\varpi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi}. \end{cases}$$

A cet effet, faisant donc cette substitution dans les trois groupes de formules (67) (page 80), et remarquant que les deux quantités P et Q'', définies par ces formules, donneront ainsi naissance à deux expressions identiques, car l'on trouvera de la sorte

$$\begin{cases} P = -\Delta_1\varpi\dfrac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1\varphi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\right) + \Delta_1\varpi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\left(\Delta_1\varphi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi} - \Delta_1\varphi\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\right) \\ \quad = -\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi\left[\dfrac{(l\Delta_1\psi)^2}{\varpi\varphi} + \dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi} + \dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varphi} - \dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\right], \\ Q'' = -\Delta_1\varphi\dfrac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1\varpi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\right) + \Delta_1\varphi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\left(\Delta_1\varpi\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi} - \Delta_1\varpi\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\right) \\ \quad = -\Delta_1\varphi\Delta_1\varpi\left[\dfrac{(l\Delta_1\psi)^2}{\varphi\varpi} + \dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi} + \dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varpi} - \dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\right], \end{cases}$$

(*) *Ibid.*, à la suite, §§ XLVI-XLVII, pp. 79-84.

(**) *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Ve année (1880-1881).

(***) Ce sont les formules (24) du § XXX, de l'ouvrage déjà cité de Lamé (page 51).

on s'assure ainsi que les trois quantités Q, Q', Q'' reproduiront, dans un autre ordre seulement, les mêmes expressions déjà fournies par les trois quantités P, P', P''; et par conséquent, en supposant que l'on agisse de même à l'égard des trois autres quantités T, T', T'', on voit que les neuf équations (68) du Mémoire en question (page 82) fourniront par cette substitutions seulement les six équations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(l\Delta_1\varphi)^2}{\psi\varpi}+\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}+\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}-\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}=0,\\ &\frac{(l\Delta_1\psi)^2}{\varpi\varphi}+\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}+\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}-\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}=0,\\ &\frac{(l\Delta_1\varpi)^2}{\varphi\psi}+\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}+\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}-\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}=0,\end{aligned}\right.$$

(*)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\Delta_1\psi\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\right)+\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1\varpi\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\right)\\ &\qquad=\Delta_1^2\psi\left(\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\right)^2+\Delta_1^2\varphi\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi},\\ &\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1\varpi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\right)+\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\right)\\ &\qquad=\Delta_1^2\varpi\left(\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\right)^2+\Delta_1^2\varphi\left(\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi},\\ &\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\right)+\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\Delta_1\psi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\right)\\ &\qquad=\Delta_1^2\varphi\left(\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi},\end{aligned}\right.$$

(*) Le premier de ces deux groupes de trois équations représente les équations (8) du § XLIII de Lamé (*Coord. Curv.*, p. 76, au bas), et le second traduit semblablement dans nos notations les trois équations (9) du § XLIV (*ibid.*, p. 78).

équations simultanées aux dérivées partielles du second ordre, qui constituent, d'après Lamé, le point de départ essentiel de cette recherche.

Les expressions en φ, ψ, ϖ des trois fonctions $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ étant supposées connues par l'intégration générale du système qui précède, on aura ensuite, pour déterminer celles des trois coordonnées x, y, z en fonction des mêmes variables, un système analogue de six équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui ne sont autres que les six relations connues entre les neuf cosinus directeurs des trois normales aux surfaces coordonnées, exprimés également en fonction des coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ; car, si l'on se rapporte au tableau (18), que nous donnons de ces expressions dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 19), on voit que ces relations s'exprimeront alors par les six équations suivantes :

(*)

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1^2\varphi\left(\frac{x}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{x}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{x}{\varpi}\right)^2=1, &\quad &\Delta_1^2\varphi\,\frac{y}{\varphi}\frac{z}{\varphi}+\Delta_1^2\psi\,\frac{y}{\psi}\frac{z}{\psi}+\Delta_1^2\varpi\,\frac{y}{\varpi}\frac{z}{\varpi}=0,\\ &\Delta_1^2\varphi\left(\frac{y}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{y}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{y}{\varpi}\right)^2=1, &\quad &\Delta_1^2\varphi\,\frac{z}{\varphi}\frac{x}{\varphi}+\Delta_1^2\psi\,\frac{z}{\psi}\frac{x}{\psi}+\Delta_1^2\varpi\,\frac{z}{\varpi}\frac{x}{\varpi}=0,\\ &\Delta_1^2\varphi\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{z}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{z}{\varpi}\right)^2=1, &\quad &\Delta_1^2\varphi\,\frac{x}{\varphi}\frac{y}{\varphi}+\Delta_1^2\psi\,\frac{x}{\psi}\frac{y}{\psi}+\Delta_1^2\varpi\,\frac{x}{\varpi}\frac{y}{\varpi}=0, \end{aligned}\right.$$

chaque coordonnée rectiligne devant ainsi vérifier isolément l'une des équations du premier ordre non linéaire du groupe de gauche, et les trois coordonnées simultanément le système formé par les trois équations du groupe de droite.

Telles sont donc, si l'on adopte pour variables indépendantes les coordonnées curvilignes elles-mêmes, les équations dont dépendra la détermination d'un système orthogonal en général.

(*) D'après la formule (2) de notre Chapitre I, les trois équations de gauche exprimen encore pour chaque coordonnée rectiligne $u = x, y, z$, l'identité de définition $\Delta_1^2 u = 1$, et reproduisent les équations (29) du § L de Lamé (*loc. cit.*, p. 90, en haut). — Les deux groupes ensemble équivalent d'ailleurs aux équations (5) du § VI (*ibid.*, p. 10).

Équations analogues de tout système orthogonal triplement isotherme. — La question se simplifiera notablement, par deux côtés à la fois, dans l'hypothèse particulière du système triplement isotherme, qui fait seule l'objet du présent Mémoire.

En effet, en premier lieu, les trois équations du premier groupe (3) se réduiront alors au premier ordre seulement, car, ayant établi à la fin du § IV du *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* déjà cité tout à l'heure (pp. 89-97) les formules et les théorèmes relatifs à ce cas important, nous avons vu alors qu'en convenant expressément de prendre pour φ, ψ, ϖ les coordonnées thermométriques elles-mêmes, c'est-à-dire les paramètres thermométriques des trois familles de surfaces, on peut, pour cette hypothèse, remplacer, soit la première, soit la seconde colonne des équations (68) précitées (page 80), par les trois équations (86) ou (89), c'est-à-dire par celles-ci :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{R'_1 R''_1} + \frac{1}{R'_2 R''_2} = \frac{1}{R''_1 R'_2}, \\ &\frac{1}{R''_1 R_1} + \frac{1}{R''_2 R_2} = \frac{1}{R_1 R''_2}, \\ &\frac{1}{R_1 R'_1} + \frac{1}{R_2 R'_2} = \frac{1}{R'_1 R_2}, \end{aligned}\right.$$

équations que n'indique pas Lamé, et qui, contenant les courbures principales en termes finis seulement, fourniront par conséquent, par la même substitution que tout à l'heure, c'est-à-dire celle des valeurs (2), trois équations du premier ordre entre les invariants Δ_1 relatifs aux trois coordonnées φ, ψ, ϖ.

En second lieu, avec le même choix de coordonnées curvilignes, il résulte immédiatement des expressions (6) que nous avons données d'après Lamé dans notre Chapitre I, que les trois conditions qui exprimeront l'isothermie de nos trois familles de surfaces se traduiront, avec cette hypothèse, par les trois

équations

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi}\right)=0,\qquad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi}\right)=0,\qquad \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi}\right)=0,$$

et que dès lors, si l'on adopte pour inconnues intermédiaires, à la place de $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, les trois quantités

$$(7)\qquad P=\frac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi},\qquad Q=\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi},\qquad R=\frac{\Delta_1\varpi}{\Delta_1\varphi\Delta_1\psi},$$

les trois conditions qui précèdent se changeront alors dans les suivantes

$$(8)\qquad \frac{dP}{d\varphi}=0,\qquad \frac{dQ}{d\psi}=0,\qquad \frac{dR}{d\varpi}=0,$$

qui équivalent à admettre pour P, Q, R des valeurs de la forme

$$(9)\qquad P=f_1(\psi,\varpi),\qquad Q=f_2(\varpi,\varphi),\qquad R=f_3(\varphi,\psi).$$

On voit donc que chacune des inconnues P, Q, R, ou f_1, f_2, f_3, ne dépendra plus que de deux variables seulement, et cette circonstance introduira certainement dans les calculs une facilité sur laquelle on n'avait pas à compter dans le cas général, avec le système d'équations précédent (3) et (4), et dont on n'eût pas bénéficié, même pour l'hypothèse particulière actuelle, avec le système primitivement considéré (1).

C'est en effet principalement cette disparition de l'une des variables indépendantes dans l'expression de chaque inconnue avec le choix d'inconnues (7) qui constitue, pour le cas du sys-

tème triplement isotherme, la supériorité du système d'équations posé par Lamé d'après ces données, et que nous allons maintenant former, sur le système primordial (1), en apparence beaucoup plus simple et plus naturel, attendu que de cette première simplification ressortira bientôt, comme nous le verrons, une seconde plus caractérisée encore, consistant en ce que, dans le système des trois équations du second ordre (4), il n'entrera plus comme inconnues que des fonctions d'une seule variable seulement, en sorte que leur intégration se ramènera à celle d'équations différentielles ordinaires, autre avantage important que n'aurait point présenté le système d'équations primitif (1).

Cela dit, voyons comment on déterminera les trois fonctions P, Q, R, que Lamé substitue ainsi comme inconnues aux trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, et ces expressions supposées obtenues, comment on parviendra ensuite à celle des trois coordonnées x, y, z elles-mêmes.

A cet effet, multipliant entre elles deux à deux successivement les trois équations de définition (7), et obtenant ainsi pour les trois quantités que nous avons appelées H, K, J dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (Chapitre I, équat. (8), page 14, *en bas*)

$$(10) \qquad H = \Delta_1^{-2}\varphi = QR, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = RP, \qquad J = \Delta_1^{-2}\varpi = PQ,$$

d'où nous déduirons par conséquent

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_1\varphi = (QR)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{QR}}, \quad \Delta_1\psi = (RP)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{RP}}, \quad \Delta_1\varpi = (PQ)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{PQ}} \\ &l\Delta_1\varphi = -\frac{1}{2}(lQ + lR), \quad l\Delta_1\psi = -\frac{1}{2}(lR + lP), \quad l\Delta_1\varpi = -\frac{1}{2}(lP + lQ), \end{aligned} \right.$$

nous obtiendrons tout d'abord, en substituant dans le tableau

précédent (2), et ayant égard aux trois conditions (8), pour les six courbes principales, les nouvelles expressions

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{R_1}=\dfrac{1}{2\sqrt{QR}}\dfrac{lR}{\varphi}, & \dfrac{1}{R'_1}=\dfrac{1}{2\sqrt{RP}}\dfrac{lP}{\psi}, & \dfrac{1}{R''_1}=\dfrac{1}{2\sqrt{PQ}}\dfrac{lQ}{\varpi}, \\ \dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1}{2\sqrt{QR}}\dfrac{lQ}{\varphi}, & \dfrac{1}{R'_2}=\dfrac{1}{2\sqrt{RP}}\dfrac{lR}{\psi}, & \dfrac{1}{R''_2}=\dfrac{1}{2\sqrt{PQ}}\dfrac{lP}{\varpi} \end{array}\right.$$

que nous remettrons semblablement dans nos trois équations ci-dessus (6), spéciales à l'hypothèse particulière actuelle. Or, la première de ces équations devenant par cette substitution

$$\frac{1}{4P\sqrt{QR}}\left(\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\cdot\frac{1}{Q}\frac{Q}{\varpi}+\frac{1}{R}\frac{R}{\psi}\cdot\frac{1}{P}\frac{P}{\varpi}\right)=\frac{1}{4P\sqrt{QR}}\cdot\frac{1}{Q}\frac{Q}{\varpi}\cdot\frac{1}{R}\frac{R}{\psi},$$

ou, ce qui est la même chose, en multipliant par le produit $4P^2(QR)^{\frac{3}{2}}$ qui ne saurait être nul que pour des points exceptionnels seulement (chacune des quantités $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\psi$, $\Delta_1^2\varpi$, dont les racines carrées forment les numérateurs des quantités (7), étant par définition une somme de trois carrés),

$$R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}+Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi}=P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi},$$

puis intervertissant enfin les deux membres, on voit que nous aurons dans l'hypothèse actuelle, à la place des trois équations du second ordre (3) relatives au cas général, les trois autres du premier ordre

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned} P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi} &= Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi} + R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi},\\ Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi} &= R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi} + P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi},\\ R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi} &= P\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi} + Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}.\end{aligned}\right. \quad (*)$$

Avant de pàsser au second groupe, notons à propos de celui-ci deux observations, dont la première seule est signalée par Lamé : à savoir, en premier lieu, que si l'on représente pour un instant par $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{C} = 0$ ces trois dernières équations, on aura *identiquement*

$$(14)\qquad \mathcal{A}\frac{l.QR}{\varphi} + \mathcal{B}\frac{l.RP}{\psi} + \mathcal{C}\frac{l.PQ}{\varpi} = 3\left(\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} + \frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}\right),$$

d'où il suit immédiatement que l'équation

$$(15)\qquad \frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi} + \frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi} = 0, \quad (**)$$

qui est une simple conséquence algébrique des trois équations (13), pourra être envisagée à la place de l'une d'elles; et, en second lieu, que ces trois mêmes équations ne sont pas distinctes entre elles, et se réduisent en réalité à deux seulement, attendu qu'il est facile de vérifier l'*identité*

$$(16)\qquad \mathcal{A}\frac{lR}{\varphi} + \mathcal{B}\left(\frac{lR}{\psi} - \frac{lP}{\psi}\right) - \mathcal{C}\frac{lP}{\varpi} = 0. \quad (***)$$

Ces deux équations se réduisant ainsi en fait à deux seulement, on pourra prendre, si l'on veut, pour ces deux distinctes,

(*) Ces trois équations sont celles du type (13), § LVI, dont Lamé n'écrit que la première seulement (*Coord. Curv.*. p. 99).

(**) C'est l'équation (10) du § LV (*ibid.*, page 99, *en haut*).

(***) En effet, on aura d'après la définition des expressions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, pour la première égalité (14), d'une part,

en vue de conserver la symétrie, d'une part l'équation qui précède (15), et d'autre part la combinaison $\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}=0$, c'est-à-dire l'équation

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &P\left(\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}+\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}-\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi}\right)+Q\left(\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi}+\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}-\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right)\\ &\qquad+R\left(\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}+\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}-\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}\right)=0. \text{ (*)}\end{aligned}\right.$$

Venons maintenant au second groupe (4), qui est aussi du second ordre, et auquel nous n'aurons d'autre modification à faire subir que d'y introduire les inconnues P, Q, R à la place des inconnues $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$; car les trois équations de la dernière

---

$$\mathcal{A}\frac{l.QR}{\varphi}+\mathcal{B}\frac{l.RP}{\psi}+\mathcal{C}\frac{l.PQ}{\varpi}=\mathcal{A}\left(\frac{lQ}{\varphi}+\frac{lR}{\varphi}\right)+\mathcal{B}\left(\frac{lR}{\psi}+\frac{lP}{\psi}\right)+\mathcal{C}\left(\frac{lP}{\varpi}+\frac{lQ}{}\right)$$

$$=\frac{1}{Q}\frac{Q}{\varphi}\left(Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi}+R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}-P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi}\right)+\frac{1}{R}\frac{R}{\varphi}\left(Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi}+R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}-P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi}\right)$$

$$+\frac{1}{R}\frac{R}{\psi}\left(R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}+P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}-Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right)+\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\left(R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}+P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}-Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right)$$

$$+\frac{1}{P}\frac{P}{\varpi}\left(P\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}+Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}-R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}\right)+\frac{1}{Q}\frac{Q}{\varpi}\left(P\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}+Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}-R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}\right)$$

$$=3\left(\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}+\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}\right),$$

puis semblablement, pour la seconde égalité (16), d'autre part,

$$\mathcal{A}\frac{lR}{\varphi}+\mathcal{B}\left(\frac{lR}{\psi}-\frac{lP}{\psi}\right)-\mathcal{C}\frac{lP}{\varpi}$$

$$=\frac{1}{R}\frac{R}{\varphi}\left(Q\frac{R}{\psi}\frac{P}{\varpi}+R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}-P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\psi}\right)+\frac{1}{R}\frac{R}{\psi}\left(R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}+P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}-Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right)$$

$$-\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\left(R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}+P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}-Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\varpi}\right)-\frac{1}{P}\frac{P}{\varpi}\left(P\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}+Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}-R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varphi}\right)=0.$$

(*) Nous eussions pu obtenir également de prime abord ces deux équations (15) et (17) en substituant, comme tout à l'heure, les expressions (12) dans nos deux formules (90) du paragraphe IV de notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure*, etc. (page 95.).

colonne (68) (page 82, ***Mémoire sur la Courbure,*** etc.) subsistent sans modification pour le cas particulier des trois familles isothermes. Pour cela il n'y aura qu'à remettre simplement dans l'expression (67) (page 80, *ibid.*) de chacune des trois quantités T, T', T'', pour les six courbures principales, les valeurs nouvelles (12) à la place de celles (2) que nous y avions substituées lors du Cas général, et en même temps, à la place de $\Delta_1\varphi, \Delta_1\psi, \Delta_1\varpi$, leurs valeurs (11) en P, Q, R. Or comme, d'une part, ces trois expressions T, T', T'' se déduisent les unes des autres par la permutation des trois surfaces coordonnées, et que d'autre part cette même permutation, opérée sur le tableau (12) des courbures principales, revient à y permuter à la fois les deux groupes (φ, ψ, ϖ) et (P, Q, R), il est clair qu'il suffira de former la première des équations demandées seulement, et que les deux autres s'en déduiront ensuite par la double permutation que nous venons de dire.

A cet effet, ayant pour le premier terme de la quantité T précitée, en ayant égard aux valeurs (11) et (12),

$$\Delta_1\psi\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1'}\right)=\frac{1}{\sqrt{RP}}\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{2\sqrt{RP}}\,\frac{lP}{\psi}\right)=\frac{1}{2}(RP)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{d\psi}\left(R^{-\frac{1}{2}}P^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{P}{\psi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(RP)^{-\frac{1}{2}}\left(R^{-\frac{1}{2}}P^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{P^2}{\psi^2}-\frac{3}{2}R^{-\frac{1}{2}}P^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{P}{\psi}\right)^2-\frac{1}{2}R^{-\frac{3}{2}}P^{-\frac{1}{2}}\frac{P}{\psi}\,\frac{R}{\psi}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2R^{-1}P^{-2}\cdot\frac{P^2}{\psi^2}\quad-3R^{-1}P^{-3}\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\quad-R^{-2}P^{-2}\frac{P}{\psi}\,\frac{R}{\psi}\right)$$

$$=\frac{1}{4}R^{-2}P^{-3}\left(2RP\,\frac{P^2}{\psi^2}\qquad-3R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\qquad-P\,\frac{P}{\psi}\,\frac{R}{\psi}\right),$$

puis remarquant que le second terme de cette même expression T se déduit du premier en y changeant simplement ψ en ϖ, et $\frac{1}{R_1'}$ en $\frac{1}{R_2''}$, c'est-à-dire, d'après les valeurs (12), en permutant seulement ψ et ϖ, et R et Q, nous aurons dès lors pour ce second terme, sans recommencer le calcul,

$$\Delta_1\varpi\,\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2''}\right)=\frac{1}{4}Q^{-2}P^{-3}\left(2QP\,\frac{P^2}{\varpi^2}-3Q\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2-P\,\frac{P}{\varpi}\,\frac{Q}{\varpi}\right);$$

et par conséquent nous trouverons pour l'expression T précitée (formule (67), page 80, du *Mémoire*), en y remettant à la fois ces deux dernières expressions, ainsi que les valeurs (12),

$$T = \Delta_1\psi \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1'}\right) + \Delta_1\varpi \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2''}\right) + \left(\frac{1}{R_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2''}\right)^2 + \frac{1}{R_1R_2}$$

$$= \frac{1}{4R^2P^3}\left(2RP\frac{P^2}{\psi^2} - 3R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 - P\frac{P}{\psi}\frac{R}{\psi}\right) + \frac{1}{4Q^2P^3}\left(2QP\frac{P^2}{\varpi^2} - 3Q\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 - P\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varpi}\right)$$

$$+ \frac{1}{4RP}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2 + \frac{1}{4PQ}\left(\frac{lP}{\varpi}\right)^2 + \frac{1}{4QR}\frac{lR}{\varphi}\frac{lQ}{\varphi}.$$

Par conséquent, en multipliant d'abord par $4P^3Q^2R^2$, l'équation demandée $T = 0$, sera

$$Q^2\left(2RP\frac{P^2}{\psi^2} - 3R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 - P\frac{P}{\psi}\frac{R}{\psi}\right) + R^2\left(2QP\frac{P^2}{\varpi^2} - 3Q\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 - P\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varpi}\right)$$

$$+ Q^2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 + QR^2\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 + P^3\frac{R}{\varphi}\frac{Q}{\varphi} = 0,$$

ou, en réduisant, séparant en deux membres, puis enfin ajoutant et retranchant pour la symétrie le terme $P^3\frac{R}{\varphi}\frac{Q}{\varphi}$,

$$2PQR\left(Q\frac{P^2}{\psi^2} + R\frac{P^2}{\varpi^2}\right) = 2\left(Q^2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2 + QR^2\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2 - P^3\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}\right)$$

$$+ P\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi} + Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi} + R^2\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varpi}\right).$$

Si donc, pour écrire ces équations, nous convenons de représenter par le symbole G l'expression symétrique en φ, ψ, ϖ d'une part, et P, Q, R de l'autre,

$$(18) \qquad G = P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi} + Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi} + R^2\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varpi},$$

les trois équations (4) du Cas général seront, pour le problème actuel, les trois suivantes (*):

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
&2PQR\left(Q\frac{P^2}{\psi^2}+R\frac{P^2}{\varpi^2}\right)=2\left(Q^2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2+QR^2\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2-P^3\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}\right)+PG,\\
&2PQR\left(R\frac{Q^2}{\varpi^2}+P\frac{Q^2}{\varphi^2}\right)=2\left(R^2P\left(\frac{Q}{\varpi}\right)^2+RP^2\left(\frac{Q}{\varphi}\right)^2-Q^3\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right)+QG,\\
&2PQR\left(P\frac{R^2}{\varphi^2}+Q\frac{R^2}{\psi^2}\right)=2\left(P^2Q\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2+PQ^2\left(\frac{R}{\psi}\right)^2-R^3\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varpi}\right)+RG;
\end{aligned}\right.$$

et les trois inconnues P, Q, R, qui sont par hypothèse des fonctions de φ, ψ, ϖ de la forme (9), seront déterminées, en conséquence, par la double condition de satisfaire simultanément au système du premier ordre (13) et à ce dernier système du second ordre (19). Nous effectuerons complètement cette détermination dans le Chapitre IV, qui suivra celui-ci.

Les expressions des trois fonctions P, Q, R étant ainsi supposées connues, on en conclura immédiatement par les formules (11) les valeurs en φ, ψ, ϖ des trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$; et dès lors, en remettant ces valeurs dans les six équations du premier ordre (5), ces dernières équations feront connaître à leur tour l'expression des trois inconnues x, y, z en fonction des mêmes variables : ce qui revient encore à dire, sous forme plus directe, en multipliant chacune de ces équations par PQR, et ayant alors égard aux formules (10), que les trois inconnues x, y, z seront ensuite déterminées, elles aussi, par la

---

(*) Lamé ne présente ces équations *elles-mêmes* (c'est-à-dire avant d'y introduire aucun résultat de calculs antérieurs) que sous le type extrêmement complexe (équation (19) du § LVII, *ibid.*, page 101)

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\sqrt{\frac{P}{QR}}\frac{d\sqrt{R}}{d\varphi}\right)+\frac{d}{d\psi}\left(\sqrt{\frac{Q}{RP}}\frac{d\sqrt{R}}{d\psi}\right)-\frac{R}{PQ}\frac{d\sqrt{P}}{d\varpi}\frac{d\sqrt{Q}}{d\varpi}=0,$$

qui masque complètement la véritable forme analytique de ces équations, et ne permet même pas d'apprécier le degré de complication ou de facilité nouvelle qu'elles introduisent dans la question.

double condition de satisfaire simultanément aux six équations du premier ordre

$$(20)\quad\begin{cases} P\left(\dfrac{x}{\varphi}\right)^2+Q\left(\dfrac{x}{\psi}\right)^2+R\left(\dfrac{x}{\varpi}\right)^2=PQR, & P\dfrac{y}{\varphi}\dfrac{z}{\varphi}+Q\dfrac{y}{\psi}\dfrac{z}{\psi}+R\dfrac{y}{\varpi}\dfrac{z}{\varpi}=0,\\ P\left(\dfrac{y}{\varphi}\right)^2+Q\left(\dfrac{y}{\psi}\right)^2+R\left(\dfrac{y}{\varpi}\right)^2=PQR, & P\dfrac{z}{\varphi}\dfrac{x}{\varphi}+Q\dfrac{z}{\psi}\dfrac{x}{\psi}+R\dfrac{z}{\varpi}\dfrac{x}{\varpi}=0,\\ P\left(\dfrac{z}{\varphi}\right)^2+Q\left(\dfrac{z}{\psi}\right)^2+R\left(\dfrac{z}{\varpi}\right)^2=PQR, & P\dfrac{x}{\varphi}\dfrac{y}{\varphi}+Q\dfrac{x}{\psi}\dfrac{y}{\psi}+R\dfrac{x}{\varpi}\dfrac{y}{\varpi}=0,\end{cases}$$

chaque coordonnée rectiligne devant ainsi de nouveau vérifier d'abord isolément une équation aux dérivées partielles, non linéaire du même type, et ensuite, conjointement avec les deux autres, le système formé des trois autres équations de droite. — Nous effectuerons encore cette détermination, de la façon la plus générale, dans le Chapitre V du présent travail.

Simplification de la méthode pour les cas particuliers qui admettent des surfaces développables dans la composition du système. — Nous résoudrons donc ainsi complètement, dans les deux Chapitres qui suivront celui-ci, le problème d'analyse posé par Lamé dans les termes que nous venons de dire, et dont il se borne à écrire pour ainsi dire d'emblée, et comme par une sorte de divination, une solution remarquable, mais sans que rien dans ses raisonnements ni ses calculs permette de penser que cette solution soit réellement la seule, ou seulement la plus générale (*). Mais, comme le point de départ de nos calculs pour le cas le plus général (nous entendons par là celui où l'on n'assigne pas par avance une valeur déterminée à aucune des six dérivées des fonctions P, Q, R) supposera essentiellement

(*) Nous entendons parler expressément ici des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, dont nous avons seul connaissance, quant à la question posée dans les pages qui précèdent. — Nous ne savons en effet à quel ouvrage Lamé fait allusion lorsqu'il dit : « J'ai démontré *depuis* que les valeurs (14) des Q_i^2 (nos fonctions P, Q, R) sont les intégrales *les plus générales* du groupe des trois équations aux différences partielles qu'elles vérifient ». (*Coordonnées Curvilignes*, § LVI, page 100, dernier alinéa).

qu'aucune de ces dérivées n'est constamment égale à zéro, nous serons obligés de traiter à part les cas particuliers où l'on admet cette hypothèse à l'égard de l'une ou de plusieurs de ces dérivées.

Ces cas particuliers seront d'ailleurs nombreux et importants à considérer, car il résulte des expressions (12) que l'hypothèse analytique que nous venons de dire équivaut à admettre que, parmi les courbures principales du système, il s'en trouve une ou plusieurs qui sont constamment nulles, circonstance qui se produira toutes les fois que parmi les trois familles de surfaces coordonnées il entrera des surfaces développables (*), c'est-à-dire notamment des plans, des cônes ou des cylindres, et qui, se trouvant réalisée par conséquent pour chacun des systèmes de coordonnées classiques, tous composés exclusivement de familles isothermes, fera rentrer dès lors ces divers systèmes au nombre des cas particuliers que nous venons de signaler.

Si l'on se reporte, en outre, au second Théorème de Lamé, que nous démontrons dans le Chapitre Ier de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (pp. 28-29), on verra encore que ces mêmes cas particuliers seront tous caractérisés par l'une ou l'autre de ces deux circonstances, que deux des normales principales aux trois arcs d'intersection des surfaces coordonnées deux à deux feront entre elles un angle droit, ou bien que l'un de ces arcs d'intersection aura son rayon de courbure constamment infini, et sera par conséquent une droite.

Comme rien ne garantit à l'avance, par ailleurs, que les seuls systèmes classiques représentent la totalité de ces cas particuliers (ni même plus généralement que les plans, les cônes, et les cylindres soient les seules surfaces développables susceptibles de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme), il ne nous est pas permis d'en négliger l'étude, et c'est à cet examen

---

(*) En effet, si l'on se reporte à l'équation classique qui détermine les deux rayons de courbure principaux, ou les deux courbures principales d'une surface quelconque, le produit $\frac{1}{R_1R_2} = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$ de ces deux courbures s'annulant en tous points pour les surfaces qui vérifient l'équation aux dérivées partielles $rt - s^2 = 0$, on voit que pour toute surface développable, l'une au moins de ces deux courbures sera constamment nulle.

détaillé, auquel ne procèdent ni Lamé ni Betti, dans les ouvrages déjà cités, que nous allons consacrer le restant de ce Chapitre.

A la vérité, trois sur quatre des Cas particuliers les plus importants que nous allons rencontrer sont bien mentionnés et étudiés dans les *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, savoir le système sphérique (§§ XXXII-XXXIII, pp. 52-56, et § LIV, p. 96), le système cylindrique (§ XLVIII, pp. 84-86) et le système conique (§ XLIX, pp. 86-88). Mais au lieu de les rencontrer chacun, ainsi que nous allons le faire, comme résultat de l'intégration de ses équations générales, Lamé se contente de vérifier, avant d'entreprendre sa recherche, que ces mêmes systèmes, considérés comme donnés *a priori*, satisfont bien chacun à ces mêmes équations générales, ou, ce qui est la même chose, vérifient bien les formules (ou théorèmes) relatives aux courbures principales du système, qui ne sont que l'expression géométrique des dites équations. Or, nous avons déjà fait observer dans notre Chapitre II (p. 58), à propos du simple problème de l'isothermie que nous avons dû reprendre, pour une raison semblable, à l'aide d'une méthode inverse de celle de Lamé, qu'en adoptant une pareille marche, aucune considération ne permet de penser que ces diverses solutions particulières soient effectivement les seules distinctes du Cas général, non seulement d'une manière collective, mais encore, en décomposant et précisant davantage la question, que chacune d'elles considérée isolément soit la seule solution possible du problème pour les données analytiques spéciales auxquelles elle correspond ; et, par conséquent, les indications précitées de Lamé, utiles et intéressantes en tant que vérification des calculs assez compliqués par lesquels il a établi les dites équations générales, laissent en réalité absolument entière la question de la recherche des cas particuliers du problème, à laquelle nous allons consacrer la fin de la Première Partie de notre travail.

Nous retrouverons ainsi successivement, à très peu près dans l'ordre où nous les avons déjà considérés, les différents systèmes de coordonnées dont nous avons eu occasion de faire usage, dans le troisième Chapitre de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordon-*

nées Curvilignes, pour la détermination des lignes géodésiques des surfaces les plus usuelles, et l'application que nous en avons faite pour cet objet pourrait déjà être invoquée, s'il en était besoin, comme témoignage de l'utilité des nouveaux systèmes que cette étude va ainsi nous révéler, à la suite des trois systèmes de coordonnées classiques, et par conséquent aussi de l'intérêt qu'il y a à savoir d'une façon certaine qu'ils sont réellement les seuls qui puissent être composés exclusivement de familles isothermes.

Pour ces différents Cas que nous venons de spécifier, en vue de profiter de la simplicité plus grande du problème analytique inhérente aux conditions particulières de la question, nous adopterons, pour la seconde étape de la recherche, une marche plus rapide, un peu différente de celle que nous avons exposée tout à l'heure en vue du Cas le plus général, et qui sera uniformément pour tous ces divers cas la suivante.

Ayant commencé encore par faire usage des six équations (13) et (19) pour reconnaître tout d'abord s'il est possible, avec l'hypothèse donnée, que le problème reçoive une solution, et dans l'affirmative pour déterminer en φ, ψ, ϖ les trois fonctions P, Q, R, au lieu de déterminer ensuite, comme tout à l'heure, les trois inconnues définitives x, y, z, par le moyen des six équations (20), nous reconnaîtrons tout d'abord très rapidement, à l'aide du tableau des courbures principales (12) (*), et en invoquant les différents théorèmes que nous avons établis précisément dans cette vue au cours de notre Chapitre II, à quelle catégorie géométrique, plans, cônes, cylindres, sphères, etc.... appartient chacune des trois familles de surfaces coordonnées; et la partie la plus importante de la solution étant ainsi obtenue, le système d'équations corres-

(*) En faisant ainsi intervenir la considération des courbures principales du système pour éclairer notre route et déblayer le terrain dans le problème si compliqué de l'intégration des équations (13), (19), et (20) ou (5), c'est encore l'exemple et les indications de Lamé lui-même que nous suivons, car il adopte à deux reprises cette même considération comme point de départ de ses calculs pour le Cas général, une première fois pour la détermination des fonctions P, Q, R (*Coordonn. Curv.*, §§ LIV-LV, formules (8), page 97), et une seconde fois pour la détermination des inconnues x, y, z elles-mêmes (*Ibid.*, §§ LXI-LXII, formules (32), pp. 110-111).

pondant aux systèmes (5) ou (20) en coordonnées rectilignes, c'est-à-dire en tenant compte des formules (11), les six équations

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2=\frac{1}{QR}, \quad (^*) && \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{x}+\frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{y}+\frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{z}=0,\\ &\left(\frac{\psi}{x}\right)^2+\left(\frac{\psi}{y}\right)^2+\left(\frac{\psi}{z}\right)^2=\frac{1}{RP}, && \frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{x}+\frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{y}+\frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{z}=0,\\ &\left(\frac{\varpi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varpi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varpi}{z}\right)^2=\frac{1}{PQ}, && \frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{x}+\frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{y}+\frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{z}=0, \end{aligned}\right.$$

ou encore parfois trois équations de ce dernier système, jointes à trois autres empruntées au système (1) considéré en premier lieu, nous fourniront alors, par des intégrations très faciles, ou même de simples identifications, les expressions en x, y, z des trois fonctions φ, ψ, ϖ, c'est-à-dire alors les équations exactes des trois familles de surfaces coordonnées, équations d'où l'on pourra tirer ensuite, si l'on aime mieux, de même que pour le Cas le plus général, les valeurs en φ, ψ, ϖ des trois coordonnées x, y, z, qu'il est surtout, dans la pratique, intéressant de posséder (**).

La considération des courbures principales du système étant ainsi en quelque sorte la base essentielle de cette nouvelle méthode de recherche, il convient tout d'abord d'arrêter un instant notre attention sur le tableau (12) des expressions de ces courbures.

(*) Si l'on multiplie, en effet, les trois équations de droite respectivement par les produits $\Delta_1^{-1}\psi\Delta_1^{-1}\varpi$, $\Delta_1^{-1}\varpi\Delta_1^{-1}\varphi$, $\Delta_1^{-1}\varphi\Delta_1^{-1}\psi$, ainsi que celles de gauche respectivement par les trois carrés $\Delta_1^{-2}\varphi = QR$, $\Delta_1^{-2}\psi = RP$, $\Delta_1^{-2}\varpi = PQ$, il est visible que ces équations représenteront bien ainsi les six relations entre les cosinus directeurs des trois normales exprimés en coordonnées rectilignes. De plus, telles qu'elles sont, les trois équations de gauche traduisent encore, eu égard aux égalités que nous venons d'écrire, les définitions des symboles $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ dans le même système de coordonnées.

(**) Ce sont en effet ces dernières expressions, et non les précédentes ou les formules inverses, qui permettront, dans le cas où l'on croira y trouver avantage, d'introduire le système de coordonnées curvilignes en question à la place des coordonnées x, y, z, par simple substitution dans un calcul primitivement exprimé en coordonnées rectilignes. Aussi sont-ce ces formules que nous viserons constamment comme but final de notre recherche.

Or, chacune de ces expressions étant proportionnelle à l'une des six dérivées $\frac{P}{\psi}$, $\frac{P}{\varpi}$, $\frac{Q}{\varpi}$, $\frac{Q}{\varphi}$, $\frac{R}{\varphi}$, $\frac{R}{\psi}$, on sera amené tout naturellement à classer ces dérivées de différentes manières, suivant qu'on lira ce tableau par lignes horizontales, par lignes verticales, ou de toute autre façon. En vue d'abréger le discours à maintes reprises dans toute la discussion qui va suivre, et d'introduire la clarté dans le raisonnement par la précision du langage, nous ferons usage dorénavant, pour ces dérivées, des dénominations suivantes, calquées, en quelque sorte, sur celles que Lamé attribue aux six courbures principales correspondantes (*).

Nous appellerons *dérivées d'un même groupe* (caractérisé par l'indice 1 ou 2) les trois dérivées des fonctions P, Q, R qui figurent dans une même ligne horizontale de ce tableau, lesquelles sont relatives chacune à une variable indépendante et à une fonction différente ; et pour deux dérivées empruntées ainsi chacune à un groupe différent, nous désignerons par le nom de *dérivées conjuguées* celles qui figurent dans une même ligne verticale, et qui, étant relatives à la même variable indépendante, correspondent à la même surface coordonnée, et par celui de *dérivées réciproques*, celles qui, étant relatives à deux variables indépendantes différentes, appartiennent à la même fonction P, Q, R.

Ces dénominations étant admises, la forme simple et remarquable de l'équation (15) nous apprend que, si l'une des dérivées de l'un des groupes est supposée nulle, il y en aura forcément une autre parmi les dérivées de l'autre groupe qui sera nulle également.

Cela posé, si l'on veut être sûr de ne laisser échapper aucune solution, il sera nécessaire d'examiner successivement six Cas distincts, suivant le nombre de ces dérivées que l'on supposera nulles à la fois, le dernier ou le plus général étant celui où l'on

---

(*) En introduisant ces dénominations, nous ne faisons que transporter aux dérivées elles-mêmes les appellations que Lamé attribue, pour l'énoncé de ses théorèmes, aux courbures principales correspondant à ces mêmes dérivées dans le tableau des expressions (12). Pour la justification de ces dénominations, se reporter en conséquence aux *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, § XXIX (pp. 49-50), et § XLVII (p. 83 *in medio*), ou bien encore à notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (pp. 86 au bas, et 87). (Voir également, un peu plus loin, pour supplément d'explication, la note du Cas III, sous-cas 1°.)

n'admet cette supposition pour aucune d'entre elles. A chacune de ces hypothèses correspondra une solution différente du problème, dont il importe, non seulement de préciser avec soin la signification géométrique, mais encore de délimiter très exactement l'étendue, ce qui ne pourra être fait qu'à l'aide de l'examen attentif et minutieux auquel nous allons maintenant procéder.

Systèmes classiques des coordonnées rectilignes, et des coordonnées cylindriques du second ordre. — I° « *Les six dérivées précitées sont nulles à la fois* », c'est-à-dire que l'on a

$$(22)\quad \frac{P}{\psi}=0,\quad \frac{P}{\varpi}=0,\quad \frac{Q}{\varpi}=0,\quad \frac{Q}{\varphi}=0,\quad \frac{R}{\varphi}=0,\quad \frac{R}{\psi}=0.$$

Il est évident que toutes nos équations (13) et (19) sont vérifiées simultanément par ces hypothèses. De plus, les six courbures principales (12) étant alors toutes nulles à la fois, chaque surface coordonnée φ, ψ, ϖ est un plan; et l'on reconnaît dès lors, par une conséquence géométrique presque immédiate, que chacune des trois familles se compose de plans parallèles; car si, considérant deux familles en particulier, et dans chacune d'elles une surface individuelle correspondant à une valeur déterminée du paramètre, ainsi que la droite d'intersection D de ces deux plans, tous les plans composant la troisième famille devront être perpendiculaires à cette même droite D, et par conséquent seront parallèles entre eux.

On parviendrait à la même conclusion par voie analytique, en remarquant que les hypothèses (22), étant jointes aux conditions générales (8), expriment alors que les trois fonctions P, Q, R sont simultanément de simples constantes. Il en est donc de même, d'après les expressions (11), des trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$. Or, si l'on se reporte pour chacune des trois familles à l'interprétation géométrique donnée par Lamé (*) de l'invariant ou paramètre différentiel Δ_1, et qu'exprime la formule (40bis) (p. 44) de notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces*, en

(*) Lamé, *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, § VII, p. 11, *au bas*.

appelant N la longueur de la normale à la surface particulière φ_1 au point (ψ, ϖ) comprise entre cette surface et l'autre surface particulière φ_2, on aura par cette formule

$$(22^{bis})\quad \frac{dN}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta_1\varphi} = C, \qquad \text{d'où} \qquad N = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} C d\varphi = C(\varphi_2 - \varphi_1), \ (^*)$$

résultat indépendant du point (ψ, ϖ) considéré sur la surface φ_1, et qui montre dès lors que les deux plans arbitraires φ_1 et φ_2 sont partout à la même distance, c'est-à-dire parallèles.

La solution pour ce premier Cas consiste donc simplement dans le système usuel des *Coordonnées Planes* ou *Rectilignes*.

II° « *Cinq des dérivées seulement sont supposées nulles à la fois* » soit, par exemple,

$$(23)\quad \frac{P}{\psi} = 0, \quad \frac{P}{\varpi} = 0, \quad \frac{Q}{\varpi} = 0, \quad \frac{Q}{\varphi} = 0, \quad \frac{R}{\varphi} = 0,$$

la dernière dérivée seule, $\frac{R}{\psi}$, étant supposée différente de zéro.

Ces hypothèses vérifient encore immédiatement nos équations du premier ordre (13), chacun des termes s'y réduisant séparément à zéro, comme renfermant au moins deux dérivées en facteurs; et quant au groupe du second ordre (19), la quantité G (18) étant alors évidemment nulle par la même raison que nous venons de dire, ces mêmes hypothèses vérifieront encore les deux premières de ces équations, et réduiront la dernière (les carrés des fonctions P, Q, R, (7), de même que leurs numérateurs $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\psi$, $\Delta_1^2\varpi$, qui sont des sommes de trois carrés,

(*) La grandeur finie, que l'on obtiendrait en général par une quadrature semblable, serait celle de l'arc d'intersection des deux surfaces ψ et ϖ correspondant aux valeurs considérées de ces coordonnées, et limité aux deux surfaces φ_1 et φ_2, intersection dont chaque élément *ds* se confond, d'après la définition même du système orthogonal, avec l'élément *dn* de la normale à la surface φ qui rencontre cet élément. Seulement il arrive dans ce premier Cas, de même que dans les deux subséquents III° et V°, que, par suite de la nature, reconnue *a priori*, des familles ψ et ϖ, cet arc d'intersection, étant une droite, constitue par conséquent, d'après ce que nous venons de dire, une normale commune aux deux surfaces φ_1 et φ_2 correspondant à ses extrémités. La même circonstance enfin se produira également dans les deux Cas, II° à l'égard des familles ψ et ϖ, et IV° quant à la famille ψ seule, entraînera dès lors la même conséquence relativement à deux surfaces quelconques de l'une ou l'autre de ces deux familles.

ne pouvant être nuls en tout point, ce qui permet de diviser les équations par ces facteurs P, Q, R) simplement à celle-ci :

$$\mathrm{R}\,\frac{\mathrm{R}''}{\psi^2}-\left(\frac{\mathrm{R}'}{\psi}\right)^2=0,\quad \text{ou}\quad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{d\psi}\right)=0,\quad \text{ou encore}\quad \frac{d^2.l\mathrm{R}}{d\psi^2}=0,$$

laquelle donnera par suite, en intégrant,

$$l\mathrm{R}=2c\psi+2c',\qquad \text{ou}\qquad \mathrm{R}=e^{2(c\psi+c')},$$

en sorte que les valeurs des inconnues P, Q, R, relatives aux hypothèses (23), seront alors

$$(24)\qquad \mathrm{P}=\mathrm{C}^2,\qquad \mathrm{Q}=\mathrm{C}'^2,\qquad \mathrm{R}=e^{2(c\psi+c')}.$$

D'autre part, étant introduites dans les expressions (12) des six courbures principales, ces mêmes hypothèses (23) montrent comme tout à l'heure que les surfaces φ et ϖ sont encore des plans, et que les surfaces ψ sont des surfaces développables, puisque, en se reportant à l'équation classique qui fournit l'expression des courbures principales d'une surface quelconque, le produit de ces courbures pour ces surfaces ψ, savoir $\frac{1}{\mathrm{R}'_1}\frac{1}{\mathrm{R}'_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$, est alors égal à zéro.

Or, on aperçoit tout de suite qu'on ne pourra supposer pour ce Cas que les deux familles de plans φ et ϖ se composent l'une et l'autre de plans parallèles, car le même raisonnement déjà présenté à propos du Cas précédent I° fait voir aisément que dans cette supposition les six dérivées précitées seraient nécessairement toutes nulles à la fois, ce qui est contraire à l'hypothèse actuelle (23).

Cela étant, prenons pour la famille φ celle de ces deux familles qui, en tout état de cause, n'est pas composée de plans parallèles. Le Théorème I de notre Chapitre II (p. 118), ou mieux encore la forme (69), basée sur cette hypothèse, que nous avons donnée à l'équation générale des familles isothermes de plans, permettra alors, en particularisant le choix des axes, de lui attribuer pour équation celle-ci :

$$(25)\qquad \frac{y}{x}=\operatorname{tang}(\alpha\varphi+6),\qquad \text{d'où}\qquad \cos^2(\alpha\varphi+6)=\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

laquelle donnera par la différentiation

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{x}, \\ &\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}\frac{d\varphi}{dz} = 0; \end{aligned} \right.$$

et alors, tous les plans de cette famille contenant l'axe des z, tous ceux de la famille ϖ seront parallèles aux xy, en sorte que cette seconde famille aura nécessairement à son tour une équation de la forme

$$(27)\qquad \varpi = az + b, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\varpi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varpi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\varpi}{dz} = a.$$

Dès lors, en se reportant aux trois équations de droite (21) et multipliant les deux dernières par le facteur $\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}$, on voit que la seconde de ces équations est d'ores et déjà vérifiée par les valeurs précédentes (27) et (26), et qu'en remettant dans les deux autres ces mêmes valeurs, elles se réduiront respectivement à celles-ci :

$$(28)\qquad \frac{d\psi}{dz} = 0, \quad \text{et} \quad -\frac{y}{x^2}\frac{d\psi}{dx} + \frac{1}{x}\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad \text{ou} \quad y\frac{d\psi}{dx} - x\frac{d\psi}{dy} = 0,$$

dont la première montre que les surfaces ψ sont des cylindres parallèles à l'axe des z, et la seconde déterminera par son intégrale générale la nature spéciale de ces cylindres, ou, ce qui revient au même, leur section droite par le plan xy. Or, cette intégrale, étant fournie par le système simultané

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \qquad \text{ou} \qquad xdx + ydy = 0 \qquad \text{et} \qquad d\psi = 0,$$

et d'ailleurs ψ ne contenant pas z, en vertu de la première équation (28), sera par conséquent

$$(29)\qquad x^2 + y^2 = \Psi(\psi);$$

d'où l'on voit que les surfaces ψ qui restaient seules à définir,

sont des cylindres de révolution autour de l'axe des z, par lequel passent tous les plans φ.

Dans ce second Cas, la solution cherchée se compose donc uniquement de la famille de plans ϖ normaux à l'axe des z, des plans méridiens φ menés tous par cet axe, et enfin de la famille de cylindres ψ, de révolution autour du même axe. C'est donc le système classique des *Coordonnées Cylindriques du Second Ordre*, ou *Semi-polaires*.

Du moment que nous avions reconnu dès le début de ce numéro, et par la seule considération des courbures principales, que la solution relative à ce Cas se composait de deux familles de plans et d'une famille de surfaces développables, l'on pouvait affirmer *a priori* qu'elle comprendrait ce système dont les trois familles sont toutes isothermes; mais il n'était ni évident, ni présumable qu'elle ne dût renfermer que celui-là seulement, d'où la nécessité et l'intérêt des raisonnements et des calculs que nous avons présentés à ce sujet (*).

La composition du système au point de vue géométrique étant ainsi exactement déterminée, bien que l'expression des coordonnées rectilignes en fonction des coordonnées classiques ρ et ω soit élémentaire et employée à tout instant, comme celle des mêmes coordonnées x, y, z en fonction des coordonnées thermométriques actuelles φ, ψ, ϖ est beaucoup moins connue, nous croyons devoir poursuivre encore cette dernière recherche, en vue notamment de savoir au juste combien il entrera dans les dites expressions de constantes réellement arbitraires, et la manière exacte dont elles y figureront (**).

(*) La démonstration claire et rigoureuse de ce résultat ainsi strictement délimité eût été beaucoup plus difficile, sinon impossible, si nous n'avions pas établi préalablement, comme nous l'avons fait dans notre Chapitre II, la forme nécessaire de l'équation de toute famille isotherme de plans, ou, ce qui revient au même, la propriété caractéristique de tels plans de passer tous par une même droite, cette droite pouvant d'ailleurs être transportée à l'infini dans le cas des familles de plans parallèles.

(**) Ces constantes pouvant servir éventuellement à faire disparaître, dans les équations non homogènes, un nombre égal de termes gênants pour les calculs, nous croyons qu'il est intéressant d'en connaître exactement le nombre, même pour ce Cas simple, de même que nous nous proposons de le faire pour tous les Cas plus complexes qui viendront à la suite.

Pour cela, mettant tout d'abord l'équation (27) de la famille ϖ, en la résolvant par rapport à z, sous la forme

$$(30) \qquad z = \frac{1}{a}\varpi - \frac{b}{a} \qquad \text{ou} \qquad z = m\varpi + n,$$

nous aurons, en élevant au carré, puis ajoutant, séparément, les valeurs (27) d'une part, et (26) de l'autre,

$$(31) \qquad \Delta_1^2\varpi = a^2 = \frac{1}{m^2},$$

$$\frac{\alpha^2}{\cos^4(\alpha\varphi + 6)}\Delta_1^2\varphi = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)^2,$$

et, en tenant compte alors de l'équation de droite (25), puis de l'équation (29) trouvée tout à l'heure pour la famille ψ :

$$(32) \qquad \alpha^2\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\Psi(\psi)}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_1^2\varphi = \frac{1}{\alpha^2\Psi(\psi)}.$$

Enfin, cette même équation (29) donnera semblablement pour la famille ψ,

$$\Psi'\frac{d\Psi}{dx} = 2x, \quad \Psi'\frac{d\Psi}{dy} = 2y, \quad \Psi'\frac{d\Psi}{dz} = 0, \quad \Psi'^2.\Delta_1^2\psi = 4(x^2 + y^2) = 4\Psi,$$

d'où l'on tirera par conséquent :

$$(33) \qquad \Delta_1^2\psi = \frac{4\Psi}{\Psi'^2} = \frac{1}{\left(\frac{\Psi'}{2\sqrt{\Psi}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{d\sqrt{\Psi}}{d\psi}\right)^2}.$$

Substituant donc ces trois valeurs (32), (33), et (31), de $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\psi$, $\Delta_1^2\varpi$, ainsi que celles (24) de P, Q, R, dans les trois équations de gauche (21), qui nous restent seules désormais à vérifier, nous obtiendrons

$$\frac{1}{\alpha^2\Psi(\psi)} = \frac{1}{C'^2e^{2(c\psi+c')}}, \qquad \frac{1}{\left(\frac{d\sqrt{\Psi}}{d\psi}\right)^2} = \frac{1}{C^2e^{2(c\psi+c')}}, \qquad \frac{1}{m^2} = \frac{1}{C^2C'^2},$$

ou, ce qui est la même chose :

$$(34)\qquad \alpha\sqrt{\Psi(\psi)} = C'e^{c\psi+c'}, \qquad \frac{d\sqrt{(\Psi\psi)}}{d\psi} = Ce^{c\psi+c'}, \qquad m = CC'.$$

Or, la première de ces équations donnant

$$(35)\qquad \sqrt{\Psi(\psi)} = \frac{C'}{\alpha}e^{c\psi+c'}, \qquad \frac{d\sqrt{\Psi(\psi)}}{d\psi} = \frac{C'c}{\alpha}e^{c\psi+c'},$$

la seconde et la troisième établiront dès lors entre les huit constantes C, C', c, c', m, n, α et 6 les deux seules relations

$$(36)\qquad \frac{C'c}{\alpha} = C \qquad \text{et} \qquad m = CC';$$

d'où il suit que sur ces huit constantes il en restera six complètement arbitraires, savoir, d'abord c', n et 6, qui ne figurent pas dans les deux relations précédentes, et trois autres qu'on pourra prendre à volonté parmi C, C', c, m et α. Si donc nous faisons choix expressément pour ces trois dernières arbitraires de c, m et α, les deux relations (36) déterminant alors C et C' en fonction de celles-ci, et que nous convenions d'introduire, pour l'homogénéité, à la place de la constante arbitraire c' la nouvelle constante linéaire $l = \frac{C'}{\alpha}e^{c'}$, la valeur (35) de $\sqrt{\Psi}$ trouvée tout à l'heure devenant ainsi

$$\sqrt{\Psi(\psi)} = \frac{C'}{\alpha}e^{c'}.e^{c\psi} = le^{c\psi}, \qquad \text{d'où} \qquad \Psi(\psi) = l^2e^{2c\psi},$$

les équations des trois familles de surfaces composant le système seront alors définitivement

$$(37)\qquad \frac{y}{x} = \text{tang}\,(\alpha\varphi + 6), \qquad x^2 + y^2 = l^2e^{2c\psi}, \qquad z = m\varpi + n,$$

ou, ce qui est la même chose, en résolvant les deux premières,

$$(38)\qquad x = le^{c\psi}\cos(\alpha\varphi + 6), \qquad y = le^{c\psi}\sin(\alpha\varphi + 6), \qquad z = m\varpi + n,$$

et contiendront les six constantes complètement arbitraires l, m, n, c, α et β.

A la vérité, les équations (37) ou (38), que nous venons de trouver, ne diffèrent pas de celles que nous eussions obtenues, après avoir déterminé la nature géométrique de chaque famille de surfaces, en rapportant isolément chacune d'elles à son paramètre thermométrique au moyen du procédé de Lamé (*); mais rien ne nous eût assurés, en suivant cette voie, que les six constantes ainsi introduites (deux constantes σ et τ pour chaque famille) fussent séparément arbitraires, ou, ce qui est la même chose, indépendantes entre elles (**), fait qui ressort au contraire très nettement du dernier calcul que nous venons de présenter, et qui suffit dès lors à en justifier l'opportunité.

Système des coordonnées cylindriques en général. Exemples. — III° « *Quatre des mêmes dérivées sont supposées nulles* ». — On peut, étant donnée cette hypothèse, en distinguer de nouveau deux autres subsidiaires, suivant que les deux seules dérivées qui ne sont pas nulles appartiendront au même groupe, ou chacune à un groupe différent. Or, il est facile de voir que la première de ces deux hypothèses ne pourra fournir aucune solution de la question.

En effet, supposons que les deux dérivées qui ne sont pas nulles appartiennent au même groupe, et soient, pour fixer les idées, $\frac{P}{\psi}$ et $\frac{Q}{\varpi}$. On aura alors, par hypothèse, en sus des conditions générales (8),

$$\frac{P}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\psi}=0.$$

(*) Ce résultat, évident d'ores et déjà pour la troisième famille ϖ composée de plans parallèles, nous l'avons établi dans notre Chapitre II pour la famille de plans φ [équation (69)], et pour la seconde famille ψ, il nous suffira de signaler qu'il coïncide exactement avec celui qu'indique Lamé pour cette classe de surfaces, dans la série des applications qu'il fait de sa méthode, au début de l'ouvrage déjà cité dans notre Chapitre précédent (*Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc.. § VIII, p. 9, *au bas*).

(**) Nous constaterons effectivement pour les Cas suivants que cette indépendance n'aura pas toujours lieu (voir notamment les expressions définitives analogues, relatives au Cas du système sphérique, lesquelles renferment seulement *cinq* constantes arbitraires, au lieu de six).

Or, en se rapportant aux équations (13), on voit que la première se réduira simplement par ces hypothèses à $R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}=0$, équation qui ne pourra être vérifiée dans le Cas actuel, aucune des trois quantités P, Q, R, de même que leurs numérateurs $\Delta_1\varphi, \Delta_1\psi, \Delta_1\varpi$, ne pouvant être constamment nulle, et les deux autres facteurs $\frac{Q}{\varpi}$ et $\frac{P}{\psi}$ étant expressément supposés différents de zéro (*).

Les deux dérivées qui ne sont pas nulles appartenant dès lors nécessairement chacune à un groupe différent, il faudra encore examiner successivement trois cas, suivant que ces deux dérivées seront conjuguées, réciproques, ou ne rempliront ni l'une ni l'autre de ces conditions. Prenant donc arbitrairement $\frac{P}{\psi}$ pour l'une de ces deux dérivées, il y aura lieu de distinguer les trois sous-cas suivants, selon la colonne du tableau (12) à laquelle appartiendra l'autre dérivée.

1° « *Les deux dérivées qui ne sont pas nulles ne sont ni conjuguées ni réciproques* (**) » (c'est-à-dire qu'elles sont relatives à la fois à des variables indépendantes et à des fonctions diffé-

---

(*) Il est bien clair qu'en prenant successivement deux à deux les trois dérivées du même groupe, la même conclusion subsisterait à l'égard de chacune des trois combinaisons que l'on formerait ainsi, puisque ces combinaisons se déduiraient les unes des autres par la permutation simultanée des deux groupes (φ, ψ, ϖ) et (P, Q, R), laquelle, avons-nous remarqué, échange simplement entre elles les trois équations (13); et, en raisonnant de même, on arriverait encore à la même conclusion à l'égard du second groupe de dérivées.

Enfin le même raisonnement s'appliquera exactement de même aux trois couples de dérivées que l'on pourra ainsi envisager pour chacun des trois sous-cas que nous allons examiner à l'instant.

(**) Les dérivées que nous appelons *conjuguées* correspondent dans le tableau (12) aux courbures principales caractérisées par la propriété très simple et très claire d'appartenir à la même surface coordonnée, propriété que Lamé met en relief en leur attribuant la dénomination de *conjuguées en surface.* Quant aux autres de ces courbures qu'il qualifie de *conjuguées en arc,* et dont le caractère géométrique consiste dans une notion plus complexe et moins facile à saisir, nous avons jugé plus simple et plus clair de ne pas introduire de dénomination spéciale corrélative pour les dérivées qui leur correspondent, (et qui sont précisément celles-là mêmes que vise le premier cas subsidiaire actuellement envisagé), et de les spécifier dans notre classification des dérivées précitées uniquement par voie d'exclusion, ainsi que nous le faisons dans l'énoncé de ce sous-cas 1° (voir, pour plus de détails, LAMÉ, *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes,* § XXIX, p. 50, ou notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces,* p. 87, *in medio*).

rentes), et sont alors (pour fixer les idées) $\frac{P}{\psi}$ et $\frac{Q}{\varphi}$. On a alors, en sus des conditions générales (8), les hypothèses

$$\frac{P}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varpi}=0, \qquad \frac{R}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\psi}=0,$$

qui réduisent comme tout à l'heure la dernière des équations (13) simplement à celle-ci : $R\,\frac{P}{\psi}\,\frac{Q}{\varphi}=0$, laquelle ne peut encore être vérifiée, eu égard à l'hypothèse. Ce sous-cas 1° ne peut donc fournir aucune solution du problème.

2° « *Les deux dérivées qui ne sont pas nulles sont conjuguées* » et sont, par exemple, $\frac{P}{\psi}$ et $\frac{R}{\psi}$. On a alors, outre les conditions (8),

$$(39) \qquad \frac{P}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\varphi}=0.$$

Ces hypothèses vérifient bien à la vérité les équations du premier ordre (13), attendu que chaque terme de ces équations contient en facteurs deux dérivées qui, pour aucun des termes, ne sont relatives à la même variable indépendante, mais elles sont incompatibles avec le groupe du second ordre (19), attendu que la seconde de ces équations se réduit par ces hypothèses à $Q^3\,\frac{R}{\psi}\,\frac{P}{\psi}=0$, et ne peut plus être satisfaite avec la supposition admise.

On arriverait encore à la même conclusion, sans avoir égard à ce second groupe d'équations (19), en remarquant, à l'aide d'un raisonnement et d'un calcul exactement semblables à ceux qui nous ont conduits au résultat pour le Cas I° d'abord, puis pour le Cas II°, qu'étant données les hypothèses (39), les deux familles φ et ϖ sont encore des plans, et ne peuvent être composées l'une et l'autre de plans parallèles, car la troisième le serait alors aussi forcément.

Elles seront donc encore susceptibles d'être représentées par les mêmes équations (25) et (27); d'où l'on conclurait de nouveau, par les mêmes considérations, que les ψ ne pourraient être que des cylindres, c'est-à-dire des surfaces ayant l'une de leurs courbures principales constamment nulle; et par conséquent il faudrait que l'une au moins des deux dérivées $\frac{R}{\psi}$ ou $\frac{P}{\psi}$ fût aussi

nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ce second cas subsidiaire, de même que le premier, ne pourra donc encore fournir aucune solution du problème.

3° « *Les deux dérivées qui ne sont pas nulles sont réciproques* », et sont, par exemple, $\frac{P}{\psi}$ et $\frac{P}{\varpi}$. On a alors, outre les conditions générales (8), les hypothèses

$$(40) \qquad \frac{Q}{\varpi}=0, \qquad \frac{Q}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\psi}=0,$$

lesquelles vérifient bien encore le premier groupe (13), pour une raison complètement analogue à celle énoncée tout à l'heure, aucun des termes de ces équations ne contenant en facteur deux dérivées relatives à la même fonction P, Q, R. Quant au groupe du second ordre (19), elles vérifient bien encore les deux dernières, et réduisent la première simplement à

$$2PQR\left(Q\frac{P^2}{\psi^2}+R\frac{P^2}{\varpi^2}\right)=2QR\left[Q\left(\frac{P}{\psi}\right)^2+R\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right]$$

ou, ce qui est la même chose, P, Q, R ne pouvant être nuls, comme nous l'avons déjà remarqué, à celle-ci :

$$Q\left[P\frac{P^2}{\psi^2}-\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right]+R\left[P\frac{P^2}{\varpi^2}-\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right]=0,$$

équation qui peut être écrite encore, en divisant par P^2, et remarquant que les hypothèses (8) et (40) correspondent d'ailleurs pour Q et R aux valeurs constantes $Q = C'^2$, et $R = C''^2$, sous l'une ou l'autre des deux formes

$$Q\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{d\psi}\right)+R\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{d\varpi}\right)=0, \quad \text{ou} \quad C'^2\frac{d^2.lP}{d\psi^2}+C''^2\frac{d^2.lP}{d\varpi^2}=0,$$

ou encore, en faisant

$$(41) \qquad \frac{C'}{C''}=c, \qquad \text{ou} \qquad C''^2=\frac{C'^2}{c^2},$$

puis divisant par C''^2 l'équation précédente, et la séparant en deux membres,

$$(41^{bis}) \qquad \frac{d^2.lP}{d\varpi^2} = -c^2 \frac{d^2.lP}{d\psi^2},$$

équation du type classique des Cordes Vibrantes, déjà rencontré dans le Chapitre II, et qui nous fournira, comme alors, pour solution la plus générale, l'expression

$$(42) \qquad lP = \mathcal{F}_1(\psi + ic\varpi) + \mathcal{F}_2(\psi - ic\varpi),$$

laquelle devra toujours être réelle, du moment que nous avons reconnu antérieurement que les inconnues P, Q, R étaient toutes trois essentiellement positives. Or, cette condition ne pourra être réalisée, de la façon la plus générale, qu'en supposant que les deux fonctions arbitraires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne diffèrent que par une constante additive réelle de deux fonctions de même forme, à coefficients imaginaires respectivement conjugués, c'est-à-dire puissent être représentées par

$$(43) \qquad \mathcal{F}_1(z) = \Phi(z) + i\Psi(z), \qquad \mathcal{F}_2(z) = K + \Phi(z) - i\Psi(z),$$

tous les coefficients des deux fonctions Φ et Ψ étant alors réels ainsi que la constante K (*) : condition qui équivaudrait par con-

(*) On aperçoit de suite, en effet, que cette condition est bien suffisante, car, si l'on remplace dans deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ telles que (43) l'argument z respectivement par les deux quantités imaginaires $x + iy$ et $x - iy$, il est manifeste que, sauf la constante additive K, les deux résultats se déduiront l'un de l'autre en changeant simplement le signe de i, et par conséquent seront eux-mêmes, à cela près, deux expressions imaginaires conjuguées.

Mais le point essentiel, pour la généralité de la solution de la question actuellement posée, est d'être assuré que cette même condition est bien en même temps *nécessaire* pour la réalité d'une expression telle que la valeur de lP (42). Cette proposition, à la vérité, deviendrait, pour ainsi dire, manifeste, si l'on supposait que les quatre fonctions réelles Φ et Ψ, qui entrent dans la composition des deux fonctions en question que l'on pourra toujours représenter par

$$(\alpha) \qquad \mathcal{F}_1(z) = \Phi_1(z) + i\Psi_1(z), \qquad \mathcal{F}_2(z) = \Phi_2(z) - i\Psi_2(z),$$

fussent toutes développables suivant la série de Taylor. Mais la possibilité de l'application de cette formule étant soumise, comme l'on sait, à de nombreuses restrictions, un semblable procédé ne saurait constituer qu'une simple *indication*, propre à mettre sur la voie

séquent, si l'on restreignait le choix des fonctions arbitraires aux seules fonctions à coefficients réels, à prendre pour elles deux

---

de la proposition à démontrer, mais non une démonstration véritable de la dite proposition.

Voici donc comment nous établirions, si le Lecteur nous le demandait, la proposition en question, en même temps qu'une autre toute semblable, qui nous sera également utile un peu plus loin.

Convenant de faire dans les expressions (α), pour l'un et l'autre indice,

$$(\beta) \qquad \Phi(x+iy) = \mathrm{M} + i\mathrm{N}, \qquad \Psi(x+iy) = \mathrm{P} + i\mathrm{Q},$$

les M, N, P, Q étant alors certaines fonctions réelles déterminées en x et y, nous en déduirons tout d'abord, en différentiant par rapport à y,

$$(\gamma) \qquad i\Phi'(x+iy) = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}, \qquad i\Psi'(x+iy) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y},$$

et, si nous convenons ensuite de dénoter par l'indice 0, placé en exposant, les valeurs particulières de ces différentes fonctions ou de leurs dérivées pour $y = 0$, nous obtiendrons, en introduisant cette hypothèse à la fois dans les égalités (β) et (γ),

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi(x) = \mathrm{M}^0 + i\mathrm{N}^0, & \Psi(x) = \mathrm{P}^0 + i\mathrm{Q}^0, \\ i\Phi'(x) = \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right)^0 + i\left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}\right)^0, & i\Psi'(x) = \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)^0 + i\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right)^0; \end{array}\right.$$

or, comme par hypothèse les quatre fonctions Φ et Ψ sont toutes à coefficients réels, il suit de là que l'on aura, pour les indices 1 et 2,

$$(\delta) \quad \left\{\begin{array}{llll} \mathrm{M}^0 = \Phi(x), & \mathrm{N}^0 = 0, & \mathrm{P}^0 = \Psi(x), & \mathrm{Q}^0 = 0, \\ \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right)^0 = 0, & \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}\right)^0 = \Phi'(x), & \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)^0 = 0, & \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right)^0 = \Psi'(x). \end{array}\right.$$

Cela posé, les égalités de définition (α) et (β) donneront pour la première fonction proposée $\mathcal{F}_1$,

$$\mathcal{F}_1(x+iy) = \Phi_1(x+iy) + i\Psi_1(x+iy) = \mathrm{M}_1 + i\mathrm{N}_1 + i(\mathrm{P}_1 + i\mathrm{Q}_1),$$

c'est-à-dire, en ordonnant par rapport à i, pour les deux fonctions $\mathcal{F}$, les expressions

$$(\varepsilon) \qquad \mathcal{F}_1(x+iy) = \mathrm{M}_1 - \mathrm{Q}_1 + i(\mathrm{N}_1 + \mathrm{P}_1), \qquad \mathcal{F}_2(x+iy) = \mathrm{M}_2 - \mathrm{Q}_2 - i(\mathrm{N}_2 + \mathrm{P}_2),$$

la seconde se déduisant évidemment de la première, d'après les définitions précitées et (β), en y changeant l'indice 1 en 2, et i en $-i$; et l'on en déduira dès lors, en ajoutant d'abord, puis en retranchant, et multipliant par i, ces deux autres expressions :

$$(\eta) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F}_1(x+iy) + \mathcal{F}_2(x-iy) = \mathrm{M}_1 - \mathrm{Q}_1 + \mathrm{M}_2 - \mathrm{Q}_2 + i[\mathrm{N}_1 + \mathrm{P}_1 - (\mathrm{N}_2 + \mathrm{P}_2)], \\ i[\mathcal{F}_1(x+iy) - \mathcal{F}_2(x-iy)] = i[\mathrm{M}_1 - \mathrm{Q}_1 - (\mathrm{M}_2 - \mathrm{Q}_2)] - [\mathrm{N}_1 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{N}_2 + \mathrm{P}_2]. \end{array}\right.$$

Suivant donc que l'on exigera des deux fonctions proposées $\mathcal{F}$ la réalité, soit, comme plus haut, de la première seulement de ces dernières expressions, soit, ainsi que nous serons amenés à le faire plus loin, de ces deux expressions (η) considérées à la fois, il

la même fonction F (z), sauf une constante additive, mais cette restriction serait arbitraire, et l'on n'aurait plus ainsi la solution la plus générale de la question.

---

faudra, suivant le cas, que la première seulement, ou l'une et l'autre simultanément des deux égalités

$$(\theta) \qquad N_1 + P_1 - (N_2 + P_2) = 0, \qquad M_1 - Q_1 - (M_2 - Q_2) = 0,$$

soient vérifiées, identiquement, ainsi que toutes leurs dérivées.

Or, si on les récrit, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à y, en rapprochant les termes analogues, ainsi qu'il suit :

$$\begin{cases} N_1 - N_2 = -(P_1 - P_2), & M_1 - M_2 = Q_1 - Q_2, \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} - \dfrac{\partial N_2}{\partial y} = -\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial y} - \dfrac{\partial P_2}{\partial y}\right), & \dfrac{\partial M_1}{\partial y} - \dfrac{\partial M_2}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} - \dfrac{\partial Q_2}{\partial y}, \end{cases}$$

puis que l'on y fasse ensuite $y = 0$, il est clair que ces quatre dernières égalités se réduiront, en tenant compte des valeurs (δ), aux quatre suivantes :

$$(\zeta) \qquad \begin{cases} 0 = -[\Psi_1(x) - \Psi_2(x)], & \Phi_1(x) - \Phi_2(x) = 0, \\ \Phi_1'(x) - \Phi_2'(x) = 0, & 0 = \Psi_1'(x) - \Psi_2'(x), \end{cases}$$

le groupe de gauche, qui provient de la seule équation de gauche (θ), correspondant, d'après ce que nous avons expliqué, à la réalité de la première des deux expressions (η). Or, il est visible que ces deux équations donneront bien alors pour les deux fonctions proposées (α) deux expressions telles que (43), ainsi que nous l'énonçons dans le texte, à propos de la question qu'il s'agissait de résoudre.

L'ensemble des deux groupes (ζ), au contraire, qui se réduit en fait aux deux égalités de la première ligne seulement et qui représentent, d'après ce qui précède, les conditions nécessaires à la réalité simultanée des deux expressions (η), exprime évidemment que les deux mêmes fonctions (α) sont alors deux fonctions de même forme, à coefficients imaginaires respectivement conjugués, fonctions que nous désignerons, pour abréger, par la dénomination de *fonctions imaginaires conjuguées*, attendu qu'elles pourront alors, en vertu de leur définition, être écrites sous la forme

$$\mathcal{F}_1(z) = \Phi(z) + i\Psi(z), \qquad \mathcal{F}_2(z) = \Phi(z) - i\Psi(z),$$

proposition fort importante, que nous aurons également l'occasion d'invoquer un peu plus loin, pour la solution définitive de la question actuelle.

Les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant supposées expressément du type que nous venons d'écrire, et par conséquent les expressions (η) étant réelles toutes les deux, ces expressions pourront alors être présentées sous une forme un peu différente, qu'il importe de rappeler en terminant cette Note, car c'est celle sous laquelle on énonce le plus souvent les résultats que nous rencontrerons pour ce Cas III.

En effet, l'hypothèse que nous venons de dire consistant à faire dans les formules (α) $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ et $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$, et par conséquent, d'après les définitions (β),

$$M_1 = M_2 = M, \qquad N_1 = N_2 = N, \qquad P_1 = P_2 = P, \qquad Q_1 = Q_2 = Q,$$

Les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant ainsi expressément supposées de la forme (43), si l'on convient de faire

$$(44)\qquad \mathcal{F}_1(z) = l\mathrm{F}_1(z),\qquad \mathcal{F}_2(z) - \mathrm{K} = l\mathrm{F}_2(z),\qquad \mathrm{C} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{K}},$$

il est bien clair, eu égard à ces valeurs (43), que les deux fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{F}_1(z) = e^{\mathcal{F}_1(z)} \quad = e^{\Phi(z)+i\Psi(z)} = e^{\Phi(z)}\left[\cos\Psi(z) + i\sin\Psi(z)\right], \\ \mathrm{F}_2(z) = e^{\mathcal{F}_2(z)-\mathrm{K}} = e^{\Phi(z)-i\Psi(z)} = e^{\Phi(z)}\left[\cos\Psi(z) - i\sin\Psi(z)\right] \end{array}\right.$$

seront elles-mêmes deux fonctions imaginaires conjuguées, et les deux dernières des trois équations précédentes (44) donnant alors

$$(45)\qquad \mathrm{K} = 2l\mathrm{C} = l.\mathrm{C}^2,\qquad \mathcal{F}_2(z) = \mathrm{K} + l\mathrm{F}_2(z) = l.\mathrm{C}^2 + l\mathrm{F}_2(z),$$

l'équation intégrale (42), obtenue tout à l'heure, deviendra, en ayant égard à la valeur (44) de la fonction $\mathcal{F}_1$ et (45) de la fonction $\mathcal{F}_2$,

$$l\mathrm{P} = l.\mathrm{C}^2 + l\mathrm{F}_1(\psi + ic\varpi) + l\mathrm{F}_2(\psi - ic\varpi),$$

et par conséquent les expressions les plus générales des inconnues P, Q, R seront, dans le Cas actuel,

$$(46)\qquad \mathrm{P} = \mathrm{C}^2\mathrm{F}_1(\psi + ic\varpi)\,\mathrm{F}_2(\psi - ic\varpi),\qquad \mathrm{Q} = \mathrm{C}'^2,\qquad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{C}'^2}{c^2},$$

F_1 et F_2 étant deux fonctions à coefficients imaginaires, arbitraires sous la condition d'être de même forme et à coefficients respec-

---

on voit qu'en désignant respectivement par A et B les expressions réelles en question (γ), elles se réduiront alors respectivement à

$$\mathrm{A} = 2(\mathrm{M} - \mathrm{Q})\qquad \text{et}\qquad \mathrm{B} = -2(\mathrm{N} + \mathrm{P});$$

et comme l'égalité de gauche précédente (ε) serait devenue en même temps

$$\mathcal{F}_1(x + iy) = \mathrm{M} - \mathrm{Q} + i(\mathrm{N} + \mathrm{P}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} - i\mathrm{B}),$$

il est manifeste que les deux quantités A et B pourront être considérées respectivement (au signe près, quant à la seconde) comme la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le résultat de la substitution de $x + iy$ à la place de z dans la fonction entièrement arbitraire $2\,\mathcal{F}_1(z)$, et la même concordance s'étendrait dès lors au signe de l'expression B lui-même, si l'on prenait pour cette quantité, au lieu de la seconde expression (γ) elle-même, l'expression égale et de signe contraire $\frac{1}{i}\left[\mathcal{F}_1(x + iy) - \mathcal{F}_2(x - iy)\right]$.

tivement conjugués, et C, C′ et c désignant trois constantes arbitraires réelles.

Ce premier résultat acquis, le tableau (12) fait voir alors qu'avec les hypothèses (40) les surfaces φ ont leurs deux courbures principales nulles à la fois, et les surfaces ψ et ϖ ont chacune l'une de ces courbures nulle en tous leurs points. Les surfaces φ sont donc encore des plans, et les familles ψ et ϖ l'une et l'autre des surfaces développables.

Partant de là, le premier des deux Théorèmes de Lamé déjà cités (*) montre que l'intersection de deux surfaces ψ et ϖ quelconques est une droite, puisque les deux courbures $\frac{1}{R'_2}$ et $\frac{1}{R''_1}$, *conjuguées suivant cet arc*, sont nulles toutes les deux, d'après le tableau (12), avec les hypothèses (40). Et dès lors tous les plans de la famille φ, étant perpendiculaires à cette même droite, sont nécessairement parallèles (**).

Si nous prenons en conséquence, comme dans le Cas précédent, l'un des plans de cette famille pour plan des xy, auquel cas elle sera représentée par une équation de la forme

$$(47)\qquad z = a\varphi + b \qquad \text{ou} \qquad \varphi = \mathrm{A}z + \mathrm{B},$$

en faisant $\mathrm{A} = \frac{1}{a}$ et $-\frac{b}{a} = \mathrm{B}$, cette équation entraînera dès lors immédiatement les valeurs

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = \mathrm{A}, \qquad \Delta_1^2\varphi = \mathrm{A}^2 = \frac{1}{a^2},$$

qui, étant reportées, en même temps que celles (46) de Q et R,

(*) Coord. Curv., § XXXVIII, p. 65, ou encore notre *Mémoire sur l'Emploi des Coord. Curv.*, pp. 27 et 28.

(**) On arriverait encore à la même conclusion en remarquant qu'en vertu des résultats établis dans notre Chapitre II, si les plans qui composeront cette famille φ supposée isotherme ne sont pas tous parallèles, cette famille pourra être représentée de nouveau, comme lors du Cas précédent II°, par l'équation (25), qui entraînera encore comme conséquence nécessaire la première équation (32), ou, ce qui est la même chose, la valeur

$$\Delta_1^2\varphi = \frac{1}{\alpha^2(x^2 + y^2)},$$

expression manifestement irréductible avec une simple constante, qu'il faudrait trouver pour pouvoir satisfaire, avec les valeurs (46), à la première équation de gauche (21).

dans la première de gauche et les deux dernières de droite (21), réduiront en conséquence, pour le Cas actuel, ces trois équations aux suivantes :

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{C'^2\frac{C'^2}{c^2}} \quad \text{ou} \quad a=\frac{C'^2}{c}, \quad \text{avec} \quad \frac{d\varpi}{dz}=0 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{dz}=0,$$

dont la première exigeant à l'avance, ainsi que nous le disons dans la note précédente, que la famille φ soit composée de plans parallèles, les deux autres expriment à leur tour que les familles ψ et ϖ sont toutesd eux composées de cylindres parallèles à l'axe des z, et par conséquent normaux à la première famille φ.

La solution la plus générale du problème se compose donc pour ce sous-cas 3°, le seul auquel corresponde une solution, et par conséquent pour la totalité de ce Cas III°, d'une famille de plans parallèles, et de deux familles de cylindres orthogonaux entre eux et normaux à ces plans. C'est donc le système des *Coordonnées Cylindriques en général,* dont nous faisons usage sous le numéro III° (p. 131) dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes,* mais avec la restriction cette fois que les deux familles de cylindres soient toutes deux isothermes.

Parmi les six équations du système (21) qui, une fois les expressions (46) obtenues, restait désormais seul à intégrer, la moitié, à savoir les trois que nous venons de dire, définissant ainsi déjà le genre ou la nature géométrique des surfaces qui composent le système, le rôle des trois autres équations du même groupe, c'est-à-dire la première de droite et les deux dernières de gauche, consistera donc simplement à préciser rigoureusement la définition des deux familles de cylindres qui restent actuellement seules à délimiter, ou, ce qui est la même chose, à fixer exactement, par la détermination des inconnues ψ et ϖ en x et y, les équations de leurs sections droites par un plan quelconque de la famille φ.

Or, les deux dernières de ces équations étant ainsi

$$(48) \qquad \Delta_1^2\psi=\frac{1}{RP}, \qquad \Delta_1^2\varpi=\frac{1}{PQ} \qquad \text{ou} \qquad R\Delta_1^2\psi=Q\Delta_1^2\varpi=\frac{1}{P}.$$

on voit alors en divisant par R, puis ayant égard aux valeurs ci-dessus trouvées (46), et joignant enfin à la première de droite (21), que nos deux fonctions inconnues ψ et ϖ devront vérifier à elles seules le système surabondant formé des trois équations

$$(49)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\psi}{dy}\right)^2 = c^2\left[\left(\dfrac{d\varpi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\varpi}{dy}\right)^2\right] = \dfrac{1}{\dfrac{C^2C'^2}{c^2}F_1(\psi + ic\varpi)\,F_2(\psi - ic\varpi)}, \\ \dfrac{d\psi}{dx}\dfrac{d\varpi}{dx} + \dfrac{d\psi}{dy}\dfrac{d\varpi}{dy} = 0, \end{cases}$$

dont l'intégration générale déterminera limitativement les familles de cylindres qui satisfont pour ce Cas à la question.

Si l'on veut procéder à cette détermination, le fait que la première et la dernière de ces trois équations ne contiennent pas les fonctions inconnues elles-mêmes, mais seulement leurs dérivées du premier ordre, montre *a priori* qu'il sera sans doute possible, en différentiant en x et y chacune de ces deux équations, de former, par l'élimination des cinq dérivées (premières et secondes) de l'une de ces inconnues entre les six équations dont on aura alors la disposition, une équation du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées secondes, à laquelle devra satisfaire isolément l'autre inconnue (*). Et si l'on peut ensuite intégrer

---

(*) Si l'on veut obtenir d'une façon simple les résultats du calcul que nous venons de dire, le procédé le plus facile consistera à éliminer uniquement les deux dérivées rectangles $\frac{\psi^2}{xy}$ et $\frac{\varpi^2}{xy}$ entre les quatre équations, linéaires par rapport aux dérivées secondes, fournies par la différentiation des deux équations (49) précitées, en ayant égard en même temps à ces équations elles-mêmes. Le résultat de cette élimination ainsi restreinte, qui reste encore néanmoins sensiblement moins aisée que celle que nous allons effectuer dans le texte, sera les deux équations, écrites avec notre notation habituelle pour les dérivées partielles,

$$\left[\left(\frac{\psi}{x}\right)^2 + c^2\left(\frac{\varpi}{x}\right)^2\right]\left(\frac{\varpi}{x}\Psi + \frac{\psi}{x}\Pi\right) = 0,\quad \left[\left(\frac{\psi}{y}\right)^2 + c^2\left(\frac{\varpi}{y}\right)^2\right]\left(\frac{\varpi}{y}\Psi + \frac{\psi}{y}\Pi\right) = 0,$$

dans lesquelles Ψ et Π désignent, pour abréger, les deux quantités

$$\Psi = \frac{\psi^2}{x^2} + \frac{\psi^2}{y^2},\qquad \Pi = \frac{\varpi^2}{x^2} + \frac{\varpi^2}{y^2}.$$

séparément chacune des deux équations du second ordre ainsi obtenues, équations plus larges par conséquent que celles dont on sera parti, il faudra qu'après avoir restreint leurs solutions de manière qu'elles vérifient effectivement ces deux équations (49) elles-mêmes, l'on puisse encore, avec les solutions ainsi restreintes, satisfaire à la seconde équation restante du même groupe (49). Telle est donc à grands traits la marche que nous allons suivre.

Toutefois le calcul d'élimination que nous venons de dire étant notablement plus aisé si dans le système proposé (49) l'on intervertit, comme pour le Cas général, les fonctions inconnues et les variables indépendantes, c'est au problème, ainsi transformé, que nous allons appliquer de point en point la méthode que nous venons d'indiquer, et nous achèverons de cette façon la solution, même pour ce Cas particulier, sans sortir un seul instant de la voie indiquée par Lamé pour le Cas le plus général du problème, et que nous avons rapportée au début de ce Chapitre.

A cet effet, en appliquant tout d'abord au système actuel de surfaces les formules très connues (16) et (17) de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes*, etc. (paragr. I, p. 18), déjà rappelées dans les deux premiers Chapitres de celui-ci, lesquelles donneront dans le cas présent, pour les premières, relativement à la coordonnée z en particulier,

$$(50) \qquad \frac{dz}{d\psi}\Delta_1\psi = \frac{d\psi}{dz} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{d\varpi}\Delta_1\varpi = \frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

Cela posé, si l'on fait attention que ψ et ϖ étant, en tant que coordonnées, essentiellement indépendantes l'une de l'autre, le déterminant fonctionnel $\Delta = \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{y} - \frac{\varpi}{x}\frac{\psi}{y}$ ne peut être identiquement nul, il s'ensuivra nécessairement : 1° que les deux équations ainsi obtenues ne pourront être vérifiées en égalant à zéro l'un ou l'autre de leurs premiers facteurs, ce qui équivaudrait à faire $\Delta = 0$; 2° que les deux équations linéaires et homogènes en Ψ et Π, constituées par les seconds facteurs auxquels elles se réduisent alors, ne pourront être vérifiées que par les seules valeurs $\Psi = 0$ et $\Pi = 0$, égalités qui représentent dès lors le résultat de l'élimination demandée. En joignant donc ces deux dernières équations à la troisième (49), on se trouve en présence du système du second ordre (74) ci-après, que nous obtenons immédiatement un peu plus loin à l'aide de considérations géométriques évidentes, et dont nous calculons d'ailleurs par une intégration directe la solution la plus générale.

et pour les secondes, par voie de conséquence,

$$K = \Delta_1^{-2}\psi = \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2, \qquad J = \Delta_1^{-2}\varpi = \left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2,$$

on voit que les deux premières équations en question (49) pourront aussi bien être écrites

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2} = \frac{c^2}{\left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2} = \frac{1}{\frac{C^2C'^2}{c^2} F_1(\psi + ic\varpi) F_2(\psi - ic\varpi)},$$

ou, en renversant les rapports et multipliant alors par c^2, puis joignant enfin à la première de droite des formules précitées (17) du susdit Mémoire, dans laquelle nous aurons introduit également les hypothèses (50), nous aurons ainsi définitivement, au lieu et place du système précédent (49), le suivant :

$$(51) \quad \begin{cases} c^2\left[\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2\right] = \left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2 = C^2C'^2 F_1(\psi + ic\varpi) F_2(\psi - ic\varpi), \\ \frac{dx}{d\psi}\frac{dx}{d\varpi} + \frac{dy}{d\psi}\frac{dy}{d\varpi} = 0. \end{cases}$$

Cela fait, différentiant d'abord la première de ces équations en ψ et la dernière en ϖ, et écrivant, pour plus de facilité, les résultats à l'aide de notre notation habituelle relative aux dérivées partielles, nous formerons en premier lieu les deux équations

$$(52) \quad \begin{cases} c^2\left(\frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\psi^2} + \frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\psi^2}\right) - \left(\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\varpi\psi} + \frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\varpi\psi}\right) = 0, \\ \frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\varpi^2} + \frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\varpi^2} + \frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\psi\varpi} + \frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\psi\varpi} = 0; \end{cases}$$

puis, différentiant semblablement la première en ϖ et la dernière en ψ, nous formerons en second lieu ces deux autres, analogues

aux précédentes :

$$(53)\quad \begin{cases} c^2\left(\frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\psi\varpi}+\frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\psi\varpi}\right)-\left(\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\varpi^2}+\frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\varpi^2}\right)=0,\\ \frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\varpi\psi}+\frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\varpi\psi}+\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\psi^2}+\frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\psi^2}=0, \end{cases}$$

et alors, si nous ajoutons membre à membre, d'une part les deux équations (52) telles qu'elles sont, et d'autre part les deux équations (53), après avoir multiplié toutefois la seconde par $-c^2$, et que nous fassions pour abréger

$$(54)\qquad X=c^2\frac{x^2}{\psi^2}+\frac{x^2}{\varpi^2},\qquad Y=c^2\frac{y^2}{\psi^2}+\frac{y^2}{\varpi^2},$$

on voit que nous aurons formé, entre ces deux quantités X et Y ainsi définies, le système linéaire et homogène

$$\frac{x}{\psi}X+\frac{y}{\psi}Y=0,\qquad \frac{x}{\varpi}X+\frac{y}{\varpi}Y=0,$$

dont le déterminant, qui n'est autre que le déterminant fonctionnel

$$(55)\qquad \Delta=\frac{x}{\psi}\frac{y}{\varpi}-\frac{y}{\psi}\frac{x}{\varpi},$$

ne saurait évidemment être identiquement nul, du moment que les deux variables, x et y d'une part, ou ψ et ϖ de l'autre, sont, en tant que coordonnées, essentiellement indépendantes l'une de l'autre (*); système qui ne pourra dès lors être vérifié que par les seules valeurs $X=0$ et $Y=0$, ou, ce qui est la même chose, eu égard aux définitions (54), en astreignant *a priori* les deux

(*) On arriverait d'ailleurs, dans le cas particulier, très aisément à la même conclusion sans invoquer les propriétés générales des déterminants fonctionnels, et par la seule considération des conditions de la question, en remarquant que l'identité

$$\left(\frac{x}{\psi}\frac{y}{\varpi}-\frac{y}{\psi}\frac{x}{\varpi}\right)^2=\left[\left(\frac{x}{\psi}\right)^2+\left(\frac{y}{\psi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{x}{\varpi}\right)^2+\left(\frac{y}{\varpi}\right)^2\right]-\left(\frac{x}{\psi}\frac{x}{\varpi}+\frac{y}{\psi}\frac{y}{\varpi}\right)^2,$$

inconnues x et y à satisfaire individuellement aux deux équations

$$c^2\frac{x^2}{\psi^2}+\frac{x^2}{\varpi^2}=0, \qquad c^2\frac{y^2}{\psi^2}+\frac{y^2}{\varpi^2}=0,$$

ou

$$\frac{d^2x}{d\varpi^2}=-c^2\frac{d^2x}{d\psi^2}, \qquad \frac{d^2y}{d\varpi^2}=-c^2\frac{d^2y}{d\psi^2},$$

lesquelles leur assignent par conséquent à chacune, d'après le type classique des Cordes Vibrantes, une expression de la forme

(56) $$x=f_1(\mathrm{U})+f_2(\mathrm{V}), \qquad y=\mathcal{F}_1(\mathrm{U})+\mathcal{F}_2(\mathrm{V}),$$

en convenant de faire, pour abréger,

(57) $$\mathrm{U}=\psi+ic\varpi, \qquad \mathrm{V}=\psi-ic\varpi,$$

ainsi que nous a déjà donné l'équation (41bis) précédente, les symboles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne représentant pas, bien entendu, par hypothèse, dans la seconde de ces expressions (56), les mêmes fonctions que dans l'intégrale générale (42) de l'équation que nous venons de rappeler.

Connaissant ainsi la forme nécessaire des fonctions inconnues x et y, il ne nous reste plus maintenant qu'à disposer des quatre fonctions arbitraires f et $\mathcal{F}$ qui figurent dans ces expressions, de manière à vérifier les trois équations du premier ordre proposées (51) elles-mêmes.

---

se réduit dans le cas actuel, eu égard à la définition (53) de Δ et à la dernière équation (51), à la suivante :

$$\Delta^2=\left[\left(\frac{x}{\psi}\right)^2+\left(\frac{y}{\psi}\right)^2\right]\left[\left(\frac{x}{\varpi}\right)^2+\left(\frac{y}{\varpi}\right)^2\right],$$

dans laquelle aucun des deux facteurs du second membre ne peut être supposé nul; car il faudrait pour cela, ou bien que x et y se réduisissent à la fois à des constantes, ou bien qu'ils ne fussent fonctions que de l'une seulement des deux coordonnées ψ ou ϖ, auquel cas il existerait alors entre ces deux variables x et y une relation $\mathrm{F}(x, y)=0$, à laquelle on arriverait par l'élimination de la dite coordonnée curviligne : hypothèses également inadmissibles, du moment que ces variables x et y représentent par hypothèse dans la question un système de coordonnées.

Pour cela, déduisant des expressions (56) et (57) par la différentiation

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{d\psi} &= f'_1(\mathrm{U}) + f'_2(\mathrm{V}), & \frac{dy}{d\psi} &= \mathcal{F}'_1(\mathrm{U}) + \mathcal{F}'_2(\mathrm{V}), \\ \frac{dx}{d\varpi} &= ic\left[f'_1(\mathrm{U}) - f'_2(\mathrm{V})\right], & \frac{dy}{d\varpi} &= ic\left[\mathcal{F}'_1(\mathrm{U}) - \mathcal{F}'_2(\mathrm{V})\right], \end{aligned}\right.$$

la substitution de ces valeurs dans la première et la dernière des équations proposées (51) donnera d'abord respectivement les deux conditions

$$\left\{\begin{aligned} & c^2\left[(f'_1 + f'_2)^2 + (\mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_2)^2\right] = -c^2\left[(f'_1 - f'_2)^2 + (\mathcal{F}'_1 - \mathcal{F}'_2)^2\right], \\ & ic\left[(f'_1 + f'_2)(f'_1 - f'_2) + (\mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_2)(\mathcal{F}'_1 - \mathcal{F}'_2)\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

(étant entendu, pour abréger, que la variable est U pour les fonctions affectées de l'indice 1, et V pour celles affectées de l'indice 2), c'est-à-dire, en réduisant ou développant, et supprimant ensuite les facteurs communs constants $2c^2$ ou ic, ces deux autres

$$f'^2_1 + f'^2_2 + \mathcal{F}'^2_1 + \mathcal{F}'^2_2 = 0, \qquad f'^2_1 - f'^2_2 + \mathcal{F}'^2_1 - \mathcal{F}'^2_2 = 0,$$

lesquelles, donnant immédiatement par addition et soustraction

$$f'^2_1 + \mathcal{F}'^2_1 = 0, \qquad f'^2_2 + \mathcal{F}'^2_2 = 0,$$

se réduisent en fait par conséquent aux deux suivantes, dans lesquelles nous supposons que le coefficient i emporte avec lui son signe (arbitraire d'ailleurs), c'est-à-dire où nous faisons $i = \pm\sqrt{-1}$,

$$(59)\qquad \mathcal{F}'_1(\mathrm{U}) = if'_1(\mathrm{U}), \qquad \mathcal{F}'_2(\mathrm{V}) = \pm\, if'_2(\mathrm{V}),$$

et ne seront dès lors satisfaites qu'en prenant dans les expressions (56)

$$(60)\qquad \mathcal{F}_1(\mathrm{U}) = if_1(\mathrm{U}) + c', \qquad \mathcal{F}_2(\mathrm{V}) = \pm\, if_2(\mathrm{V}) + c''.$$

Or il est facile de voir, relativement au double signe qui figure

en évidence dans la seconde de ces expressions (59) ou (60), que le signe — seul est admissible, car, en se reportant aux expressions (58) des dérivées de x et y, d'une part, celles de x exigeront d'abord pour la réalité que f_1 et f_2 soient deux fonctions de même forme à coefficients imaginaires respectivement conjugués (voir la note de la page 153, *in fine*); et d'autre part, cela étant admis, celles de y devenant par la substitution des valeurs (59)

$$(61) \qquad \frac{dy}{d\psi} = i\,[f'_1(\mathrm{U}) \pm f'_2(\mathrm{V})], \qquad \frac{dy}{d\varpi} = -c\,[f'_1(\mathrm{U}) \mp f'_2(\mathrm{V})],$$

l'on voit que le signe supérieur ne fournirait une expression réelle ni pour l'une, ni pour l'autre de ces dérivées, tandis que l'autre signe au contraire les rend bien réelles, comme cela doit être, toutes les deux à la fois.

Enfin, si l'on tient compte de cette restriction relative au double signe, les formules de gauche (58) et les précédentes (61) donnant alors

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2 &= [f'_1(\mathrm{U}) + f'_2(\mathrm{V})]^2 - [f'_1(\mathrm{U}) - f'_2(\mathrm{V})]^2 = 4f'_1(\mathrm{U})\,f'_2(\mathrm{V}), \\ \left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2 &= -c^2[f'_1(\mathrm{U}) - f'_2(\mathrm{V})]^2 + c^2[f'_1(\mathrm{U}) + f'_2(\mathrm{V})]^2 = c^2.4f'_1(\mathrm{U})f'_2(\mathrm{V}), \end{aligned}\right.$$

on voit que la seconde équation (51), c'est-à-dire celle obtenue en égalant dans la première ligne l'un quelconque des deux premiers membres au troisième, qui nous reste seule désormais à satisfaire, se réduira simplement, eu égard aux définitions (57), à la condition

$$(62) \qquad 4c^2 f'_1(\mathrm{U})\,f'_2(\mathrm{V}) = \mathrm{C}^2\mathrm{C}'^2\mathrm{F}_1(\mathrm{U})\,\mathrm{F}_2(\mathrm{V}),$$

et sera par conséquent elle aussi vérifiée, en établissant seulement, entre les constantes et les fonctions arbitraires introduites par ces différents calculs, la corrélation

$$(63) \qquad 2cf'_1 = \mathrm{CC}'\mathrm{F}_1 \qquad \text{et} \qquad 2cf'_2 = \mathrm{CC}'\mathrm{F}_2,$$

qui déterminera à volonté, ou bien les fonctions f_1 et f_2 si l'on s'est donné F_1 et F_2, c'est-à-dire les expressions de x et y si l'on se donne celle (46) de P, ou inversement les fonctions F_1 et F_2 si l'on s'est donné f_1 et f_2, c'est-à-dire alors l'expression de la fonction P, en se donnant arbitrairement par le moyen des formules (56) et (60) celles des inconnues x et y (*).

Introduisant donc ces expressions (60), prises avec le signe — exclusivement, dans les précédentes (56), celles-ci s'offriront à la vérité de prime abord sous la forme

$$(64)\qquad x = f_1(\mathrm{U}) + f_2(\mathrm{V}), \qquad y = i\left[f_1(\mathrm{U}) - f_2(\mathrm{V})\right] + c' + c'',$$

(*) Si l'on se souvient, d'une part, que pour ce Cas particulier il résulte immédiatement des hypothèses (8) et (40), ainsi que nous l'avons expliqué, que Q et R sont alors deux constantes données C'^2 et C''^2, et z la fonction linéaire (47) de φ, et si l'on fait attention, d'autre part, qu'eu égard à la façon même dont il a été introduit, le troisième membre de la première ligne d'équations (51) a pour valeur C'^2P, l'on voit que cette seconde manière de poser la question, à laquelle nous faisons allusion ci-dessus, équivaut à déterminer *simultanément* en φ et ψ les trois fonctions inconnues restantes, savoir P, x et y, à l'aide du système surabondant formé des quatre équations seules également restantes,

$$\left\{\begin{aligned} &c^2\left[\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2\right] = \left(\frac{dx}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2 = C'^2P,\\ &\frac{dx}{d\psi}\frac{dx}{d\varpi} + \frac{dy}{d\psi}\frac{dy}{d\varpi} = 0, \qquad c^2\frac{d^2.\,lP}{d\psi^2} + \frac{d^2.\,lP}{d\varpi^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

dont la dernière n'est autre que l'équation (44bis) primitivement envisagée. Or, dans ce système les deux équations de gauche déterminant à elles seules les deux inconnues x et y, et leur assignant, comme nous venons de le voir, les expressions (64) ci-après, la seconde de ces mêmes équations fournira dès lors immédiatement, pour la troisième inconnue P, la valeur

$$\begin{aligned} P = \frac{c^2}{C'^2}\left[\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2\right] &= \frac{c^2}{C'^2}\left[(f'_1 + f'_2)^2 - (f'_1 - f'_2)^2\right]\\ &= \frac{4c^2}{C'^2}f'_1(\psi + ic\varpi)\,f'_2(\psi - ic\varpi),\end{aligned}$$

laquelle satisfait bien, ainsi qu'on le reconnaît de suite, à la quatrième équation du même groupe, les deux fonctions f_1 et f_2 restant toujours arbitraires.

Nous aurons occasion de faire utilement emploi de ce second mode de poser la question, lors d'un Cas ultérieur entièrement analogue à celui-ci.

mais pourront aussi bien être présentées sous cette autre forme, à la fois plus simple et plus symétrique,

$$(65)\qquad x=\frac{1}{2}[f_1(U)+f_2(V)],\qquad y=\frac{i}{2}[f_1(U)-f_2(V)],$$

si l'on commence par récrire *identiquement* les deux expressions (64) ainsi qu'il suit :

$$\begin{cases} x=\left(f_1(U)-\frac{i(c'+c'')}{2}\right)+\left(f_2(V)+\frac{i(c'+c'')}{2}\right) \\ y=i\left[\left(f_1(U)-\frac{i(c'+c'')}{2}\right)-\left(f_2(V)+\frac{i(c'+c'')}{2}\right)\right], \end{cases}$$

et que l'on y substitue ensuite, comme simple notation, les symboles $\frac{1}{2}f_1$ (U) et $\frac{1}{2}f_2$ (V) pour représenter respectivement les deux fonctions de U et de V, mises en évidence par de grandes parenthèses dans les deux égalités que nous venons d'écrire, ce qui changera simplement les deux conditions trouvées tout à l'heure (63) dans les deux analogues

$$(66)\qquad cf'_1=CC'F_1,\qquad cf'_2=CC'F_2.$$

En remettant donc dans les expressions plus concises bien que tout aussi générales (65), à la place de U et V leurs valeurs (57), et y joignant l'équation de gauche (47), la solution définitive du problème sera représentée pour ce Cas par les trois expressions

$$(67)\qquad \begin{cases} x=\frac{1}{2}[f_1(\psi+ic\varpi)+f_2(\psi-ic\varpi)], \\ y=\frac{i}{2}[f_1(\psi+ic\varpi)-f_2(\psi-ic\varpi)], \\ z=a\varphi+b, \end{cases}$$

et comprendra dès lors, outre les trois constantes arbitraires réelles a, b, c, deux fonctions imaginaires conjuguées f_1 et f_2, c'est-à-dire telles que

$$(68)\qquad f_1(t)=\Psi(t)+i\Pi(t),\qquad f_2(t)=\Psi(t)-i\Pi(t),$$

et dans la composition desquelles il entrera par conséquent deux fonctions à coefficients réels, Ψ et Π, entièrement arbitraires.

Si l'on veut revenir à présent à la question, envisagée sous la forme même où nous l'avions primitivement posée, c'est-à-dire si l'on demande de connaître inversement les expressions des coordonnées φ, ψ, ϖ en fonction des coordonnées x, y, z, faisant alors, par analogie avec les définitions (57),

$$(69) \qquad u = x - iy, \qquad v = x + iy,$$

puis ajoutant à deux reprises les deux équations (65), après avoir multiplié successivement la seconde par $-i$ et $+i$, il est clair que nous formerons ainsi ces deux autres

$$(70) \qquad u = f_1(\mathrm{U}), \qquad v = f_2(\mathrm{V}),$$

lesquelles deviendront, étant résolues par rapport à U et V,

$$(71) \qquad \mathrm{U} = \mathcal{F}_1(u), \qquad \mathrm{V} = \mathcal{F}_2(v),$$

les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, qui ne sont pas, bien entendu, par hypothèse les mêmes que celles qui figuraient antérieurement soit dans l'équation (42), soit dans la seconde équation (56), étant encore, de même que f_1 et f_2, deux fonctions imaginaires conjuguées, c'est-à-dire du type (68), ainsi qu'il est évidemment nécessaire pour que les seconds membres de ces dernières égalités soient bien, de même que les premiers, deux expressions imaginaires respectivement conjuguées. Or ces mêmes égalités donnant par addition et soustraction, en se reportant aux définitions (57) de U et V,

$$(72) \qquad \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2ic}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right],$$

en remettant à présent, à la place de u et v leurs valeurs (69), et joignant à ces deux dernières égalités l'équation de droite (47),

l'on voit alors que les expressions les plus générales des trois coordonnées φ, ψ, ϖ en fonction des coordonnées rectilignes, ou, ce qui revient au même, les équations des trois familles de surfaces composant le système, seront pour la question actuelle

$$(73)\quad \begin{cases} \varphi = Az + B, \\ \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(x - iy) + \mathcal{F}_2(x + iy)\right], \\ \varpi = \frac{1}{2ic}\left[\mathcal{F}_1(x - iy) - \mathcal{F}_2(x + iy)\right]; \end{cases}$$

et il est bien clair que les deux dernières de ces expressions, ou, ce qui est la même chose, les précédentes (72), seront précisément les expressions les plus générales des inconnues ψ et ϖ qui vérifient le système du premier ordre (49) primitivement posé, pourvu que les nouvelles fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ satisfassent encore aux mêmes conditions ci-dessus (66), dans lesquelles f_1 et f_2 représenteront alors par définition les fonctions inverses de ces fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, ainsi que l'indiquent les équations réciproques (70) et (71).

Or si l'on fait attention, d'une part, qu'en passant du système (49) au système (51) par l'interversion des inconnues et des variables indépendantes, chaque membre de cette seconde forme d'équations (51) provient exclusivement du membre correspondant de la première forme (49), et si l'on se rappelle, d'autre part, que la forme de la solution (64) ou (65) du second système a été imposée dans le calcul qui précède, uniquement par la première et la dernière de ces équations (51), celle du milieu n'intervenant que pour imposer la condition (62) qui peut servir alors, comme nous l'avons dit, à une double fin; il est bien évident, dès lors, qu'en revenant au premier système (49), on devra considérer que la forme de sa solution la plus générale (72) est fixée de même exclusivement par la première et la dernière de ces équations (49), la seconde n'intervenant encore que pour procurer la même condition réversible (62) entre les quatre fonctions

arbitraires F et $\mathcal{F}$ (*), introduites jusque-là tant par un calcul antérieur que par cette solution elle-même, condition qui fournira indifféremment, comme tout à l'heure, soit les expressions définitives des inconnues ψ et ϖ lorsque l'on se sera donné l'expression (46) de P, soit au contraire celle de P, en se donnant arbitrairement les expressions (72) de ψ et ϖ. Cette simple remarque nous sera du plus grand secours, comme on le verra, pour la solution d'un problème entièrement analogue que nous offrira bientôt l'un des Cas ultérieurs.

Si nous n'avions pas tenu à rester sur le terrain exclusivement analytique et à demeurer fidèle à notre programme strict, consistant à résoudre pour chaque Cas le problème à l'aide des méthodes mêmes indiquées par Lamé, nous eussions pu parvenir plus aisément peut-être, ou tout au moins plus rapidement, aux mêmes résultats, en nous basant sur une interprétation géométrique du système du premier ordre (49), qui s'offre immédiatement à l'esprit lorsqu'on examine la raison d'être ou la signification de ce système, à dater du moment où la question s'y est trouvée réduite. Et comme ce second mode de résoudre le problème nous servira également pour le Cas subséquent déjà annoncé tout à l'heure, il ne sera pas inutile de nous assurer rapidement, à l'occasion de celui-ci, qu'il nous conduirait bien exactement à la même solution que nous venons de trouver en suivant de point à point la méthode générale indiquée par Lamé.

En effet, parmi les six équations (21) qui définissent, pour les Cas particuliers envisagés dans ce Chapitre, le problème analytique du système orthogonal triplement isotherme, les trois équations auxquelles nous avions alors déjà satisfait, savoir la première de gauche et les deux dernières de droite, expriment simplement, ainsi que nous l'avons vu, que le système cherché

(*) Ou, en termes plus exacts, la même condition (62) de laquelle on aurait fait disparaître le coefficient 4 du premier membre, en raison du changement de notation dont nous sommes convenus pour passer de la forme d'expressions (64) à la forme définitive (65), réciproque de la forme actuellement en question (72).

se compose dans le Cas actuel de deux familles de cylindres parallèles, et d'une famille de plans normaux à ces cylindres. Il est donc évident que l'ensemble des trois autres équations du même groupe qui nous restent encore à vérifier, ou, ce qui est la même chose, des trois équations (49), ne saurait exprimer analytiquement autre chose que cette triple condition, à savoir que les deux familles de cylindres sont chacune isotherme et, de plus, orthogonales entre elles ; car, la nature de chaque famille de surfaces étant supposée expressément celle que nous venons de dire, c'est bien là évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse constituer avec les dites familles un système orthogonal triplement isotherme. Or, posée dans les termes que nous venons de dire, la question se réduit, au contraire, à un problème analytique très simple, et conduit alors sans peine à un résultat dont l'une des formes est très connue.

En effet, les équations du problème géométrique ainsi défini n'étant autres que celles du système primitif (1), réduit à deux fonctions inconnues et deux variables indépendantes seulement, savoir :

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}=0, \qquad \frac{d^2\varpi}{dx^2}+\frac{d^2\varpi}{dy^2}=0,\\ &\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varpi}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{d\varpi}{dy}=0,\end{aligned}\right.$$

les intégrales générales des deux premières de ces équations, considérées isolément, seront encore, ainsi que nous l'avons déjà dit dans notre Chapitre II (page 41), d'après le type classique des Cordes Vibrantes,

$$\psi=\psi_1(x-iy)+\psi_2(x+iy), \qquad \varpi=\varpi_1(x-iy)+\varpi_2(x+iy),$$

ou, plus simplement, en introduisant de nouveau nos quantités u et v (69),

$$(75)\qquad \psi=\psi_1(u)+\psi_2(v), \qquad \varpi=\varpi_1(u)+\varpi_2(v),$$

et donneront dès lors, par la différentiation,

$$(76)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{dx} = \psi_1' + \psi_2', & \dfrac{d\psi}{dy} = i(-\psi_1' + \psi_2'), & \dfrac{d\psi}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\varpi}{dx} = \varpi_1' + \varpi_2', & \dfrac{d\varpi}{dy} = i(-\varpi_1' + \varpi_2'), & \dfrac{d\varpi}{dz} = 0, \end{cases}$$

la variable étant cette fois u pour les fonctions affectées de l'indice 1, et v pour celles affectées de l'indice 2. En substituant ces dernières valeurs dans la troisième équation (74), celle-ci deviendra donc

$$(\psi_1' + \psi_2')(\varpi_1' + \varpi_2') - (\psi_1' - \psi_2')(\varpi_1' - \varpi_2') = 0,$$

ou simplement, en réduisant,

$$2(\varpi_1'\psi_2' + \psi_1'\varpi_2') = 0,$$

ou par conséquent, en séparant les variables,

$$\frac{\psi_1'(u)}{\varpi_1'(u)} = -\frac{\psi_2'(v)}{\varpi_2'(v)} = \text{const.} = k;$$

car, vu que l'on peut évidemment prendre pour variables indépendantes u et v à la place de x et y, chacun de ces rapports ne dépendant que de l'une ou de l'autre de ces quantités seulement, leurs valeurs ne pourront être égales, quelles que soient ces variables, qu'à la condition que cette valeur commune soit une simple constante k. Il sera donc nécessaire et suffisant, pour que cette troisième équation (74) soit vérifiée, que l'on ait à la fois

$$(77)\quad \psi_1'(u) = k\varpi_1'(u) \quad \text{et} \quad \varpi_2'(v) = -\frac{1}{k}\psi_2'(v),$$

ou

$$\psi_1(u) = k\varpi_1(u) + c' \quad \text{et} \quad \varpi_2(v) = -\frac{1}{k}\psi_2(v) + c'',$$

et, par suite, en reportant dans les valeurs ci-dessus (75), les

expressions les plus générales de ψ et de ϖ qui satisfassent à la fois aux trois équations (74) seront

$$(78)\qquad \psi = k\varpi_1(u) + c' + \psi_2(v),\qquad \varpi = \varpi_1(u) - \frac{1}{k}\psi_2(v) + c'';$$

expressions qui pourront encore, comme celles fournies par le calcul précédent, être présentées sous une forme plus simple, bien que tout aussi générale, en les récrivant d'abord *identiquement* ainsi qu'il suit :

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \left(k\varpi_1(u) + \frac{c' + kc''}{2}\right) + \left(\psi_2(v) + \frac{c' - kc''}{2}\right),\\ \varpi &= \frac{1}{k}\left[\left(k\varpi_1(u) + \frac{c' + kc''}{2}\right) - \left(\psi_2(v) + \frac{c' - kc''}{2}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

et adoptant alors simplement les symboles $\frac{1}{2}\mathcal{F}_1$ et $\frac{1}{2}\mathcal{F}_2$ pour représenter les fonctions de u et de v mises ainsi en évidence par de grandes parenthèses dans ces écritures, ce qui les transformera dès lors dans les suivantes :

$$(79)\qquad \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right],\qquad \varpi = \frac{1}{2k}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right].$$

La forme nécessaire de nos inconnues ψ et ϖ étant ainsi fournie par un calcul très simple, en se basant comme point de départ sur la signification géométrique évidente du système proposé (49), il ne reste plus, comme dans le calcul précédent, qu'à disposer de la constante k et des fonctions arbitraires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ qui figurent dans ces dernières expressions, de manière à satisfaire à ce système proposé lui-même (et non plus seulement au système du second ordre (74) que nous lui avons substitué par le raisonnement qui précède), c'est-à-dire, en fait, aux deux premières équations de ce système (49) seulement, puisque la dernière faisait également partie du système du second ordre (74) qui nous a conduit à ces expressions (79), et est par conséquent dores et déjà vérifiée par elles, quelles que soient les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ et la constante k.

A cet effet, tirant d'abord, comme plus haut, par la différentiation desdites expressions (79), les valeurs

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\psi}{dx}=\dfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}'_1(u)+\mathcal{F}'_2(v)\right], & \dfrac{d\psi}{dy}=\dfrac{i}{2}\left[-\mathcal{F}'_1(u)+\mathcal{F}'_2(v)\right], & \dfrac{d\psi}{dz}=0, \\ \dfrac{d\varpi}{dx}=\dfrac{1}{2k}\left[\mathcal{F}'_1(u)-\mathcal{F}'_2(v)\right], & \dfrac{d\varpi}{dy}=\dfrac{i}{2k}\left[-\mathcal{F}'_1(u)-\mathcal{F}'_2(v)\right], & \dfrac{d\varpi}{dz}=0, \end{array}\right.$$

d'où nous conclurons celles-ci :

$$(80)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\psi}{dy}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left[(\mathcal{F}'_1+\mathcal{F}'_2)^2-(\mathcal{F}'_1-\mathcal{F}'_2)^2\right]=\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v), \\ \left(\dfrac{d\varpi}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\varpi}{dy}\right)^2=\dfrac{1}{4k^2}\left[(\mathcal{F}'_1-\mathcal{F}'_2)^2-(\mathcal{F}'_1+\mathcal{F}'_2)^2\right]=-\dfrac{1}{k^2}\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v); \end{array}\right.$$

puis, reportant ces dernières valeurs dans les deux premières équations précitées (49), et y introduisant en même temps au dernier membre les quantités déjà employées (57), ces équations se réduiront alors aux deux suivantes

$$(81)\qquad \mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v)=-\frac{c^2}{k^2}\,\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v)=\frac{1}{\dfrac{C^2C'^2}{c^2}\,F_1(U)\,F_2(V)},$$

dont la première exigera tout d'abord pour être vérifiée identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, que l'on prenne

$$(82)\qquad -c^2=k^2 \qquad \text{ou} \qquad k=ic, \qquad (*)$$

et dès lors, avec cette valeur, il sera nécessaire et suffisant pour la réalité des deux expressions (79) que les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ soient deux fonctions imaginaires conjuguées, c'est-à-dire du type (68). Puis, cela fait, si l'on ajoute encore à deux reprises, à

(*) Il est sans intérêt d'écrire le double signe devant le coefficient i, car la considération successive des deux signes équivaut évidemment à permuter simplement dans les expressions (79) les deux symboles de fonctions arbitraires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

la première équation (79), la seconde successivement multipliée par $+2k$ et $-2k$, k étant la valeur (82) que nous venons de trouver, on voit, en ayant égard aux définitions (57), que l'on obtiendra ainsi de nouveau les deux équations

(83) $$U = \mathcal{F}_1(u), \qquad V = \mathcal{F}_2(v),$$

dont nous représenterons encore les réciproques par ces deux autres,

(84) $$u = f_1(U), \qquad v = f_2(V);$$

et alors si dans la seconde équation ci-dessus (81), savoir :

$$\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v) = \frac{1}{\frac{C^2C'^2}{c^2}F_1(U)\,F_2(V)}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v)} = \frac{C^2C'^2}{c^2}F_1(U)\,F_2(V),$$

on exprime simultanément les deux membres, soit en u et v, soit en U et V, à l'aide de l'un ou de l'autre des deux systèmes réciproques (83) ou (84), il est clair qu'il sera encore nécessaire et suffisant, pour que cette dernière équation soit également vérifiée, que l'on ait alors séparément entre les quatre fonctions $\mathcal{F}$ et F les relations réversibles, et par suite utilisables pour une double fin,

$$\frac{1}{\mathcal{F}'_1(u)} = \frac{CC'}{c}F_1(U), \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathcal{F}'_2(v)} = \frac{CC'}{c}F_2(V),$$

qui coïncident bien manifestement avec celles (66) rencontrées dans notre précédent calcul, du moment que la différentiation des systèmes réciproques (84) et (83) fournira évidemment les expressions

(85) $$f'_1(U) = \frac{du}{dU} = \left(\frac{dU}{du}\right)^{-1} = \frac{1}{\mathcal{F}'_1(u)}, \qquad f'_2(V) = \frac{dv}{dV} = \left(\frac{dV}{dv}\right)^{-1} = \frac{1}{\mathcal{F}'_2(v)}.$$

Si donc nous remettons à la fois, dans les expressions (79), à la place de u et v leurs valeurs de définition (69), et à la place de

la constante k sa valeur imposée (82), et que nous leur adjoignions de nouveau l'équation de droite (47), on voit que les expressions les plus générales de nos inconnues φ, ψ, ϖ seront encore, par ce second mode de calcul, exactément les mêmes, non seulement quant à la forme, mais aussi quant à l'étendue, que par le premier, strictement conforme à la méthode indiquée par Lamé :

$$(86)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= Az + B, \\ \psi &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(x - iy) + \mathcal{F}_2(x + iy)\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2ic}\left[\mathcal{F}_1(x - iy) - \mathcal{F}_2(x + iy)\right]. \end{aligned}\right.$$

Il faut bien faire attention, au sujet des deux dernières de ces expressions, qu'en les supposant ramenées l'une et l'autre à la forme M + iN, M et N étant réels, nous ne pourrons plus cette fois, comme dans les formules (34), (39) ou (43) de notre Chapitre II, y prendre encore pour solution soit la fonction M, soit la fonction N correspondantes, attendu que les trois équations (74) qui nous ont fourni ces expressions de ψ et de ϖ ne sont pas toutes linéaires et homogène, comme l'était l'équation $\Delta_2\lambda = 0$ envisagée seule à l'endroit précité de notre Chapitre II. Pour que les formules précédentes (86) fournissent une solution admissible du problème à la fois analytique et géométrique que nous nous sommes posé, il sera donc nécessaire actuellement que les deux expressions en question de ψ et de ϖ soient exclusivement réelles : condition qui ne sera remplie, de la façon la plus générale, qu'en prenant pour les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ qui resteront arbitraires sous cette condition, deux fonctions imaginaires conjuguées, ainsi que nous le démontrons dans la note de la page 153.

A la vérité, si l'on a égard à la remarque qui termine cette note, le résultat que nous venons d'obtenir par ce second calcul ne diffère que fort peu, comme étendue ou généralité des formules, de la solution de ce même problème fournie par cette proposition

très connue, mentionnée par Lamé (*), et reproduite par presque tous les traités d'Analyse, à savoir que si, dans une fonction entièrement quelconque F (z) [que l'on devra, par conséquent, pour la plus grande généralité, supposer de la forme F (z) $= \Phi(z) + i\Psi(z)$, Φ et Ψ étant deux fonctions réelles (**)], on remplace la variable z par $x + iy$, et que l'on fasse ensuite $F(x + iy) = A + iB$, A et B étant tous deux réels, le système $\psi = \pm A$, $\varpi = \pm B$, vérifiera le système du second ordre (74), et représentera par conséquent deux familles de cylindres, à la fois isothermes et orthogonales entre elles. Mais, de même que pour le problème général de l'isothermie envisagé dans notre Chapitre II, le calcul de simple vérification par lequel on a coutume d'établir cette proposition ne montre en quoi que ce soit que la solution ainsi obtenue soit la seule, ni même la plus générale possible (***). C'est pourquoi il nous a semblé de nouveau utile de procéder de même, au sujet de ce second problème, à une recherche directe, consistant dans l'intégration effective du système en question (74), et qui, elle, au contraire, ne permette pas de douter que ses résultats n'embrassent la totalité de la solution.

Terminons cette théorie, suivant notre coutume, en présentant quelques exemples d'application des formules que nous venons de donner.

(*) Lamé, *Leçons sur les Coordon. Curv.*, § CVII, *in fine* (pp. 191-194).

(**) Nous n'avons trouvé cette observation mentionnée explicitement dans aucun des Auteurs que nous avons consultés, bien qu'elle soit évidemment indispensable pour la généralité de la proposition en question, ou de la solution du système envisagé (74).

(***) Et par le fait elle ne l'est pas, rigoureusement parlant, puisque deux quantités particulières A et B ainsi formées constituant une solution, il est manifeste, d'après la forme même du système en question (74), que deux fonctions linéaires quelconques de ces quantités, savoir $\psi = mA + p$, et $\varpi = nB + q$, m, n, p, q étant des constantes entièrement arbitraires, constitueront encore une solution du même système : d'où il suit nécessairement que le rapport des deux invariants du premier ordre $\Delta_1\psi$ et $\Delta_1\varpi$ doit être une constante arbitraire c, ainsi que nous le trouvons par notre calcul [équations (80) et (82)], et non pas expressément l'*unité*, comme l'entraîne forcément la solution citée tout à l'heure dans le texte, ainsi que le montre d'ailleurs également Lamé (*loc. cit.*, p. 184).

1° Prenons dans les formules (73) ou (72), pour les deux fonctions conjuguées $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, les fonctions

$$\mathcal{F}_1(u) = -\frac{1}{\alpha}\left(\beta - i\log\frac{u}{l}\right), \qquad \mathcal{F}_2(v) = -\frac{1}{\alpha}\left(\beta + i\log\frac{v}{l}\right),$$

et écrivons-y en même temps, comme constante, $\frac{c}{\alpha}$ au lieu de c. Nous aurons alors par les dites formules (72)

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right] = -\frac{1}{2\alpha}\left[2\beta + i\left(\log\frac{v}{l} - \log\frac{u}{l}\right)\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2i\frac{c}{\alpha}}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2i\frac{c}{\alpha}\cdot\alpha}\left[i\log\frac{u}{l} + i\log\frac{v}{l}\right], \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$(87) \qquad \alpha\psi + \beta = -\frac{i}{2}\log\frac{v}{u}, \qquad 2c\varpi = \log\frac{uv}{l^2}.$$

Or, d'après la théorie générale des quantités imaginaires, les deux expressions conjuguées u et v pouvant être considérées sous la forme

$$u = x - iy = \rho e^{-i\omega}, \quad v = x + iy = \rho e^{i\omega}, \quad \frac{v}{u} = e^{2i\omega}, \quad uv = \rho^2,$$

le *module* ρ et l'*argument* ω étant, par définition, les quantités

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \omega = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

les expressions précédentes (87) deviennent, avec ces variables,

$$\alpha\psi + \beta = -\frac{i}{2}\log e^{2i\omega} = -\frac{i}{2}\cdot 2i\omega = \omega, \qquad 2c\varpi = \log\frac{\rho^2}{l^2},$$

et par conséquent, en prenant la tangente pour l'une, et revenant au nombre pour l'autre, on aura dans ce cas, pour tenir lieu des deux dernières formules (73),

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\omega = \text{tang}\,(\alpha\psi + \beta), \qquad x^2 + y^2 = \rho^2 = l^2 e^{2c\varpi}.$$

Si l'on fait abstraction des deux membres intermédiaires, ce sont *littéralement*, sauf permutation des coordonnées φ, ψ, ϖ, les formules du système (37) qui définit le système cylindrique du second ordre, avec les constantes arbitraires qu'il comporte essentiellement, lequel devait évidemment, *a priori*, rentrer comme cas-limite dans le système général que nous venons d'étudier.

2° Prenons encore dans les formules (72), cette fois avec la valeur $c = 1$ de la constante, pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ la même fonction réelle

$$\mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_2(t) = \arcsin \frac{t}{l},$$

en sorte que nous aurons d'une part, d'après les définitions (57), les valeurs

$$(87^{\text{bis}}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} U = \psi + i\varpi, & V = \psi - i\varpi \\ \text{ou} & \\ \psi = \frac{1}{2}(U + V), & i\varpi = \frac{1}{2}(U - V), \end{array} \right.$$

et d'autre part, d'après les formules (71) et (70), les expressions réciproques

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{ll} U = \mathcal{F}_1(u) = \arcsin \frac{u}{l} & V = \mathcal{F}_2(v) = \arcsin \frac{v}{l}, \\ \text{ou} & \\ u = f_1(U) = l \sin U = l \sin(\psi + i\varpi), & v = f_2(V) = l \sin V = l \sin(\psi - i\varpi). \end{array} \right.$$

Cela posé, on pourra résoudre la question en se proposant de déterminer de prime abord, soit l'expression des trois coordonnées rectilignes en φ, ψ, ϖ, pour tirer de là les équations des trois familles de surfaces, soit inversement ces dernières équations elles-mêmes, pour en déduire ensuite les expressions en question de x, y, et z.

Par le premier procédé, qui est le plus rapide, en remettant

les secondes valeurs (88) dans les formules (65) ou les deux premières formules (67), celles-ci deviendront

$$(88^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\left[f_1(\mathrm{U})+f_2(\mathrm{V})\right]=\frac{l}{2}\left[\sin(\psi+i\varpi)+\sin(\psi-i\varpi)\right]=l\sin\psi\cos i\varpi,\\ y&=\frac{i}{2}\left[f_1(\mathrm{U})-f_2(\mathrm{V})\right]=\frac{il}{2}\left[\sin(\psi+i\varpi)-\sin(\psi-i\varpi)\right]=l\cos\psi.\,i\sin i\varpi,\end{aligned}\right.$$

expressions qui sont bien réelles, nonobstant la présence de l'imaginaire i, attendu qu'elles peuvent s'écrire tout aussi bien, à l'aide des sinus et cosinus hyperboliques,

$$(89)\qquad x=l\sin\psi\operatorname{csh}\varpi,\qquad\qquad y=-l\cos\psi\operatorname{snh}\varpi,$$

et donneront dès lors, en éliminant successivement ϖ et ψ, pour les deux familles de cylindres dans le cas actuel, les équations

$$(89^{\text{bis}})\qquad \frac{x^2}{\sin^2\psi}-\frac{y^2}{\cos^2\psi}=l^2,\qquad\qquad \frac{x^2}{\operatorname{csh}^2\varpi}+\frac{y^2}{\operatorname{snh}^2\varpi}=l^2,$$

qui montrent que ces cylindres sont à base hyperbolique pour la première famille, à base elliptique pour la seconde, et d'ailleurs tous homofocaux entre eux.

Quant à la seconde méthode, voici comment il faut alors diriger la recherche, que nous croyons devoir indiquer également parce qu'elle nous servira ultérieurement de type pour un calcul analogue intéressant, mais plus compliqué.

Proposons-nous de former une équation du second degré, dont les deux racines soient $\sin^2\psi$ et $\sin^2\left(i\varpi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 i\varpi$.

A cet effet, les secondes formules (87bis) nous donnant

$$\left\{\begin{aligned} \sin^2\psi&=\frac{1-\cos 2\psi}{2}=\frac{1-\cos(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{2},\\ \cos^2 i\varpi&=\frac{1+\cos 2i\varpi}{2}=\frac{1+\cos(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{2},\end{aligned}\right.$$

nous en déduirons

$$\left\{\begin{aligned}\sin^2\psi + \cos^2 i\varpi &= \frac{1}{2}\left[1 - \cos(U+V) + 1 + \cos(U-V)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[2 + \{\cos(U-V) - \cos(U+V)\}\right]\\ \sin^2\psi.\cos^2 i\varpi &= \frac{1}{4}\left[1 - \cos(U+V)\right]\left[1 + \cos(U-V)\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[1 + \{\cos(U-V) - \cos(U+V)\} - \cos(U+V)\cos(U-V)\right],\end{aligned}\right.$$

valeurs qui, à cause des égalités

$$\left\{\begin{aligned}\cos(U-V) - \cos(U+V) &= 2\sin U \sin V,\\ \cos(U+V)\cos(U-V) &= \cos^2 U \cos^2 V - \sin^2 U \sin^2 V\\ &= (1 - \sin^2 U)(1 - \sin^2 V) - \sin^2 U \sin^2 V\\ &= 1 - (\sin^2 U + \sin^2 V),\end{aligned}\right.$$

se réduisent simplement à

$$\left\{\begin{aligned}\sin^2\psi + \cos^2 i\varpi &= 1 + \sin U \sin V\\ \sin^2\psi.\cos^2 i\varpi &= \frac{1}{4}\left[1 + 2\sin U\sin V - \{1 - (\sin^2 U + \sin^2 V)\}\right]\\ &= \frac{1}{4}(\sin U + \sin V)^2;\end{aligned}\right.$$

d'où il suit que l'équation demandée sera

$$(90)\qquad t^2 - (1 + \sin U \sin V).t + \frac{1}{4}(\sin U + \sin V)^2 = 0.$$

Or, les premières formules (88) et les définitions (69) donnant

$$\left\{\begin{aligned}&\sin U = \frac{u}{l}, &\qquad \sin V = \frac{v}{l},\\ &\sin U \sin V = \frac{uv}{l^2} = \frac{x^2 + y^2}{l^2}, &\qquad \sin U + \sin V = \frac{u+v}{l} = \frac{2x}{l},\end{aligned}\right.$$

la même équation deviendra, étant exprimée en x et y, au lieu de U et V,

$$t^2 - \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right) . t + \frac{1}{4}\frac{4x^2}{l^2} = 0,$$

ou

$$(90^{bis}) \qquad l^2t^2 - (l^2 + x^2 + y^2) . t + x^2 = 0,$$

puis, étant ordonnée par rapport à x et y,

$$(1 - t)\, x^2 - ty^2 = l^2 t\, (1 - t),$$

ou enfin, étant divisée par le produit $t(1 - t)$,

$$\frac{x^2}{t} - \frac{y^2}{1 - t} = l^2.$$

Cela posé, ses deux racines étant, d'après la manière même dont nous l'avons formée, $\sin^2 \psi$ et $\cos^2 i\varpi$, nous aurons donc séparément les deux équations

$$\frac{x^2}{\sin^2 \psi} - \frac{y^2}{\cos^2 \psi} = l^2, \qquad \frac{x^2}{\cos^2 i\varpi} - \frac{y^2}{\sin^2 i\varpi} = l^2,$$

qui se confondent manifestement, en raison des définitions $\operatorname{csh} z = \cos iz$ et $\operatorname{snh} z = \frac{1}{i} \sin iz$, avec les deux équations (89bis).

Il est évident, d'ailleurs, qu'en résolvant ces mêmes équations par rapport à x et y, on retrouvera pour ces deux coordonnées les expressions (89), d'où nous avons déduit tout à l'heure les dites équations (89bis).

3° Prenons encore dans les formules (72), avec la valeur $c = 1$ de la constante qui y figure, pour les deux fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ la même fonction réelle, savoir

$$(91) \qquad \mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_2(t) = \log \frac{t + c}{t - c},$$

qui donneront par conséquent

$$(91^{bis}) \qquad \mathrm{U} = \mathcal{F}_1(u) = \log \frac{u + c}{u - c}, \qquad \mathrm{V} = \mathcal{F}_2(v) = \log \frac{v + c}{v - c}.$$

On aura dans ce cas, en premier lieu, par les dites formules (72),

$$(92)\quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u)+\mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2}\log\frac{(u+c)(v+c)}{(u-c)(v-c)} = \frac{1}{2}\log\frac{uv+c(u+v)+c^2}{uv-c(u+v)+c^2}, \\ \varpi = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}_1(u)-\mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2i}\log\frac{(u+c)(v-c)}{(u-c)(v+c)} = \frac{1}{2i}\log\frac{uv-c(u-v)-c^2}{uv+c(u-v)-c^2} \end{cases}$$

et par conséquent

$$\frac{uv+c^2+c(u+v)}{uv+c^2-c(u+v)} = \frac{e^{2\psi}}{1}, \qquad \frac{uv-c^2-c(u-v)}{uv-c^2+c(u-v)} = \frac{e^{2i\varpi}}{1},$$

d'où l'on conclura immédiatement

$$(93)\quad \begin{cases} \dfrac{uv+c^2}{c(u+v)} = \dfrac{e^{2\psi}+1}{e^{2\psi}-1} = \dfrac{e^{\psi}+e^{-\psi}}{e^{\psi}-e^{-\psi}} = \dfrac{2\,\text{csh}\,\psi}{2\,\text{snh}\,\psi} = \dfrac{1}{\text{tgh}\,\psi}, \\ \dfrac{uv-c^2}{-c(u-v)} = \dfrac{e^{2i\varpi}+1}{e^{2i\varpi}-1} = \dfrac{e^{i\varpi}+e^{-i\varpi}}{e^{i\varpi}-e^{-i\varpi}} = \dfrac{2\cos\varpi}{2i\sin\varpi} = \dfrac{1}{i\,\text{tang}\,\varpi}. \end{cases}$$

D'ailleurs, les quantités u et v (69) donnant évidemment

$$(94)\quad \begin{cases} u+v=2x, \qquad u-v=-2iy, \qquad uv=x^2+y^2, \\ u^2+v^2=2(x^2-y^2), \qquad u^2-v^2=-4ixy, \end{cases}$$

les équations (93), qui représentent celles des deux familles de cylindres, sont donc, en x et y,

$$\frac{x^2+y^2+c^2}{c.2x} = \frac{1}{\text{tgh}\,\psi}, \qquad \frac{x^2+y^2-c^2}{c.2iy} = \frac{1}{i\,\text{tang}\,\varpi},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(95)\quad x^2+y^2+c^2 = \frac{2cx}{\text{tgh}\,\psi}, \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2-c^2 = \frac{2cy}{\text{tang}\,\varpi}.$$

Les deux familles de cylindres sont par conséquent dans ce cas toutes deux à base circulaire, et ont constamment leurs axes de révolution, l'une dans le plan des zx, l'autre dans le plan des yz.

En second lieu, la première des équations (91bis) donnant inversement

$$\frac{u+c}{u-c}=\frac{e^{U}}{1}, \qquad \frac{u}{c}=\frac{e^{U}+1}{e^{U}-1}=\frac{e^{\frac{1}{2}U}+e^{-\frac{1}{2}U}}{e^{\frac{1}{2}U}-e^{-\frac{1}{2}U}}=\frac{2\operatorname{csh}\frac{1}{2}U}{2\operatorname{snh}\frac{1}{2}U},$$

les fonctions réciproques des fonctions (91bis) seront donc

$$u=f_1(U)=c\frac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}U}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}U}, \qquad v=f_2(V)=c\frac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}V}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}V},$$

et par suite, étant remises dans les formules (65), fourniront, pour les coordonnées rectilignes x et y, les expressions

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\left[f_1(U)+f_2(V)\right]=\frac{c}{2}\left[\frac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}U}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}U}+\frac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}V}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}V}\right],\\ y&=\frac{i}{2}\left[f_1(U)-f_2(V)\right]=\frac{ic}{2}\left[\frac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}U}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}U}-\frac{\operatorname{csh}\frac{1}{2}V}{\operatorname{snh}\frac{1}{2}V}\right],\end{aligned}\right.$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$\left\{\begin{aligned} x&=c\frac{\operatorname{snh}\frac{1}{2}U\operatorname{csh}\frac{1}{2}V+\operatorname{csh}\frac{1}{2}U\operatorname{snh}\frac{1}{2}V}{2\operatorname{snh}\frac{1}{2}U\operatorname{snh}\frac{1}{2}V}=c\frac{\operatorname{snh}\frac{1}{2}(U+V)}{\operatorname{csh}\frac{1}{2}(U+V)-\operatorname{csh}\frac{1}{2}(U-V)}\\ y&=-ic\frac{\operatorname{snh}\frac{1}{2}U\operatorname{csh}\frac{1}{2}V-\operatorname{csh}\frac{1}{2}U\operatorname{snh}\frac{1}{2}V}{2\operatorname{snh}\frac{1}{2}U\operatorname{snh}\frac{1}{2}V}=-ic\frac{\operatorname{snh}\frac{1}{2}(U-V)}{\operatorname{csh}\frac{1}{2}(U+V)-\operatorname{csh}\frac{1}{2}(U-V)},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, eu égard aux définitions (57) de U et V, dans lesquelles nous avons fait par hypothèse $c=1$,

$$x=\frac{c\operatorname{snh}\psi}{\operatorname{csh}\psi-\operatorname{csh}i\varpi}, \qquad y=\frac{-c.i\operatorname{snh}i\varpi}{\operatorname{csh}\psi-\operatorname{csh}i\varpi},$$

ou, plus simplement,

$$x=\frac{c\operatorname{snh}\psi}{\operatorname{csh}\psi-\cos\varpi}, \qquad y=\frac{c\sin\varpi}{\operatorname{csh}\psi-\cos\varpi},$$

valeurs qui coïncident bien, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, avec celles que l'on trouverait par la résolution des équations (95) obtenues en premier lieu.

4° Prenons enfin, en terminant, toujours dans les mêmes formules (72), avec la valeur $c = 1$ de la constante, pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, encore une même fonction réelle, qui sera cette fois

$$\mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_2(t) = \log \frac{c^2}{t^2 - c^2}, \tag{96}$$

et donnera par suite

$$U = \mathcal{F}_1(u) = \log \frac{c^2}{u^2 - c^2}, \qquad V = \mathcal{F}_2(v) = \log \frac{c^2}{v^2 - c^2}. \tag{97}$$

Ces mêmes formules (72) donneront alors en premier lieu

$$\left\{ \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2} \log \frac{c^4}{(u^2 - c^2)(v^2 - c^2)}, \\ \varpi &= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right] = \frac{1}{2i} \log \frac{v^2 - c^2}{u^2 - c^2}, \end{aligned} \right. \tag{98}$$

et par conséquent

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{c^4}{(u^2 - c^2)(v^2 - c^2)} = e^{2\psi} \qquad \text{ou} \qquad u^2v^2 - c^2(u^2 + v^2) + c^4 = c^4e^{-2\psi}, \\ &\frac{v^2 - c^2}{u^2 - c^2} = \frac{e^{2i\varpi}}{1}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{v^2 - c^2 - (u^2 - c^2)}{v^2 - c^2 + (u^2 - c^2)} = \frac{e^{2i\varpi} - 1}{e^{2i\varpi} + 1} = \frac{e^{i\varpi} - e^{-i\varpi}}{e^{i\varpi} + e^{-i\varpi}}, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire plus simplement, quant à la dernière équation,

$$\frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2 - 2c^2} = \frac{2i \sin \varpi}{2 \cos \varpi} = i \operatorname{tang} \varpi,$$

équations qui équivalent en conséquence, eu égard aux valeurs (94) calculées toutes ensemble à l'occasion de l'exemple précédent, aux deux suivantes en x et y

$$\left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = c^4(e^{-2\psi} - 1), \\ &\frac{4ixy}{2(x^2 - y^2) - 2c^2} = i \operatorname{tang} \varpi, \end{aligned} \right. \tag{99}$$

ou, plus clairement, quant à la seconde, en chassant le dénominateur,

$$(100) \qquad x^2 - y^2 - 2\frac{xy}{\tang \varpi} = c^2.$$

De ces deux équations, qui sont celles des sections droites des deux familles de cylindres, la première représente une famille de courbes fermées, rétrécies dans leur partie médiane, rappelant un peu comme forme celle de la lemniscate, à laquelle elles se réduisent pour la valeur du paramètre $\psi = 0$; la seconde est une famille d'hyperboles équilatères, parmi lesquelles celle qui correspond au paramètre $\varpi = \frac{\pi}{2}$ a pour asymptotes les bissectrices des angles formés par les axes des coordonnées rectilignes, qui sont précisément, comme l'on sait, les tangentes au point double de la lemniscate que nous venons de spécifier dans la famille ψ pour la valeur du paramètre $\psi = 0$.

En second lieu, la première des équations (97) donnant inversement

$$\frac{c^2}{u^2 - c^2} = e^{\mathrm{U}}, \qquad \text{d'où} \qquad u^2 = c^2(1 + e^{-\mathrm{U}}),$$

les fonctions réciproques des fonctions (97) sont donc, dans le cas actuel,

$$(101) \qquad u = f_1(\mathrm{U}) = c\sqrt{1 + e^{-\mathrm{U}}}, \qquad v = f_2(\mathrm{V}) = c\sqrt{1 + e^{-\mathrm{V}}},$$

dans lesquelles on aura, d'après l'hypothèse,

$$(102) \qquad \begin{cases} e^{-\mathrm{U}} = e^{-(\psi + i\varpi)} = e^{-\psi} \,.\, e^{-i\varpi} = e^{-\psi}(\cos\varpi - i\sin\varpi), \\ e^{-\mathrm{V}} = e^{-(\psi - i\varpi)} = e^{-\psi} \,.\, e^{i\varpi} \;\; = e^{-\psi}(\cos\varpi + i\sin\varpi). \end{cases}$$

Les formules (65) donneront par conséquent, en y remettant d'abord les valeurs précédentes (101),

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left[f_1(\mathrm{U}) + f_2(\mathrm{V})\right] = \frac{c}{2}\left(\sqrt{1 + e^{-\mathrm{U}}} + \sqrt{1 + e^{-\mathrm{V}}}\right), \\ y = \frac{i}{2}\left[f_1(\mathrm{U}) - f_2(\mathrm{V})\right] = \frac{ic}{2}\left(\sqrt{1 + e^{-\mathrm{U}}} - \sqrt{1 + e^{-\mathrm{V}}}\right). \end{cases}$$

puis, en élevant au carré,

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{c^2}{4}\left[1 + e^{-\mathrm{U}} + 1 + e^{-\mathrm{V}} + 2\sqrt{(1 + e^{-\mathrm{U}})(1 + e^{-\mathrm{V}})}\right], \\ &= \frac{c^2}{2}\left[1 + \tfrac{1}{2}(e^{-\mathrm{U}} + e^{-\mathrm{V}}) + \sqrt{1 + e^{-\mathrm{U}} + e^{-\mathrm{V}} + e^{-(\mathrm{U}+\mathrm{V})}}\right], \\ y^2 &= \frac{-c^2}{4}\left[1 + e^{-\mathrm{U}} + 1 + e^{-\mathrm{V}} - 2\sqrt{(1 + e^{-\mathrm{U}})(1 + e^{-\mathrm{V}})}\right], \\ &= \frac{c^2}{2}\left[-1 - \tfrac{1}{2}(e^{-\mathrm{U}} + e^{-\mathrm{V}}) + \sqrt{1 + e^{-\mathrm{U}} + e^{-\mathrm{V}} + e^{-(\mathrm{U}+\mathrm{V})}}\right], \end{aligned}\right.$$

ou définitivement, en substituant les valeurs (102), puis extrayant alors les racines,

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + e^{-\psi}\cos\varpi + \sqrt{1 + e^{-2\psi} + 2e^{-\psi}\cos\varpi}}, \\ y &= \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{-(1 + e^{-\psi}\cos\varpi) + \sqrt{1 + e^{-2\psi} + 2e^{-\psi}\cos\varpi}}, \end{aligned}\right.$$

expressions qui coïncident bien encore avec celles que l'on obtiendrait, moins facilement toutefois, par la résolution seule des équations précédemment acquises (99) et (100).

Ces deux derniers exemples sont empruntés à Lamé, qui les rencontre et obtient les diverses équations, successivement déduites de nos formules dans ce qui précède, par un procédé absolument différent (*), et décrit minutieusement ensuite le tracé

(*) Partant de ce fait analytique très connu, que le système linéaire

$$(\alpha) \qquad \frac{d\psi}{dx} = -\frac{d\varpi}{dy}, \qquad \frac{d\psi}{dy} = \frac{d\varpi}{dx},$$

constitue une intégrale première de notre système du second ordre (74), et est complètement équivalent à notre système du premier ordre (49) (abstraction faite de l'équation intermédiaire), à la condition toutefois d'y restreindre la constante c à la seule valeur $c = 1$, puis remarquant, ce dont il est bien facile de s'assurer, que les deux expressions de ψ et ϖ

$$\psi = \log\frac{C}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}, \qquad \varpi = \text{arc tang}\,\frac{y-b}{x-a},$$

graphique et les propriétés géométriques remarquables des courbes formant les sections droites des familles de cylindres correspondantes, c'est-à-dire celles représentées par les équations (95), (99) et (100) ci-dessus (*Coordon. Curv.*, §§ CX-CXIII, pp. 199-206, et CXIX-CXXIII, pp. 217-227).

---

dans lesquelles a, b, C sont trois constantes quelconques, forment une solution particulière dudit système (α), Lamé exprime alors l'intégrale générale de ce même système, suivant le procédé habituel de la Physique Mathématique, à l'aide de séries composées d'un même nombre illimité de termes, correspondants chacun à chacun pour les deux expressions, telles que

$$(6) \quad \psi = \Sigma \mathrm{A} \log \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}, \qquad \varpi = \Sigma \mathrm{A} \text{ arc tang } \frac{y-b}{x-a},$$

le coefficient A, de même que les trois constantes a, b, C, pouvant varier d'un terme au suivant dans chaque série.

Cela posé, Lamé obtient les deux exemples 3° et 4°, que nous déduisons ci-dessus des formules de notre théorie, en limitant à deux seulement le nombre des termes de chaque série, supposant de plus que le coefficient C ait la même valeur $\mathrm{C} = c$ pour ces deux termes, et prenant enfin pour les constantes a et b, dans le premier terme, les valeurs $a = -c$, $b = 0$, et dans le second les valeurs $a = c$, $b = 0$.

Si, en outre de ces conditions communes aux deux exemples, l'on prend en premier lieu $\mathrm{A}_1 = -\mathrm{A}_2 = 1$, les formules précédentes (6) redonnent, comme on le reconnaît aisément à l'aide des égalités (94) et des divers calculs que nous avons fondés sur ces égalités, les expressions (92) de ψ et ϖ correspondant aux hypothèses (91) de notre exemple 3° ; et si l'on y prend, en second lieu, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = 1$, on retrouvera de la même façon celles (98) correspondant aux hypothèses (96) de notre exemple 4°. (*Coordonn. Curv.*, §§ CIX, p. 199, et CXIX, p. 217). Puis, cela fait, Lamé obtient les expressions réciproques de x et y, non pas comme nous le faisons par l'application de formules générales, mais seulement par la résolution des mêmes équations, qui est rendue possible dans ces deux cas par le très petit nombre des termes des séries.

En admettant même que la solution (6) de Lamé, sous forme de séries illimitées, présente effectivement le même degré de généralité que celle exprimée par nos formules (73) ou (67), ce qui n'est pas exact, au pied de la lettre, du moment que les équations linéaires (α), d'où elle est tirée, supposent dans les équations originaires (49) de notre théorie, avons-nous dit, la restriction $c = 1$, on jugera sans doute que les formules de notre théorie sont d'une application notablement plus pratique et plus facile, puisqu'elles fournissent immédiatement dans tous les cas, à volonté l'expression, soit des coordonnées curvilignes, soit des coordonnées rectilignes, tandis que la solution précitée (6) de Lamé ne donne que les premieres seulement, la résolution de ces mêmes équations par rapport à x et y étant évidemment impossible, en général, avec une pareille forme de solution : considération qui nous fera pardonner, nous l'espérons, l'étendue des développements que nous avons été amené à attribuer dans notre travail à cette question si connue des Systèmes Cylindriques à la fois orthogonaux et isothermes.

Système classique des coordonnées sphériques. — IV° « *Trois des mêmes dérivées seulement sont supposées nulles* ». Il est aisé de voir tout d'abord que parmi ces dérivées il faudra nécessairement supposer qu'il y en ait deux qui soient conjuguées.

En effet, comme on ne peut supposer que ces dérivées appartiennent toutes trois au même groupe, puisque, d'après l'équation (15), il y en aurait nécessairement une quatrième nulle également parmi celles de l'autre groupe, admettons pour un instant que chacune de ces dérivées appartienne à une colonne verticale différente du tableau (12), et qu'elles soient, pour fixer les idées,

$$\frac{R}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\psi}=0, \qquad \frac{Q}{\varpi}=0.$$

La seconde des équations du premier ordre (13), se réduisant alors par ces hypothèses à $R\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}=0$, ne pourra plus être vérifiée : et de même pour toutes les autres suppositions analogues. Et par conséquent, pour qu'il existe une solution du problème, il faut nécessairement supposer que parmi les trois dérivées qui sont nulles, deux appartiennent à la même colonne verticale du tableau (12), c'est-à-dire soient conjuguées.

Ce premier point admis, on pourra dès lors distinguer de nouveau deux hypothèses subsidiaires, suivant que parmi les mêmes dérivées il y en aura, ou non, deux qui soient réciproques. Or, on reconnait encore de suite que la première de ces deux suppositions ne peut non plus donner naissance à aucune solution, car si l'on se donne, par exemple,

$$\frac{R}{\varphi}=0, \qquad \frac{Q}{\varphi}=0, \qquad \frac{R}{\psi}=0,$$

la première des équations du premier ordre (13) se réduira encore à $R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}=0$, et ne pourra être vérifiée avec ces hypothèses.

La seule supposition relative à ce Cas IV° qui puisse fournir

une solution consiste donc à admettre à la fois que, sur les trois dérivées qui sont nulles, il y en a deux qui soient conjuguées, et aucune qui soit réciproque.

Prenant donc arbitrairement $\frac{Q}{\varphi}$ et $\frac{R}{\varphi}$ pour les deux premières, pour qu'il existe une solution, la troisième dérivée nulle ne pourra être que $\frac{P}{\psi}$ ou $\frac{P}{\varpi}$, et, dans ces deux sous-cas, la solution ne différera que par l'échange des surfaces ψ et ϖ entre elles, ou la permutation des mêmes lettres dans les formules.

Comme il suffira dès lors d'en examiner un seul, soient donc les hypothèses

$$(103) \qquad \frac{P}{\varpi} = 0, \qquad \frac{Q}{\varphi} = 0, \qquad \frac{R}{\varphi} = 0,$$

qui satisfont à la condition voulue, et qui correspondent, eu égard aux hypothèses générales (8), à des valeurs telles que

$$(104) \qquad P = f_1(\psi), \qquad Q = f_2(\varpi), \qquad R = f_3(\psi).$$

On reconnait à première vue qu'elles vérifient les deux dernières équations (13), et qu'elles réduisent la première à la suivante :

$$\frac{Q}{\varpi}\left(P\frac{R}{\psi} - R\frac{P}{\psi}\right) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, la dérivée $\frac{Q}{\varpi}$ étant différente de zéro par hypothèse, à celle-ci :

$$(105) \qquad \frac{lR}{\psi} - \frac{lP}{\psi} = 0, \qquad \text{ou} \qquad R = C^2P,$$

eu égard à la forme (104) des valeurs de P et R. D'autre part, comme la quantité G, définie par l'égalité (18), se réduira simplement dans ce Cas à la valeur $Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}$, les trois équations du second ordre (19) deviendront semblablement, par ces mêmes hypothèses (103), respectivement les trois suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} 2PQR.Q\frac{P''}{\psi^2} &= 2Q^2R\left(\frac{P'}{\psi}\right)^2 + PQ^2\frac{R'}{\psi}\frac{P'}{\psi}, \\ 2PQR.R\frac{Q''}{\varpi^2} &= 2R^2P\left(\frac{Q'}{\varpi}\right)^2 - Q^3\frac{R'}{\psi}\frac{P'}{\psi}, \\ 2PQR\,Q\frac{R''}{\psi^2} &= 2PQ^2\left(\frac{R'}{\psi}\right)^2 + RQ^2\frac{R'}{\psi}\frac{P'}{\psi}, \end{aligned}\right.$$

dont la première et la troisième se réduiront elles-mêmes simultanément, si l'on tient compte de la relation déjà obtenue (105) entre R et P, à celle-ci :

$$(106) \qquad 2P\frac{P''}{\psi^2} - 3\left(\frac{P'}{\psi}\right)^2 = 0,$$

qui déterminera P et, par suite, aussi R, pendant que la seconde de ces mêmes équations deviendra semblablement, par le moyen de la même relation (105),

$$(107) \qquad 2P^3Q\frac{Q''}{\varpi^2} = 2P^3\left(\frac{Q'}{\varpi}\right)^2 - Q^3\left(\frac{P'}{\psi}\right)^2,$$

et déterminera de même la troisième fonction inconnue Q, lorsque l'on aura obtenu P à l'aide de l'équation précédente (106). Nous effectuerons un peu plus loin ces divers calculs, en vue de traiter complètement la question pour ce Cas, c'est-à-dire de déterminer exactement, en fonction des coordonnées x, y, z, les expressions des inconnues φ, ψ, ϖ correspondantes aux hypothèses précitées (103).

Toutefois cette même détermination ne sera pas nécessaire, ainsi que nous allons le voir, si l'on se propose tout d'abord comme objectif, simplement de définir les trois familles de surfaces qui composent dans ce Cas le système orthogonal, sans exiger que les équations de ces familles de surfaces soient rapportées à leurs paramètres thermométriques, condition qui serait remplie, au contraire, par le calcul définitif des coordonnées φ, ψ, ϖ, auquel nous venons de faire allusion.

En effet, le problème étant posé tout d'abord dans ces termes

plus simples, la seule inspection du tableau (12) fait voir qu'avec les hypothèses (103) et la première égalité (105), les deux courbures principales $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ sont nulles, ainsi que la courbure $\frac{1}{R_2''}$, et les deux courbures $\frac{1}{R_1'}$ et $\frac{1}{R_2'}$ constamment égales entre elles. Les surfaces φ sont donc des plans, les surfaces ϖ des surfaces développables, et les surfaces ψ des sphères, et par suite, en vertu de notre Théorème II (page 118), cette famille ψ se composera uniquement de sphères concentriques (*).

Ce point important étant acquis, on arrivera facilement à définir le système, comme pour le Cas I°, soit à l'aide de simples raisonnements géométriques, soit en s'aidant du calcul.

En effet, par la première voie, un plan quelconque ne pouvant rencontrer une sphère orthogonalement qu'à la condition de passer par son centre, tous les plans φ devront contenir le centre commun des sphères, et par conséquent tout d'abord la famille φ ne pourra se composer de plans parallèles. Dès lors, d'après

---

(*) Quand bien même nous n'aurions pas démontré antérieurement d'une façon générale cette propriété caractéristique des sphères composant une famille isotherme d'avoir toutes le même centre, ce fait résulterait immédiatement, dans le cas particulier, pour les surfaces ψ, de cette circonstance que nous allons établir à l'instant, à savoir que l'intersection de deux surfaces φ et ϖ quelconques est une droite, laquelle sera dès lors, d'après la définition du système orthogonal, normale à toutes les surfaces de la famille ψ, et par conséquent toutes ces sphères, ayant leurs normales communes, sont nécessairement concentriques.

Enfin le même fait serait encore, pour ce Cas, mis en évidence par une quadrature toute semblable à celle de l'équation (22bis), car en appelant cette fois N la longueur de normale comprise entre les deux surfaces particulières ψ_1 et ψ_2, l'on trouverait de la même façon, en tenant compte des expressions (11) et des hypothèses actuelles (104), quelle que soit la normale considérée,

$$\frac{dN}{d\psi} \doteq \frac{1}{\Delta_1\psi} = \sqrt{RP} = \sqrt{f_1(\psi) f_2(\psi)},$$

d'où, en intégrant, la valeur

$$N = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{f_1(\psi) f_2(\psi)}\, d\psi = \mathfrak{F}(\psi_1, \psi_2),$$

qui montre que deux quelconques des surfaces ψ sont partout équidistantes entre elles; et comme par ailleurs ces surfaces ψ sont des sphères, elles sont par conséquent concentriques.

notre Théorème I (*ibid.*), relatif aux familles isothermes de plans, ces plans se couperont tous suivant une même droite fixe D, qui passera forcément par le centre des sphères.

D'ailleurs les deux courbures $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2''}$, qui sont nulles toutes deux, étant, suivant la qualification de Lamé, *conjuguées en arc*, c'est-à-dire empruntées à deux surfaces coordonnées de familles différentes, mais tangentes toutes les deux à l'arc d'intersection de ces deux surfaces (voir notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces*, page 87, 2°), il s'ensuit que, en tous les points de cet arc d'intersection de deux surfaces φ et ϖ, la section principale de chacune de ces deux surfaces tangente à cet arc sera une droite, laquelle droite ne saurait être différente pour les deux surfaces, du moment que ces deux sections principales doivent avoir la même tangente : ce qui revient à dire que cet arc d'intersection de deux surfaces φ et ϖ quelconques sera lui-même une droite (*), laquelle, devant par ailleurs être normale à toutes les surfaces de la troisième famille ψ, c'est-à-dire aux sphères concentriques, passera constamment par leur centre. D'où il suit que la famille ϖ est composée de cônes ayant pour sommet le centre commun des sphères, et dont il suffira dès lors, pour les définir complètement, de déterminer la trace sur l'une de ces sphères, par exemple celle de rayon 1.

Or, cette trace devant rencontrer normalement tous les plans φ, d'après la définition même du système orthogonal, est constamment perpendiculaire à la direction D commune à tous ces plans; et dès lors, en cheminant de proche en proche sur l'une de ces trajectoires, à partir d'un point M_0 arbitrairement choisi, l'on voit clairement que cette courbe sera située tout entière dans le plan perpendiculaire à la droite D qui contient le point

(*) Cela résulte encore, plus clairement peut-être, comme nous le remarquerons à propos du Cas suivant V°, du premier Théorème de Lamé, que nous établissons dans le Chapitre I de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 28), lequel montre expressément (ainsi que la formule (33) qui précède, page 27) que la courbure propre $\frac{1}{R'}$ de l'arc d'intersection des surfaces ϖ et φ est la résultante des deux courbures principales $\frac{1}{R_2''}$ et $\frac{1}{R_1}$, et par conséquent est nulle, comme chacune d'elles, avec l'hypothèse actuelle.

initial M_0, puisqu'en aucun de ses points elle ne pourra faire un angle fini avec la direction de ce plan. D'où il suit que la trace en question est un petit cercle ayant cette droite D pour axe, et par conséquent enfin la famille ϖ se composera de cônes de révolution, ayant pour sommet le centre des sphères ψ, et pour axe la droite D commune à tous les plans φ.

On arrivera, sans plus de difficulté, à la même conclusion par la seconde voie, en partant simultanément des deux équations

$$(108) \qquad (\alpha\lambda_1 - a)\,x + (\beta\lambda_1 - b)\,y + (\gamma\lambda_1 - c)\,z + \delta\lambda_1 - d = 0$$

et

$$(109) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda_2$$

que donnent les deux formes d'équation les plus générales (57) et (74) du Chapitre II relatives aux familles isothermes de plans et de sphères, respectivement pour les équations des deux familles φ et ψ, et exprimant qu'elles vérifient les trois équations de droite (21); car si l'on fait pour un instant, comme dans l'équation (132) du Chapitre II et les suivantes,

$$D = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$

la différentiation de l'équation (108) par rapport à x, y, z donnant comme alors

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{\alpha\lambda_1 - a}{D}, \qquad \frac{d\lambda_1}{dy} = -\frac{\beta\lambda_1 - b}{D}, \qquad \frac{d\lambda_1}{dz} = -\frac{\gamma\lambda_1 - c}{D},$$

on voit que la condition d'orthogonalité de ces deux familles φ et ψ, qui est, avec les formes d'équation (108) et (109),

$$\frac{d\lambda_1}{dx}\frac{d\lambda_2}{dx} + \frac{d\lambda_1}{dy}\frac{d\lambda_2}{dy} + \frac{d\lambda_1}{dz}\frac{d\lambda_2}{dz} = 0,$$

se réduira simplement, dans le cas actuel, à

$$-\left[(\alpha\lambda_1 - a)\,x + (\beta\lambda_1 - b)\,y + (\gamma\lambda_1 - c)\,z\right] = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, en vertu de l'équation (108) elle-même, à

$$\delta\lambda_1 - d = 0,$$

laquelle équation, devant être vérifiée quel que soit λ_1, exigera que l'on ait séparément $\delta = 0$, et $d = 0$, c'est-à-dire que tous les plans φ (108) contiendront une même droite passant par l'origine, centre des sphères ψ.

Semblablement la condition d'orthogonalité des surfaces ϖ avec les surfaces ψ ou λ_2, qui peut être écrite

$$\frac{d\lambda_2}{dx}\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\lambda_2}{dy}\frac{d\varpi}{dy} + \frac{d\lambda_2}{dz}\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

sera, eu égard à l'expression du paramètre λ_2 fournie par l'équation (109),

$$x\frac{d\varpi}{dx} + y\frac{d\varpi}{dy} + z\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

équation dont l'intégrale étant donnée par le système simultané

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{d\varpi}{0},$$

sera l'équation

(110) $\qquad \varpi = f(u, v), \qquad$ où $\qquad u = \frac{x}{z}, \qquad v = \frac{y}{z};$

et dès lors les surfaces ϖ sont des cônes ayant pour sommet l'origine, c'est-à-dire le centre commun des sphères.

Enfin, en dernier lieu, pour définir la nature de ces cônes, si nous choisissons encore la direction des axes, comme dans le Cas II°, en prenant pour axe des z la droite par laquelle passent tous les plans φ, de manière à mettre leur équation sous la forme simplifiée (25), la condition de leur orthogonalité avec les cônes de la famille ϖ, qui sera de même, en la multipliant par le facteur $\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}$,

$$\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\varphi + 6)}\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varpi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varpi}{dz}\right) = 0,$$

si l'on a égard aux valeurs (26) des dérivées de φ, et à celles des dérivées de ϖ qui résultent des équations (110), savoir

$$\frac{d\varpi}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d\varpi}{du}\frac{1}{z}, \qquad \frac{d\varpi}{dy}=\frac{df}{dv}\frac{dv}{dy}=\frac{d\varpi}{dv}\frac{1}{z},$$

deviendra simplement encore dans le Cas actuel, comme lors du Cas II°,

$$y\frac{d\varpi}{du}-x\frac{d\varpi}{dv}=0 \qquad \text{ou} \qquad v\frac{d\varpi}{du}-u\frac{d\varpi}{dv}=0,$$

et donnera par suite, en intégrant, comme pour l'équation (28),

$$u^2+v^2=\Pi(\varpi) \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2+y^2}{z^2}=\Pi(\varpi),$$

c'est-à-dire que les cônes composant cette troisième famille ϖ seront de révolution autour de l'axe des z ou de la droite commune à tous les plans φ.

La solution pour ce Cas IV° se composera donc exclusivement d'une famille de sphères concentriques, d'une famille de plans méridiens, passant tous par une même droite menée par le centre des sphères, et d'une famille de cônes de révolution autour de cette même droite. C'est par conséquent le système classique des *Coordonnées Sphériques* ou *Polaires*, qui constitue à lui seul la solution, dans ce Cas, résultat strictement délimité, qui n'était nullement à prévoir par le seul fait que ce système connu devait manifestement être compris dans la solution, et qu'il y avait intérêt dès lors à établir rigoureusement, ainsi que nous croyons l'avoir fait à l'aide des calculs et des raisonnements que nous venons de présenter (*).

(*) Cette démonstration eût été de nouveau fort difficile, sinon impossible, aussi bien par un mode de raisonnement que par l'autre, si nous n'avions commencé par mettre en évidence la propriété caractéristique des plans constituant une famille isotherme, savoir de passer tous par une même droite, ou, ce qui revient au même, leur forme d'équation *la plus générale* (57), établie dans notre Chapitre II, et que nous avons formulée en théorème sous le numéro I (p. 118).

La partie la plus importante de la solution étant ainsi obtenue, si l'on veut à présent en pousser jusqu'au bout le développement, c'est-à-dire déterminer exactement les équations en termes finis qui lient, dans le Cas actuel, les coordonnées thermométriques φ, ψ, ϖ aux coordonnées rectilignes x, y, z, comme, en supposant ce dernier point obtenu, les trois surfaces qui composent le système se trouveront alors, par ces équations mêmes, rapportées simultanément à leurs paramètres thermométriques, on pourrait, en visant ce but, avoir la pensée de recourir, pour achever la solution du problème, à la méthode générale de Lamé que nous avons indiquée dans notre Chapitre II pour cet objet. Mais ce procédé, suffisant à la vérité pour conduire à la forme des équations demandées, ne fournirait pas en toute certitude la solution complète de la question spéciale que nous avons actuellement en vue, attendu qu'elle laisserait forcément de côté les relations qui pourraient exister, par la nature même du problème, entre les différentes constantes, introduites par les intégrations isolées relatives à chaque surface, et ne permettraient pas d'apprécier dès lors combien il en subsiste de réellement arbitraires. C'est pourquoi il vaudra mieux avoir recours, pour cela, au trois équations de gauche (21) qui restent encore à vérifier, comme nous l'avons fait à propos du Cas II° (pages 147-149), en calculant séparément pour ces équations, d'une part, les valeurs des seconds membres résultant dans le Cas actuel des hypothèses (103), et, d'autre part, pour les premiers membres, celles auxquelles donneraient naissance les équations des trois familles de surfaces rencontrées tout à l'heure comme solution, savoir (*) :

$$(111) \qquad \frac{y}{x} = \Phi(\varphi), \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \Psi(\psi), \qquad \frac{x^2+y^2}{z^2} = \Pi(\varpi).$$

(*) Nous pourrions évidemment pour ce Cas encore, de même que pour le Cas II°, en attribuant dès maintenant aux deux familles φ et ψ les deux équations les plus générales (69) et (75), trouvées dans le Chapitre précédent pour les familles isothermes de plans et de sphères, déterminer alors *sans nouvelle intégration*, et à l'aide de simples identifications imposées par les trois équations que nous venons de dire, l'équation exacte de la

Pour cela, il sera nécessaire de déterminer tout d'abord les trois fonctions P, Q, R, à l'aide des trois équations ci-dessus (106), (107) et (105). A cet effet, la première étant écrite successivement sous les diverses formes qui suivent,

$$2\left[P\frac{P^2}{\psi^2}-\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right]=\left(\frac{P}{\psi}\right)^2, \qquad \text{ou} \qquad 2\frac{P\frac{P^2}{\psi^2}-\left(\frac{P}{\psi}\right)^2}{P^2}=\left(\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\right)^2,$$

ou encore

$$2\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\right)=\left(\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\right)^2, \qquad \text{ou enfin} \qquad \frac{\frac{d^2.lP}{d\psi^2}}{\left(\frac{d.lP}{d\psi}\right)^2}=\frac{1}{2},$$

donnera dès lors, en l'intégrant une première fois,

$$-\frac{1}{\frac{d.lP}{d\psi}}=\frac{1}{2}(\psi+c') \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}d.lP=-\frac{d\psi}{\psi+c'},$$

puis, en l'intégrant une seconde fois,

$$(112) \qquad l\sqrt{P}=-l(\psi+c')-lc \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{P}=\frac{1}{c(\psi+c')};$$

d'où enfin, en ayant recours également à l'équation (105),

$$(113) \qquad P=\frac{1}{c^2(\psi+c')^2} \qquad \text{et} \qquad R=\frac{C^2}{c^2(\psi+c')^2}.$$

---

troisième famille ϖ, ainsi que le nombre précis et le rôle des constantes réellement arbitraires qui subsisteront dans les trois équations définitives. Mais le calcul n'étant ni plus long, ni plus difficile, mais étant beaucoup plus symétrique, en traitant les trois surfaces sur le pied d'égalité, nous poursuivrons cette recherche pour les trois surfaces à la fois, sans supposer connu aucun des résultats établis antérieurement dans notre Chapitre II, et que nous venons de rappeler.

De même l'équation (107) pouvant être écrite, en la divisant par P^3Q^3,

$$\frac{2}{Q}\,\frac{Q\,\frac{Q''}{\varpi^2}-\left(\frac{Q'}{\varpi}\right)^2}{Q^2}=-\frac{1}{P^3}\left(\frac{P'}{\psi}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{Q}\,\frac{d^2.lQ}{d\varpi^2}=-4\left(\tfrac{1}{2}\,P^{-\frac{3}{2}}\,\frac{P'}{\psi}\right)^2,$$

et, d'autre part, la seconde équation (112) donnant successivement

$$(114) \qquad P^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{P}}=c\,(\psi+c'), \qquad \text{d'où} \qquad -\frac{1}{2}\,P^{-\frac{3}{2}}\,\frac{P'}{\psi}=c,$$

l'équation en Q que nous venons d'écrire deviendra, en y remettant cette dernière valeur,

$$(115) \qquad \frac{2}{Q}\,\frac{d^2.lQ}{d\varpi^2}=-4c^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2.lQ}{d\varpi^2}=-2c^2Q.$$

Ce résultat acquis, comme, en la multipliant par le facteur $2\frac{d.lQ}{d\varpi}d\varpi=2d\,.\,lQ=\frac{2}{Q}\,dQ$, on pourra l'écrire aussi bien

$$2\,\frac{d.lQ}{d\varpi}\,\frac{d^2.lQ}{d\varpi^2}\,d\varpi=-2c^2Q\,.\,\frac{2}{Q}\,dQ=-4c^2dQ,$$

on en déduira semblablement par une première intégration

$$(116) \qquad \left(\frac{d.lQ}{d\varpi}\right)^2=4a^2-4c^2Q \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{Q}\,\frac{dQ}{d\varpi}=2a\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}Q},$$

équation que l'on pourra encore écrire, en séparant les variables et changeant les signes des deux membres, puis transformant successivement le second membre,

$$-2ad\varpi=\frac{-dQ}{Q\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}Q}}=\frac{-dQ}{Q^2\sqrt{\frac{1}{Q^2}-\frac{c^2}{a^2}\frac{1}{Q}}}=\frac{-\frac{dQ}{Q^2},}{\sqrt{\left(\frac{1}{Q}-\frac{c^2}{2a^2}\right)^2-\left(\frac{c^2}{2a^2}\right)^2}},$$

et qui donnera dès lors, par une seconde intégration, celle-ci (*)

$$\frac{1}{Q}-\frac{c^2}{2a^2}=\frac{c^2}{2a^2}\operatorname{csh}(-2a\varpi-2b)=\frac{c^2}{2a^2}\operatorname{csh}2(a\varpi+b),$$

(*) Les deux équations

$$dx=\frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}} \qquad \text{et} \qquad dx=\frac{dz}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

admettent respectivement pour intégrales

$$z=a\operatorname{snh}(x+x) \qquad \text{et} \qquad z=a\operatorname{csh}(x+\alpha).$$

En effet, si on les écrit simultanément ainsi

$$dx=\frac{dz}{\sqrt{z^2\pm a^2}}=\frac{\frac{dz}{a}}{\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2\pm 1}},$$

on trouvera en intégrant par quadrature

$$x+\alpha=\log\left(\frac{z}{a}+\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2\pm 1}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$e^{x+\alpha}=\frac{z}{a}+\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2\pm 1},$$

d'où l'on conclura

$$e^{-(x+\alpha)}=\frac{1}{\frac{z}{a}+\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2\pm 1}}=\frac{\frac{z}{a}-\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2\pm 1}}{\frac{z^2}{a^2}-\left(\frac{z^2}{a^2}\pm 1\right)}=\mp\left(\frac{z}{a}-\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2\pm 1}\right),$$

les doubles signes qui sont devant la parenthèse correspondant respectivement à ceux qui sont sous le radical. En prenant donc d'abord les signes supérieurs, qui correspondent à la première équation différentielle proposée, on aura, en retranchant l'une de l'autre les deux équations qui précèdent,

$$e^{x+\alpha}-e^{-(x+\alpha)}=2\frac{z}{a} \qquad \text{ou} \qquad z=a\operatorname{snh}(x+\alpha),$$

et, en prenant ensuite les signes inférieurs qui correspondent à la seconde équation, et ajoutant, on obtiendra semblablement

$$e^{x+\alpha}+e^{-(x+\alpha)}=2\frac{z}{a} \qquad \text{ou} \qquad z=a\operatorname{csh}(x+\alpha),$$

ainsi que nous venons de l'énoncer.

de laquelle on tirera ensuite

$$\frac{1}{Q}=\frac{c^2}{2a^2}\left[1+\operatorname{csh} 2(a\varpi+b)\right]=\frac{c^2}{2a^2}.2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b),$$

c'est-à-dire définitivement, en résolvant par rapport à Q,

$$Q=\frac{a^2}{c^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)}, \tag{117}$$

laquelle valeur, étant rapprochée de celles (113) de P et de R, fournira dès lors, pour le but que nous avons dit tout à l'heure, les expressions demandées, relatives au Cas actuel, des seconds membres des trois équations de gauche (21).

A cet effet, en vue de simplifier l'écriture de ces expressions, nous introduirons à la place des deux constantes c et c' les deux nouvelles constantes $m=c^2$ et $n=c^2c'$, et alors, ayant par ce moyen

$$c^4(\psi+c')^2=(c^2\psi+c^2c')^2=(m\psi+n)^2,$$

les trois expressions que nous venons de dire seront par conséquent

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{QR}&=\frac{c^4}{C^2a^2}(\psi+c')^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)=\frac{1}{C^2a^2}(m\psi+n)^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b),\\ \frac{1}{RP}&=\frac{c^4}{C^2}(\psi+c')^4=\frac{1}{C^2c^4}(c^2\psi+c^2c')^4=\frac{1}{C^2m^2}(m\psi+n)^4,\\ \frac{1}{PQ}&=\frac{c^4}{a^2}(\psi+c')^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)=\frac{1}{a^2}(m\psi+n)^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b).\end{aligned}\right. \tag{118}$$

Cela fait, en venant d'un autre côté aux équations (111) des trois surfaces que nous venons d'obtenir, on tirera de la première et de la troisième

$$y=x\,\Phi(\rho),\qquad x^2+y^2=z^2\Pi(\varpi),\qquad x^2\left[1+\Phi^2(\rho)\right]=z^2\Pi(\varpi), \tag{119}$$

et, en reportant dans la seconde,

(120) $$z^2\left[\Pi(\varpi)+1\right]=\Psi(\psi),\qquad \text{d'où}\qquad z^2=\frac{\Psi(\psi)}{1+\Pi(\varpi)},$$

puis enfin, en remettant cette dernière valeur de z^2 dans la dernière équation précédente (119),

(121) $$x^2(1+\Phi^2)=\frac{\Psi\Pi}{1+\Pi},\qquad \text{d'où}\qquad x^2=\frac{\Psi\Pi}{(1+\Phi^2)(1+\Pi)}.$$

Par ailleurs, en différentiant les mêmes équations (111), on trouvera sans peine, comme lors du Cas IIe ci-dessus (page 147),

$$\left\{\begin{array}{llll}
\Phi'\dfrac{d\varphi}{dx}=-\dfrac{y}{x^2}, & \Phi'\dfrac{d\varphi}{dy}=\dfrac{1}{x}, & \Phi'\dfrac{d\varphi}{dz}=0, & \Phi'^2\Delta_1^2\varphi=\dfrac{1}{x^2}\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right),\\
\Psi'\dfrac{d\psi}{dx}=2x, & \Psi'\dfrac{d\psi}{dy}=2y, & \Psi'\dfrac{d\psi}{dz}=2z, & \Psi'^2\Delta_1^2\psi=4(x^2+y^2+z^2),\\
\Pi'\dfrac{d\varpi}{dx}=\dfrac{2x}{z^2}, & \Pi'\dfrac{d\varpi}{dy}=\dfrac{2y}{z^2}, & \Pi'\dfrac{d\varpi}{dz}=-2\dfrac{x^2+y^2}{z^3}, & \Pi'^2\Delta_1^2\varpi=\dfrac{4}{z^2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}+\dfrac{(x^2+y^2)^2}{z^4}\right),
\end{array}\right.$$

d'où l'on conclura pour chaque famille, en ayant égard à leurs équations (111) et aux valeurs précédentes (121) et (120) de x^2 et z^2,

$$\left\{\begin{array}{lll}
\Phi'^2\Delta_1^2\varphi=\dfrac{(1+\Phi^2)(1+\Pi)}{\Psi\Pi}(1+\Phi^2), & \text{d'où} & \Delta_1^2\varphi=\dfrac{(1+\Phi^2)^2(1+\Pi)}{\Phi'^2\Psi\Pi},\\
\Psi'^2\Delta_1^2\psi=4\Psi, & \text{»} & \Delta_1^2\psi=\dfrac{4\Psi}{\Psi'^2},\\
\Pi'^2\Delta_1^2\varpi=\dfrac{4(1+\Pi)}{\Psi}(\Pi+\Pi^2) & \text{»} & \Delta_1^2\varpi=\dfrac{4\Pi(1+\Pi)^2}{\Psi\Pi'^2}.
\end{array}\right.$$

En identifiant dès lors, pour satisfaire aux équations de gauche (21), avec les expressions précédentes (118), ces valeurs de $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\psi$, $\Delta_1^2\varpi$, c'est-à-dire des premiers membres de ces mêmes équations, il faudra donc que l'on ait dans le Cas actuel :

$$(122)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{C^2a^2}(m\psi+n)^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)=\left(\frac{1+\Phi^2}{\Phi'}\right)^2\frac{1+\Pi}{\Psi\Pi},\\ &\frac{1}{C^2m^2}(m\psi+n)^4=\frac{4\Psi}{\Psi'^2}=\frac{1}{\left(\dfrac{\Psi'}{2\sqrt{\Psi}}\right)^2},\\ &\frac{1}{a^2}(m\psi+n)^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)=\frac{4\Pi(1+\Pi)^2}{\Psi\Pi'^2}=\frac{4}{\Psi}\frac{1}{\Pi}\left(\frac{1+\Pi}{\Pi}\right)^2\frac{1}{\left(-\dfrac{\Pi'}{\Pi^2}\right)^2}.\end{aligned}\right.$$

Or, il est évident que la première de ces équations équivaudra aux deux suivantes

$$\left(\frac{\Phi'}{1+\Phi^2}\right)^2=\frac{C^2}{(m\psi+n)^2\Psi}\;\frac{a^2(1+\Pi)}{\Pi\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)}=\alpha^2,$$

α désignant une nouvelle constante, car les deux premiers membres, étant exclusivement fonctions de variables indépendantes différentes, ne pourront rester égaux pour toutes les valeurs de ces variables, que si cette valeur commune est elle-même une constante. Cela posé, cette dernière suite d'équations donnera séparément, de nouveau et pour la même raison,

$$\frac{\Phi'}{1+\Phi^2}=\alpha,\qquad \text{et}\qquad \frac{a^2(1+\Pi)}{\Pi\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)}=\frac{\alpha^2}{C^2}(m\psi+n)^2\Psi=C'^2,$$

d'où l'on tirera

$$(123)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tang}\Phi=\alpha\varphi+6,\qquad \text{d'où}\qquad \Phi(\varphi)=\operatorname{tang}(\alpha\varphi+6),\\ &\Psi=\frac{C^2C'^2}{\alpha^2(m\psi+n)^2},\qquad \text{»}\qquad \sqrt{\Psi}=\frac{CC'}{\alpha(m\psi+n)},\\ &\frac{1+\Pi}{\Pi}=\frac{C'^2}{a^2}\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)\qquad \text{d'où}\qquad \frac{1}{\Pi}=\frac{1}{a^2}[C'^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)-a^2].\end{aligned}\right.$$

Or, en différentiant ces deux expressions de $\sqrt{\Psi}$ et de $\frac{1}{\Pi}$, on trouve

$$\frac{\Psi'}{2\sqrt{\Psi}}=\frac{-CC'm}{\alpha(m\psi+n)^2},\qquad \frac{-\Pi'}{\Pi^2}=2\frac{C'^2}{a}\operatorname{csh}(a\varpi+b)\operatorname{snh}(a\varpi+b),$$

et en substituant dès lors ces dernières valeurs, ainsi que celles (123) de Ψ, $\frac{1}{\Pi}$, et $\frac{1+\Pi}{\Pi}$, dans la seconde et la troisième des relations (122), dans lesquelles on fera abstraction du membre intermédiaire, on obtiendra les deux égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{C^2m^2}(m\psi+n)^4 = \frac{\dfrac{1}{C^2C'^2m^2}}{\alpha^2(m\psi+n)^4}, \\ &\frac{1}{a^2}(m\psi+n)^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b) = \frac{4\alpha^2(m\psi+n)^2}{C^2C'^4}\frac{1}{a^2}\frac{[C'^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)-a^2]C'^4\operatorname{csh}^4(a\varpi+b)}{a^4\cdot\dfrac{4C'^4}{a^2}\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)\operatorname{snh}^2(a\varpi+b)}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant,

$$(124) \qquad C'^2 = \alpha^2 \qquad \text{et} \qquad 1 = \frac{\alpha^2}{C^2C'^2}\frac{C'^2\operatorname{csh}^2(a\varpi+b)-a^2}{a^2\operatorname{snh}^2(a\varpi+b)},$$

équations dont la seconde, étant multipliée par le facteur $\operatorname{snh}^2(a\varpi+b) = \operatorname{csh}^2(a\varpi+b) - 1$, pourra s'écrire, en tenant compte de la première,

$$\operatorname{csh}^2(a\varpi+b) - 1 = \frac{1}{C^2}\left[\frac{\alpha^2}{a^2}\operatorname{csh}^2(a\varpi+b) - 1\right],$$

et exigera dès lors pour être vérifiée, quel que soit ϖ, que l'on ait

$$\frac{\alpha^2}{C^2a^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{C^2} = 1, \qquad \text{ou} \qquad \alpha^2 = C^2a^2 \qquad \text{et} \qquad C^2 = 1,$$

c'est-à-dire qu'il faudra que l'on ait, en joignant ces deux conditions à la première (124), à la fois $C^2 = 1$, et $C'^2 = \alpha^2 = a^2$.

En reportant donc ces valeurs dans les expressions ci-dessus (123) de Φ, Ψ et $\frac{1}{\Pi}$, et y écrivant seulement, pour l'analogie des notations, c au lieu de $\mathfrak{C}$, celles-ci seront alors définitivement

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi(\varphi) = \operatorname{tang}(a\varphi + c), & \Psi(\psi) = \frac{1}{(m\psi+n)^2}, \\ &\frac{1}{\Pi} = \operatorname{csh}^2(a\varpi+b) - 1 = \operatorname{snh}^2(a\varpi+b), & \Pi(\varpi) = \frac{1}{\operatorname{snh}^2(a\varpi+b)}, \end{aligned}\right.$$

et par conséquent, en remettant ces expressions dans les équations (111) des trois familles de surfaces obtenues comme solution, les trois équations qui lient les coordonnées thermométriques φ, ψ, ϖ aux coordonnées rectilignes x, y, z seront, pour le Cas actuel,

$$(126)\qquad \frac{y}{x} = \text{tang}(a\varphi + c), \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{(m\psi + n)^2}, \quad \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{1}{\text{snh}^2(a\varpi + b)}.$$

Ce résultat est bien compris effectivement dans celui que nous eussions trouvé en rapportant isolément, par le procédé de Lamé (*), chaque famille de surfaces à son paramètre thermo-

(*) Les deux premières de ces équations (126) reproduisent bien effectivement les équations (69) et (75) de notre Chapitre II; quant à la troisième famille ϖ, il nous suffira de renvoyer aux calculs et aux résultats donnés par Lamé, dans ses *Leçons sur les Fonctions Inverses*, etc. (en rappelant que le paramètre thermométrique de toute famille de surfaces isolée comporte essentiellement les deux constantes arbitraires σ et τ), savoir, à l'équation (14) du § XVI (page 23), laquelle représentera une famille de cônes de révolution (comme limites d'hyperboloïdes à une nappe), si l'on y suppose la constante $c = 0$, et qui, en substituant les notations usuelles à celles introduites par Lamé quelques lignes plus haut, deviendra par cette hypothèse

$$\frac{x^2 + y^2}{\dfrac{1}{\text{csh}^2 \varepsilon}} - \frac{z^2}{\text{tgh}^2 \varepsilon} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{1}{\text{csh}^2 \varepsilon \,\text{tgh}^2 \varepsilon} = \frac{1}{\text{snh}^2 \varepsilon}.$$

Ces mêmes résultats coïncideront d'ailleurs tout aussi bien avec ceux formulés par l'équation (34) (page 54) du § XXXIII des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, si l'on a soin d'observer que, pour sa seconde famille ρ_1 (celle des cônes de révolution), Lamé prend pour paramètre géométrique la *latitude* qu'il appelle φ, et non la *colatitude* θ, ainsi qu'on le fait généralement pour le système sphérique, en sorte que, traduites avec la notation habituelle, l'équation de cette famille de surfaces et sa seconde équation (34) précitées seront respectivement les suivantes

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \text{tang}^2 \theta = \Pi(\varpi), \qquad a\varpi + b = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \log \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\theta,$$

lesquelles, pouvant s'écrire tout aussi bien

$$\Pi(\varpi) = (\text{tang}\, 2 \cdot \tfrac{1}{2}\theta)^2 = \left(\frac{2\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\theta}{1 - \text{tg}^2 \frac{1}{2}\theta}\right)^2, \qquad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta = e^{a\varpi + b},$$

donneront, par l'élimination de tang $\frac{1}{2}\theta$,

$$\Pi(\varpi) = \left(\frac{2e^{a\varpi+b}}{1 - e^{2(a\varpi+b)}}\right)^2 = \left(\frac{2}{e^{-(a\varpi+b)} - e^{a\varpi+b}}\right)^2 = \frac{1}{\text{snh}^2(a\varpi + b)},$$

résultat qui met de nouveau en évidence le parfait accord de notre calcul avec la théorie précitée de Lamé.

métrique, mais on voit, les coefficients constants de φ et de ϖ étant les mêmes, qu'il ne comporte que *cinq* constantes arbitraires seulement, au lieu de *six* qu'eût laissé subsister dans les résultats l'emploi du procédé de Lamé (savoir les deux constantes que nous avons appelées σ et τ pour chaque famille de surfaces), restriction essentielle, imposée cette fois par la connexité dans la question des trois familles de surfaces, dont n'eût pas tenu compte le calcul, plus simple et plus rapide peut-être, que nous venons de rappeler.

Comme dernier point concernant ce Cas des coordonnées sphériques, indiquons enfin, avant de passer au Cas suivant, la forme équivalente sous laquelle se présenteront les équations (126) auxquelles nous venons d'arriver comme solution, lorsqu'on les résoudra par rapport à x, y, z : formules qui résulteront immédiatement du rapprochement des valeurs (121) et (120), et de la première équation (119), lesquelles peuvent s'écrire

$$\left\{ x^2 = \Psi \frac{1}{1+\Phi^2} \frac{1}{\frac{1}{\Pi}+1}, \qquad y^2 = \Phi^2 x^2 = \Psi \frac{\Phi^2}{1+\Phi^2} \frac{1}{\frac{1}{\Pi}+1}, \qquad z^2 = \Psi \frac{\frac{1}{\Pi}}{\frac{1}{\Pi}+1}, \right.$$

avec les expressions qui précèdent (125), et seront par conséquent

$$x^2 = \frac{1}{(m\psi+n)^2} \frac{\cos^2(a\varphi+c)}{\text{snh}^2(a\varpi+b)+1}, \qquad y^2 = \frac{1}{(m\psi+n)^2} \frac{\sin^2(a\varphi+c)}{\text{snh}^2(a\varpi+b)+1},$$

$$z^2 = \frac{1}{(m\psi+n)^2} \frac{\text{snh}^2(a\varpi+b)}{\text{snh}^2(a\varpi+b)+1},$$

ou, en extrayant les racines,

$$(127) \quad x = \frac{\pm 1}{m\psi+n} \frac{\cos(a\varphi+c)}{\text{csh}(a\varpi+b)}, \qquad y = \frac{\pm 1}{m\psi+n} \frac{\sin(a\varphi+c)}{\text{csh}(a\varpi+b)}, \qquad z = \frac{\pm 1}{m\psi+n} \frac{\text{snh}(a\varpi+b)}{\text{csh}(a\varpi+b)}.$$

Nous indiquons dans la Note IV de l'Appendice qui termine ce Mémoire, comment on arrive encore à ce résultat par une double voie toute différente de celle-ci, en appliquant à ce même

Cas particulier défini par les hypothèses (103), deux méthodes de recherche, que nous développons dans le Chapitre V et dans la Note III précédente, en vue du Cas le plus général du problème.

SYSTÈMES DES COORDONNÉES CONIQUES EN GÉNÉRAL. CAS PARTICULIER DES COODONNÉES CONIQUES DU SECOND ORDRE. — V°. « *Deux des mêmes dérivées seulement sont supposées nulles* ». D'après la remarque déjà faite au commencement de cette discussion (page 141), ces deux dérivées appartiendront nécessairement chacune à un groupe différent, auquel cas l'équation (15) sera vérifiée dores et déjà, puisque, si on les supposait du même groupe, cette même équation (15) exigerait qu'il y en eût une troisième également nulle, appartenant à l'autre groupe, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Prenant donc arbitrairement $\frac{Q}{\varpi}$ pour l'une de ces dérivées, il y aura lieu, comme dans le Cas III°, d'examiner successivement les trois sous-cas suivants, selon la colonne verticale du tableau (12), à laquelle on empruntera la seconde dérivée.

1° « *Les deux dérivées qui sont nulles ne sont ni réciproques, ni conjuguées* »; c'est-à-dire que l'on a, par exemple,

$$(128)\qquad \frac{Q}{\varpi}=0 \quad \text{et} \quad \frac{R}{\psi}=0, \qquad \text{ou} \qquad Q=f_1(\varphi) \quad \text{et} \quad R=f_2(\varphi),$$

en vertu des conditions générales (8) ou (9).

Avec ces hypothèses, des trois équations du premier ordre (13), la première est dores et déjà vérifiée, et la seconde et la troisième se réduisent respectivement à

$$\frac{P}{\varpi}\left(Q\frac{R}{\varphi}-R\frac{Q}{\varphi}\right)=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{P}{\psi}\left(R\frac{Q}{\varphi}-Q\frac{R}{\varphi}\right)=0,$$

c'est-à-dire, en les divisant par les produits QR $\frac{P}{\varpi}$ ou QR $\frac{P}{\psi}$, dont tous les facteurs sont par hypothèse différents de zéro,

$$(129)\qquad \frac{1}{Q}\frac{Q}{\varphi}-\frac{1}{R}\frac{R}{\varphi}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{lQ}{\varphi}=\frac{lR}{\varphi}.$$

d'où l'on tirera en intégrant

$$(130)\qquad Q = C^2 R,$$

C désignant une simple constante, eu égard aux hypothèses (128).

D'autre part, quant au groupe du second ordre (19), la quantité G (18) se réduisant, dans le Cas actuel, par les hypothèses (128), simplement à la valeur

$$(131)\qquad G = P^2 \frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi},$$

la seconde et la troisième de ces trois équations (19) se réduiront dès lors, par ces mêmes hypothèses (128), respectivement aux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} 2PQR.P\frac{Q^2}{\varphi^2} &= 2RP^2\left(\frac{Q}{\varphi}\right)^2 + Q.P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi},\\ 2PQR.P\frac{R^2}{\varphi^2} &= 2P^2Q\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 + R.P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi},\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, en tenant compte de la valeur (130) déjà acquise de Q,

$$\left\{\begin{aligned} 2P.C^2R.R.P.C^4\frac{R^2}{\varphi^2} &= 2R.P^2\left(C^2\frac{R}{\varphi}\right)^2 + C^2R.P^2.C^2\frac{R}{\varphi}.\frac{R}{\varphi},\\ 2P.C^2R.R.P.\frac{R^2}{\varphi^2} &= 2P^2.C^2R.\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 + R.P^2.C^2\frac{R}{\varphi}.\frac{R}{\varphi},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, en supprimant les facteurs C^4RP^2 ou C^2RP^2, qui ne peuvent être nuls, qu'elles se réduiront l'une et l'autre à celle-ci

$$2R\frac{R^2}{\varphi^2} = 2\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad 2R\frac{R^2}{\varphi^2} - 3\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2 = 0,$$

équation de même forme que l'équation (106) déjà rencontrée à propos du Cas IV°, dont nous avons déduit par l'intégration, puis par la différentiation, les équations (113) et (114), et qui nous

fournira par conséquent, dans le Cas actuel, *mutatis mutandis*, pour l'expression cherchée de R,

$$(132)\qquad R=\frac{1}{c^2(\varphi+c')^2}\qquad \text{et}\qquad -\frac{1}{2}R^{-\frac{3}{2}}\frac{R}{\varphi}=c,$$

d'où nous tirerons ensuite, eu égard à la valeur (130) de Q,

$$(133)\qquad Q=\frac{C^2}{c^2(\varphi+c')^2}\qquad \text{et}\qquad \frac{1}{4}R^{-3}\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2=c^2.$$

Enfin la première de ces mêmes équations du second ordre (19) deviendra semblablement, en tenant compte des hypothèses (128) et de la valeur (131) de G, qui en est la conséquence, ainsi que de la valeur (130) de Q,

$$2P.C^2R.R\left(C^4R\frac{P^2}{\psi^2}+R\frac{P^2}{\varpi^2}\right)$$

$$=2\left[C^4R^3.R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2+C^2R.R^2\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2-P^3.C^2\frac{R}{\varphi}.\frac{R}{\varphi}\right]+P.P^2.C^2\frac{R}{\varphi}.\frac{R}{\varphi},$$

ou, en divisant par C^2R^3 et réduisant,

$$2P\left(C^2\frac{P^2}{\psi^2}+\frac{P^2}{\varpi^2}\right)=2\left[C^2\left(\frac{P}{\psi}\right)^2+\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right]-\frac{P^3}{R^3}\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2,$$

et enfin, en divisant de nouveau par P^3,

$$(134)\qquad \frac{2}{P^3}\left[C^2\left\{P\frac{P^2}{\psi^2}-\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right\}+P\frac{P^2}{\varpi^2}-\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right]=-\frac{1}{R^3}\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2,$$

ou, ce qui est la même chose, en ayant égard à la seconde relation ci-dessus (133),

$$(135)\qquad \frac{2}{P}\left(C^2\frac{d^2.lP}{d\psi^2}+\frac{d^2.lP}{d\varpi^2}\right)=-4c^2;$$

et par conséquent nous aurons définitivement, pour déterminer

notre troisième fonction inconnue P, l'équation du second ordre, linéaire en lP,

$$(136) \qquad C^2 \frac{d^2.lP}{d\psi^2} + \frac{d^2.lP}{d\varpi^2} + 2c^2P = 0,$$

qui se ramène au type connu sous le nom d'*équation de Liouville*, en y changeant simplement ϖ en $\frac{\varpi}{C}$, et dont l'intégrale générale peut, en conséquence, être présentée sous la forme (*) :

$$(136^{bis}) \qquad P = -\frac{4C^2}{c^2} \frac{F'_1(\psi + iC\varpi)\,F'_2(\psi - iC\varpi)}{\left[F_1(\psi + iC\varpi) + F_2(\psi - iC\varpi)\right]^2}.$$

(*) Si l'on pose, pour le calcul de cette intégrale seulement, $\psi = x$, $\varpi = y$, $lP = z$, cette équation (136), qui devient avec les notations d'usage

$$C^2 \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} + 2c^2e^z = 0 \qquad \text{ou} \qquad C^2r + t + 2c^2e^z = 0,$$

bien que rentrant alors dans le type linéaire étudié par Ampère, ne peut être intégrée par sa méthode, parce qu'elle n'admet pas d'intégrale intermédiaire, ainsi qu'on le reconnait aisément en cherchant à appliquer cette méthode ; et, d'autre part, la méthode de Laplace ne peut lui être appliquée non plus, attendu qu'elle est linéaire seulement par rapport aux dérivées, et non par rapport à l'inconnue z elle-même, comme l'exigerait cette dernière méthode.

Mais, si l'on divise cette même équation (136) par C, elle se confondra alors avec l'équation étudiée par Liouville (Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, avec notes de Liouville, *Note* IV, pp. 597-598).

$$\frac{d^2.l\lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2.l\lambda}{d\beta^2} \pm \frac{2\lambda}{a^2} = 0,$$

en y faisant simplement

$$(\alpha) \qquad \lambda = P, \qquad \alpha = \psi, \qquad \beta = C\varpi, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{a^2} = \frac{c^2}{C^2} \qquad \text{ou} \qquad a^2 = \frac{C^2}{c^2},$$

et prenant expressément le signe + à la place du double signe. Or, Liouville indique, comme intégrale de cette dernière équation, la solution, représentée à l'aide des variables auxiliaires

$$(\beta) \qquad u = \alpha + i\beta, \qquad v = \alpha - i\beta,$$

par l'expression

$$\lambda = \frac{4a^2\varphi'(u)\,\psi'(v).e^{\varphi(u)+\psi(v)}}{[1 \pm e^{\varphi(u)+\psi(v)}]^2},$$

Et l'on voit par là, avant d'aborder l'intégration du système (21), qu'aucune impossibilité essentielle, comme nous en avons rencontré à plusieurs reprises pour diverses hypothèses subsidiaires lors des Cas précédents, ne s'oppose jusqu'ici à ce que ce premier sous-cas donne naissance à une solution du problème (*).

Cela posé, les hypothèses (128) et la seconde relation (129) étant introduites dans le tableau (12) des courbures principales du système, montrent que les surfaces φ sont des sphères, et que les surfaces ψ et ϖ sont les unes et les autres des surfaces développables. Or, d'une part, toutes les sphères de la famille φ auront même centre, d'après notre Théorème II (page 118). D'autre part, les deux courbures $\frac{1}{R''_1}$ et $\frac{1}{R'_2}$, que l'on suppose nulles, étant encore dans ce Cas deux courbures *conjuguées en arc*, soit que l'on raisonne ainsi que nous l'avons déjà fait à propos du Cas précédent IV° (page 193), soit que l'on aime mieux invoquer,

laquelle peut être écrite encore, en la multipliant haut et bas par $e^{-2\varphi(u)}$,

$$\lambda = -4a^2 \frac{-\varphi'(u)\, e^{-\varphi(u)} . \psi'(v)\, e^{\psi(v)}}{[e^{-\varphi(u)} \pm e^{\psi(v)}]^2},$$

et qui dès lors, en faisant $e^{-\varphi(u)} = f_1(u)$ et $e^{\psi(v)} = f_2(v)$, et ne conservant que le signe supérieur seulement, peut tout aussi bien être présentée sous la forme à la fois plus simple et plus symétrique

$$\lambda = -4a^2 \frac{f'_1(u)\, f'_2(v)}{[f_1(u) + f_2(v)]^2},$$

laquelle, étant appliquée à l'équation en question (136) à l'aide du changement de notation susindiqué (α), fournirait pour P l'expression

$$P = -4 \frac{C^2}{c^2} \frac{F'_1(U)\, F'_2(V)}{[F_1(U) + F_2(V)]^2},$$

U et V étant alors ce que deviennent dans les mêmes conditions les quantités u et v de tout à l'heure, c'est-à-dire les nouvelles variables auxiliaires

$$U = \psi + iC\varpi, \qquad V = \psi - iC\varpi.$$

(*) On ne peut toutefois affirmer dès maintenant que cette solution existe en réalité, en raison de ce que les *trois* inconnues x, y, z sont astreintes à vérifier, comme nous l'avons vu par l'énoncé général du problème, un système de *six* équations aux dérivées partielles du premier ordre, et que rien ne montre à l'avance qu'il soit possible de satisfaire à une semblable condition.

comme lors du Cas III°, le Théorème I de Lamé [ou plus clairement la formule (32) de notre ***Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes*** (page 27), dont ce Théorème n'est que la traduction en langage ordinaire], on reconnaît alors très aisément, d'une façon comme de l'autre, que l'intersection des surfaces ψ et ϖ ne peut être qu'une droite passant par le centre commun des sphères, d'où il suit immédiatement que chacune de ces surfaces ne peut être qu'un cône ayant ce point pour sommet (*).

Mais on arriverait tout aussi facilement à la même conclusion par la voie exclusivement analytique, en partant de la double forme d'équation

$$(137) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda = \frac{1}{(\sigma\varphi + \tau)^2},$$

que nos équations générales (74) et (75) des familles isothermes de sphères assignent dans le Cas actuel à la famille φ, et des deux dernières équations de droite (21) qui expriment les conditions d'orthogonalité des deux familles ψ et ϖ avec cette troisième famille φ, équations équivalentes par conséquent à celles-ci

$$\frac{d\lambda}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\lambda}{dy}\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\lambda}{dz}\frac{d\psi}{dz} = 0, \qquad \frac{d\lambda}{dx}\frac{d\varpi}{dx} + \frac{d\lambda}{dy}\frac{d\varpi}{dy} + \frac{d\lambda}{dz}\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, en tenant compte de l'équation qui précède, aux équations linéaires du premier ordre

$$x\frac{d\psi}{dx} + y\frac{d\psi}{dy} + z\frac{d\psi}{dz} = 0, \qquad x\frac{d\varpi}{dx} + y\frac{d\varpi}{dy} + z\frac{d\varpi}{dz} = 0,$$

dont les intégrales, étant fournies par le système simultané

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \qquad \text{avec} \qquad d\psi = 0 \qquad \text{ou} \qquad d\varpi = 0,$$

(*) La solution rencontrée pour le Cas IV° à l'aide du raisonnement géométrique précité rentre en réalité, à titre de cas particulier, dans celle-ci, l'une des familles de cônes étant alors de révolution, et l'autre se réduisant à des plans qui n'en sont qu'une simple variété, du moment qu'ils peuvent être décrits par une droite issue d'un même point fixe.

seront par conséquent, comme lors du Cas précédent IV° (page 195),

$$\psi = f_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \qquad \varpi = f_2\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right),$$

et exprimeront dès lors analytiquement le même résultat que nous avons déjà énoncé tout à l'heure.

La solution du problème pour ce premier sous-cas se composant ainsi d'une famille de sphères concentriques, et de deux familles de cônes isothermes ayant pour sommet commun le centre des sphères, coïncide donc avec le système des *Coordonnées Coniques,* dont nous faisons usage sous le numéro V°, dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 150), mais encore avec la restriction que les deux familles de cônes soient toutes deux isothermes.

D'ailleurs, de même que pour le Cas antérieur III°, la première équation de gauche (21) sera vérifiée également, en partant de la forme d'équation (137) des surfaces φ, à l'aide d'une simple identification, car cette dernière, pouvant être écrite sous forme abrégée

$$(138) \qquad r^2 = \frac{1}{(\sigma\varphi + \tau)^2} \qquad \text{ou} \qquad \sigma\varphi + \tau = \frac{1}{r},$$

en faisant

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r},$$

donnera, par la différentiation, les valeurs

$$\sigma\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \sigma\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{y}{r^3}, \qquad \sigma\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{z}{r^3};$$

d'où l'on conclura, en élevant au carré et ajoutant,

$$\sigma^2\Delta_1^2\varphi = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6} = \frac{1}{r^4},$$

et enfin, en ayant égard de nouveau à cette équation (138) elle-même,

$$(139)\qquad \Delta_1\varphi = \frac{1}{\sigma r^2} = \frac{1}{\sigma}(\sigma\varphi + \tau)^2 = \sigma\left(\varphi + \frac{\tau}{\sigma}\right)^2.$$

Et dès lors, si dans l'équation précitée [la première de gauche (21)], qui, eu égard à la relation (130), peut, dans le cas actuel, être écrite plus simplement

$$(140)\qquad \Delta_1^2\varphi = \frac{1}{QR} = \frac{1}{C^2R^2} \qquad \text{ou} \qquad \Delta_1\varphi = \frac{1}{CR},$$

on y remet, sous la dernière forme, l'expression précédente (139) de $\Delta_1\varphi$ en même temps que celle (132) de R, elle sera dès lors, pour le Cas actuel,

$$\sigma\left(\varphi + \frac{\tau}{\sigma}\right)^2 = \frac{c^2}{C}(\varphi + c')^2,$$

et n'exprimera par conséquent autre chose que les deux relations entre les constantes, nécessaires pour la rendre identique, savoir

$$\sigma = \frac{c^2}{C} \qquad \text{et} \qquad \frac{\tau}{\sigma} = c', \qquad \text{ou} \qquad \tau = \sigma c' = \frac{c^2c'}{C},$$

relations qui détermineront à volonté, soit les constantes σ et τ, si l'on se donne c et c', soit inversement c et c', si l'on prend arbitrairement σ et τ.

Comme conséquence de ce calcul qu'il importe de noter, la simple comparaison de la dernière valeur (140) et de la première (139) nous permettra, eu égard à la valeur que nous venons de trouver pour σ, de récrire l'équation de la famille φ, au lieu du type (138), sous cette nouvelle forme

$$(141)\qquad \frac{1}{CR} = \frac{1}{\sigma r^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{r^2}{R} = \frac{C}{\sigma} = \frac{C}{\frac{c^2}{C}} = \frac{C^2}{c^2},$$

laquelle nous sera fort utile, comme on le verra tout à l'heure.

De même que dans le Cas déjà cité III° relatif au système cylindrique, la moitié du système (21), composée des trois mêmes équations, est donc encore déjà satisfaite dans le Cas actuel par la détermination complète que nous venons d'effectuer de la première famille φ, et de la définition seulement du genre ou de la catégorie géométrique des deux autres familles ψ et ϖ, et par conséquent le rôle des trois autres équations consistera encore uniquement à compléter, ainsi que nous allons le faire à présent, la définition de ces deux familles de cônes, par la détermination précise des deux fonctions inconnues ψ et ϖ, ou, ce qui revient au même au point de vue géométrique, à déterminer exactement les équations des traces des deux familles de cônes sur l'une quelconque des sphères de la famille φ, soit, par exemple, la sphère de rayon 1.

Or, sur ces trois équations restantes, deux étant toujours comme alors les deux de droite (48), si on les divise encore par R, et que l'on ait égard en même temps à la relation (130), on voit que nos deux inconnues ψ et ϖ seront cette fois astreintes à vérifier, à la place du système (49), le suivant, dans lequel R et P représentent, pour abréger, les expressions (132) et (136bis),

$$(142)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2=C^2\left[\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varpi}{dz}\right)^2\right]=\frac{1}{RP},\\ &\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varpi}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{d\varpi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}\frac{d\varpi}{dz}=0.\end{aligned}\right.$$

Toutefois ce dernier système n'est pas encore, en l'état actuel, propre à la détermination des deux inconnues ψ et ϖ qui nous reste à effectuer, attendu qu'eu égard à la valeur précitée de R, il contient la variable φ, dont les inconnues en question sont, en tant que coordonnées, essentiellement indépendantes : circonstance qui s'explique aisément par ce fait, que le but géométrique de la recherche actuelle étant, comme nous l'avons dit tout à l'heure, la détermination de la trace des deux familles de cônes sur une sphère ayant pour centre leur sommet commun, les variables indépendantes naturelles de la question sont évi-

demment les deux angles θ et ω des coordonnées sphériques, et non pas les coordonnées rectilignes x, y, z qui figurent dans le système que nous venons de poser.

Adoptant donc, comme imposé en quelque sorte par la question elle-même, le système des coordonnées sphériques, pour lequel on a, comme nous l'avons déjà remarqué au Chapitre II, dans la note de la page 41,

$$\Delta_1^2 r = 1, \qquad \Delta_1^2 \omega = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \qquad \Delta_1^2 \theta = \frac{1}{r^2},$$

et qui donnera par conséquent, pour l'expression de l'invariant Δ_1 d'une fonction de point quelconque V, en faisant $\omega = V$, $\varphi = r$, $\psi = \omega$, $\varpi = \theta$, dans la formule (2) de notre Chapitre I,

$$\Delta_1^2 V = \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\left(\frac{dV}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2,$$

nous aurons dans le cas actuel, ψ et ϖ étant tous deux, par hypothèse, indépendants de r ou φ, pour ces deux inconnues,

$$\Delta_1^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\left[\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2\right],$$

$$\Delta_1^2 \varpi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\left[\left(\frac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varpi}{d\theta}\right)^2\right].$$

En remettant donc ces valeurs dans les deux premières équations (142), et les multipliant en même temps par $r^2 \sin^2 \theta$, celles-ci deviendront, d'une part,

$$(143) \qquad \left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2 = C^2\left[\left(\frac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varpi}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{r^2}{R} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{P},$$

et l'on voit, en ayant égard à la dernière valeur (141) trouvée un peu plus haut pour le rapport $\frac{r^2}{R}$, ainsi qu'aux hypothèses (128), qu'elles ne contiendront plus cette fois, avec les variables θ et ω, que les inconnues ψ et ϖ, et non plus la variable φ, comme tout à l'heure.

D'autre part, chacune des deux familles ψ et ϖ étant représentée en coordonnées sphériques par une équation de la forme (35) du Chapitre II, si nous convenons de distinguer par les indices 1 et 2 les dérivées par rapport à ω correspondant à chacune de ces équations des deux familles, la condition qui exprimera l'orthogonalité de ces deux familles de cônes sera

$$(144) \qquad 1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_1 \left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_2 = 0,$$

ainsi que nous le montrons dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (pp. 150-151), équation dans laquelle les deux dérivées qui y figurent sont celles qui résulteraient de la différentiation par rapport à ω de chacune des équations précitées des deux familles, c'est-à-dire celles dont les valeurs, étant fournies par les équations

$$\frac{d\psi}{d\omega} + \frac{d\psi}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_1 = 0, \qquad \frac{d\varpi}{d\omega} + \frac{d\varpi}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_2 = 0,$$

seraient par conséquent

$$\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_1 = -\frac{\dfrac{d\psi}{d\omega}}{\dfrac{d\psi}{d\theta}}, \qquad \left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_2 = -\frac{\dfrac{d\varpi}{d\omega}}{\dfrac{d\varpi}{d\theta}}.$$

En reportant donc ces deux valeurs dans la condition d'orthogonalité (144), puis la multipliant par $\sin^2\theta \, . \, \frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\varpi}{d\theta}$, on obtiendra par là, transformée en coordonnées sphériques, la troisième équation (142); et dès lors, si nous la joignons aux deux précédentes (143) qui représentent les deux premières (142), en tenant compte de la dernière valeur (141), nous aurons maintenant, pour déterminer nos deux inconnues ψ et ϖ, le système formé des deux équations

$$(145) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\dfrac{d\psi}{d\theta}\right)^2 = C^2\left[\left(\dfrac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\dfrac{d\varpi}{d\theta}\right)^2\right] = \dfrac{C^2}{c^2}\dfrac{\sin^2\theta}{P}. \\ \dfrac{d\psi}{d\omega}\dfrac{d\varpi}{d\omega} + \sin^2\theta\dfrac{d\psi}{d\theta}\dfrac{d\varpi}{d\theta} = 0, \end{cases}$$

dans lequel P représente toujours par hypothèse la fonction de ψ et ϖ (136bis), et qui déterminera, comme nous l'avons dit un peu plus haut, les deux familles de cônes par leurs traces sur l'une quelconque des sphères de la famille φ, de même que, dans le Cas précité III°, le système analogue (49) définissait les deux familles de cylindres ψ et ϖ au moyen de leurs sections droites par un plan quelconque de la famille φ (*).

Nous intégrerons encore aisément ce dernier système, si nous nous reportons aux résultats et employons de nouveau les procédés de deux calculs antérieurs, qui offrent avec la question actuelle une connexité évidente.

En effet, tout d'abord si l'on se rappelle que, pour le problème de l'isothermie traité dans notre Chapitre II, la simple substitution, à la place de la coordonnée sphérique θ, de la coordonnée thermométrique correspondante, savoir

$$(146) \qquad \chi = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta,$$

nous a permis de ramener en fait le problème relatif aux familles de cônes à celui relatif aux familles de cylindres, en rendant identiques, sauf la dénomination des variables indépendantes, les deux équations aux dérivées partielles (33) et (38), ou leurs intégrales générales (34) et (39), relatives à ces deux cas; guidés par ce précédent, disons-nous, nous serons tout naturellement conduits à effectuer la même substitution de variables dans le système proposé (145), à l'aide des formules suivantes, qui résultent immédiatement de la définition précédente (146) :

(*) Ce rapprochement est important, parce qu'en montrant que la première question n'est manifestement qu'un cas-limite de la seconde (savoir celui où, après avoir fixé la sphère considérée par un des points communs aux deux traces, on imagine ensuite que son rayon grandisse indéfiniment), il révèle par là même une connexité intime entre les deux Cas, laquelle laisse soupçonner l'*identité* complète, qui existe en réalité, du problème analytique correspondant à ces deux Cas, et met dès lors sur la voie de la réduction pure et simple des formules relatives au second à celles déjà rencontrées pour le premier, qui est évidemment dans ces conditions le moyen le plus simple et le plus rapide de résoudre la question.

$$(147)\quad \begin{cases} d\chi = \dfrac{d\theta}{\sin\theta}, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = e^{\chi}, \quad \sin\frac{1}{2}\theta = \dfrac{\pm e^{\chi}}{\sqrt{1+e^{2\chi}}}, \quad \cos\frac{1}{2}\theta = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+e^{2\chi}}}, \\ \sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = \dfrac{2e^{\chi}}{1+e^{2\chi}} = \dfrac{2}{e^{\chi}+e^{-\chi}} = \dfrac{1}{\operatorname{csh}\chi}, \\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\chi}} = \dfrac{\sqrt{\operatorname{csh}^2\chi-1}}{\pm\operatorname{csh}\chi} = \pm\dfrac{\operatorname{snh}\chi}{\operatorname{csh}\chi}. \end{cases}$$

Et si, conjointement avec cette opération, nous remettons en même temps l'expression (136bis) à la place de P, qui en tenait lieu par hypothèse, alors ce même système se transformera dans le suivant

$$(148)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \left(\dfrac{d\psi}{d\chi}\right)^2 = C^2\left[\left(\dfrac{d\varpi}{d\omega}\right)^2 + \left(\dfrac{d\varpi}{d\chi}\right)^2\right] = -\dfrac{1}{4}\dfrac{[F_1(\psi+iC\varpi)+F_2(\psi-iC\varpi)]^2}{F'_1(\psi+iC\varpi)F'_2(\psi-iC\varpi)}\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\chi}, \\ \dfrac{d\psi}{d\omega}\dfrac{d\varpi}{d\omega} + \dfrac{d\psi}{d\chi}\dfrac{d\varpi}{d\chi} = 0, \end{cases}$$

qui est bien effectivement identique, comme forme, au système (49) relatif au Cas III°, sauf la dénomination des variables indépendantes et de la constante, et aussi l'expression de la fonction qui constitue le troisième membre de la première ligne.

Or, pour ce même système (49), nous avons eu soin de faire observer (pp. 169-170) que la forme de la solution (73) ou (72) étant exclusivement fournie par la première et la dernière de ces trois équations, on pouvait considérer l'équation intermédiaire comme destinée uniquement à fournir une relation réversible entre les fonctions arbitraires F_1 et F_2, qui n'entrent que dans cette seule équation d'une part, et d'autre part les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ qui figurent dans cette solution (73). Il résulte donc immédiatement de là pour le Cas actuel, en premier lieu, ***mutatis mutandis***, qu'en faisant d'abord abstraction de l'équation intermédiaire, la solution la plus générale des deux autres de ces équations (148) consistera présentement dans les deux équations

$$(148^{bis})\quad \begin{cases} \psi = \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(\omega - i\chi) + \mathcal{F}_2(\omega + i\chi)\right], \\ \varpi = \dfrac{1}{2iC}\left[\mathcal{F}_1(\omega - i\chi) - \mathcal{F}_2(\omega + i\chi)\right], \end{cases}$$

$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant encore deux fonctions imaginaires, arbitraires sous la condition d'être respectivement conjuguées, c'est-à-dire du type (68), lesquelles donneront encore inversement (en faisant dans les formules (65) les mêmes changements que tout à l'heure),

$$(149)\quad \begin{cases} \omega = \frac{1}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) + f_2(\psi - iC\varpi)\right], \\ \chi = \frac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right], \end{cases}$$

les fonctions f, respectivement inverses des précédentes $\mathcal{F}$, étant de nouveau deux fonctions imaginaires conjuguées.

Cela posé, si, pour conserver l'analogie des notations avec le Cas précité, nous faisons cette fois

$$(149^{\text{bis}})\qquad u = \omega - i\chi, \qquad v = \omega + i\chi, \qquad U = \psi + iC\varpi, \qquad V = \psi - iC\varpi,$$

d'une part il est bien clair que les deux derniers systèmes (148bis) et (149) établiront de nouveau entre ces variables les deux systèmes d'équations réciproques (70) et (71), ou (84) et (83), qui entraineront encore entre les dérivées des fonctions inverses f et $\mathcal{F}$ les mêmes relations (85); et, d'autre part, la première des formules (148bis) et la seconde des formules (149) redevenant avec ces notations

$$\psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right], \qquad \chi = \frac{i}{2}\left[f_1(U) - f_2(V)\right],$$

la première donnera de nouveau, comme lors des équations (80),

$$\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^2 = \frac{1}{4}\left\{\left[\mathcal{F}'_1(u) + \mathcal{F}'_2(v)\right]^2 - \left[\mathcal{F}'_1(u) - \mathcal{F}'_2(v)\right]^2\right\}$$
$$= \mathcal{F}'_1(u)\,\mathcal{F}'_2(v) = \frac{1}{f'_1(U)}\,\frac{1}{f'_2(V)}.$$

Et dès lors, la seconde des équations proposées (148), c'est-à-dire celle obtenue en égalant dans la première ligne le premier

membre au troisième, que nous avions tout à l'heure laissée de côté, devenant, en y substituant cette dernière valeur, ainsi que l'expression précédente de x,

$$\frac{1}{f_1'(U)f_2'(V)} = -\frac{1}{4}\frac{[F_1(U)+F_2(V)]^2}{F_1'(U)F_2'(V)\,\mathrm{csh}^2\frac{i}{2}[f_1(U)-f_2(V)]},$$

si l'on tient compte de la définition : csh z = cos iz, d'où : csh iz = cos $(-z)$ = cos z, on voit ainsi qu'il sera nécessaire et suffisant, pour que cette seconde équation (148) soit satisfaite à son tour, qu'étant données arbitrairement les deux fonctions F_1 et F_2, qui n'entrent encore que dans cette seule équation, l'on puisse toujours déterminer deux autres fonctions f_1 et f_2, telles que l'on ait identiquement

$$(150)\qquad \frac{\frac{1}{4}f_1'(U)f_2'(V)}{\cos^2\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]} = -\frac{F_1'(U)F_2'(V)}{[F_1(U)+F_2(V)]^2},$$

relation encore évidemment réversible, qui pourra tout aussi bien, si elle admet une solution, servir alors à déterminer les fonctions F_1 et F_2 en se donnant arbitrairement les fonctions f_1 et f_2 ou leurs inverses $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

La question étant désormais posée en ces termes, cette dernière équation (150) pourra s'écrire tout d'abord, en intervertissant les deux membres, ainsi qu'il suit

$$\frac{d}{dU}\left[\frac{F_2'(V)}{F_1(U)+F_2(V)}\right] = \frac{d}{dU}\left[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)].\tfrac{1}{2}f_2'(V)\right],$$

puis cela fait, comme on aura simultanément

$$\left\{\begin{aligned} \frac{F_2'(V)}{F_1(U)+F_2(V)} &= \frac{d.l}{dV}[F_1(U)+F_2(V)],\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)].\tfrac{1}{2}f_2'(V) &= \frac{-\sin\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]}{\cos\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]}\left[-\tfrac{1}{2}f_2'(V)\right]\\ &= \frac{d.l}{dV}\cos\tfrac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)],\end{aligned}\right.$$

l'équation précédente, qu'il s'agit d'identifier, équivaudra dès lors à la suivante

$$\frac{d}{dU}\left(\frac{dl}{dV}\left[F_1(U)+F_2(V)\right]\right)=\frac{d}{dU}\left(\frac{dl}{dV}\cos\tfrac{1}{2}\left[f_1(U)-f_2(V)\right]\right),$$

c'est-à-dire, sous forme plus simple, à celle-ci

$$\frac{d^2.l}{dUdV}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]}{F_1(U)+F_2(V)}\right)=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$l\left(\frac{\cos\frac{1}{2}[f_1(U)-f_2(V)]}{F_1(U)+F_2(V)}\right)=l\mathfrak{f}_1(U)+l\mathfrak{f}_2(V)$$

ou

$$\cos\tfrac{1}{2}\left[f_1(U)-f_2(V)\right]=\mathfrak{f}_1(U)\mathfrak{f}_2(V)\left[F_1(U)+F_2(V)\right].$$

Or, comme, étant développée, cette dernière équation devient elle-même

$$\cos\tfrac{1}{2}f_1(U).\cos\tfrac{1}{2}f_2(V)+\sin\tfrac{1}{2}f_1(U).\sin\tfrac{1}{2}f_2(V)$$
$$=\mathfrak{f}_1(U)F_1(U).\mathfrak{f}_2(V)+\mathfrak{f}_1(U).\mathfrak{f}_2(V)F_2(V),$$

on voit qu'il suffira, pour procurer l'identification demandée, de prendre à la fois

$$\left\{\begin{array}{ll}\cos\frac{1}{2}f_1(U)=\mathfrak{f}_1(U)F_1(U), & \cos\frac{1}{2}f_2(V)=\mathfrak{f}_2(V),\\ \sin\frac{1}{2}f_2(V)=\mathfrak{f}_2(V)F_2(V), & \sin\frac{1}{2}f_1(U)=\mathfrak{f}_1(U),\end{array}\right.$$

conditions qui détermineront successivement, d'abord les fonctions f lorsque l'on se donnera les fonctions F, ou inversement, puis les fonctions auxiliaires $\mathfrak{f}$ elles-mêmes, si on les remplace par les combinaisons manifestement équivalentes

$$(150^{bis})\qquad \begin{array}{ll}\cot\frac{1}{2}f_1(U)=F_1(U), & \tan\frac{1}{2}f_2(V)=F_2(V),\\ \mathfrak{f}_1(U)^2\left[1+F_1(U)^2\right]=1, & \mathfrak{f}_2(V)^2\left[1+F_2(V)^2\right]=1.\end{array}$$

Soit donc que l'on se donne les fonctions f ou les fonctions F, les deux premières de ces équations fourniront les deux autres fonctions cherchées, qui procurent l'identification des deux expressions proposées (150). Si l'on tient à le vérifier, il suffira d'observer que l'on déduit immédiatement de ces équations (150bis)

$$\left\{\begin{aligned} F_1'(U) &= \frac{-\frac{1}{2} f_1'(U)}{\sin^2 \frac{1}{2} f_1(U)}, \qquad F_2'(V) = \frac{\frac{1}{2} f_2'(V)}{\cos^2 \frac{1}{2} f_2(V)}, \\ F_1(U) + F_2(V) &= \frac{\cos \frac{1}{2} f_1(U)}{\sin \frac{1}{2} f_1(U)} + \frac{\sin \frac{1}{2} f_2(V)}{\cos \frac{1}{2} f_2(V)} = \frac{\cos \frac{1}{2} [f_1(U) - f_2(V)]}{\sin \frac{1}{2} f_1(U) \cos \frac{1}{2} f_2(V)}, \end{aligned}\right.$$

valeurs qui, étant remises dans la première des deux expressions en question, rendent dès lors manifeste l'identification demandée, et par conséquent aussi la vérification de l'équation restante (148). D'où l'on voit que la solution la plus générale de ce système proposé (148) est bien représentée par les deux équations (148bis) ou (149), les deux fonctions imaginaires $\mathcal{F}$ ou f demeurant arbitraires sous la condition d'être, ainsi que nous l'avons dit, respectivement conjuguées.

Sous une autre forme plus simple et plus rapide, les trois fonctions inconnues Q, R et φ étant déjà déterminées par les trois équations (133), (132), et (137), si l'on n'effectue pas tout d'abord l'intégration de l'équation (136), et que l'on intervertisse de nouveau, comme nous l'avons fait en premier lieu pour ce même Cas III°, les inconnues et les variables indépendantes, on obtiendra, à la place du système précédent (148), le suivant

$$(151) \quad \left\{\begin{aligned} & C^2 \left[\left(\frac{d\omega}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{d\psi}\right)^2\right] = \left(\frac{d\omega}{d\varpi}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{d\varpi}\right)^2 = c^2 P \operatorname{csh}^2 \chi, \\ & \frac{d\omega}{d\psi}\frac{d\omega}{d\varpi} + \frac{d\chi}{d\psi}\frac{d\chi}{d\varpi} = 0, \end{aligned}\right.$$

déduit immédiatement du système analogue (51), en y faisant simplement la substitution de variables, de constante et de

fonction déjà opérée tout à l'heure, savoir en y écrivant pour inconnues ω et χ au lieu de x et y, au premier membre de la première ligne C comme coefficient au lieu de c, et enfin au troisième membre la fonction c^2P csh$^2\,\chi$ à la place de la fonction C'^2P, ainsi qu'il résulte de l'expression (46) de P relative à ce Cas IIIe (*). Alors, si, comme dans la Note de la page 166, on y regarde la fonction P comme inconnue, l'ensemble de ces équations et de l'équation précitée (136) formera un système surabondant de quatre équations entre les trois inconnues restantes P, ω, et χ, et les variables indépendantes ψ et ϖ, pour lequel il sera loisible, comme toujours, de choisir, à sa plus grande commodité, l'ordre dans lequel on déterminera successivement ces inconnues. Or, la première et la troisième des équations précédentes (151) déterminent à elles seules, ainsi que nous l'avons vu, les inconnues ω et χ sous la forme [déduite, toujours par le même changement susindiqué, de la solution (67)]

$$(152)\qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) + f_2(\psi - iC\varpi)\right], \\ \chi &= \frac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right], \end{aligned} \right.$$

ces expressions devant encore être toutes deux réelles, car, pour la seconde inconnue χ, la coordonnée sphérique θ variant par définition entre 0 et π seulement, sa valeur de définition (146) est bien toujours réelle, d'où il suit que les deux fonctions f_1 et f_2, qui sont d'ailleurs évidemment, eu égard au calcul effectué pour le Cas précédent (page 168), les fonctions inverses des fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ devront être encore, comme elles, deux fonctions imaginaires conjuguées.

En se servant donc de ces valeurs déjà acquises, la seconde

(*) Tels sont bien, en effet, les changements qu'il faut opérer pour que le troisième membre de la première ligne (49), qui, d'après l'expression (46), est égal à $\frac{c^2}{C'^2 P}$, redonne le membre correspondant des équations (148) ou (145), qui est $\frac{C^2}{c^2 P \,\mathrm{csh}^2 \chi}$.

des mêmes équations (151) donnera dès lors

$$(153)\qquad \begin{cases} P = \dfrac{C^2}{c^2}\left[\left(\dfrac{d\omega}{d\psi}\right)^2 + \left(\dfrac{d\chi}{d\psi}\right)^2\right]\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2\chi} \\ \quad = \dfrac{C^2}{c^2}\,\dfrac{f_1'(\psi + iC\varpi)\,f_2'(\psi - iC\varpi)}{\operatorname{csh}^2\dfrac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right]}, \end{cases}$$

et il sera nécessaire et suffisant, par conséquent, pour que les expressions (152) fournissent la solution du problème, que cette dernière expression de P vérifie la quatrième équation du système spécifié tout à l'heure, à savoir l'équation (136). Or, il est bien facile de s'assurer que cette dernière condition sera toujours remplie, de quelque façon que l'on prenne les fonctions arbitraires f_1 et f_2.

Le procédé le plus simple pour le voir sera d'effectuer cette vérification, non pas sur l'équation (136) dans sa forme actuelle, mais sur la même équation transformée, en y prenant pour variables indépendantes, à la place de ψ et ϖ, les fonctions linéaires U et V (149[bis]), savoir

$$(154)\qquad U = \psi + iC\varpi, \qquad\qquad V = \psi - iC\varpi,$$

qui, d'après un théorème connu, donneront lieu, pour la transformation des dérivées, aux formules symboliques

$$\frac{d^n}{d\psi^n} = \left[\frac{d}{dU} + \frac{d}{dV}\right]^n, \qquad\qquad \frac{d^n}{d\varpi^n} = \left[iC\left(\frac{d}{dU} - \frac{d}{dV}\right)\right]^n,$$

en sorte que, pour $n = 2$, cette équation (136) se transformera immédiatement dans la suivante :

$$(155)\qquad \frac{d^2\, lP}{dU dV} = -\frac{c^2}{2C^2}P.$$

Or, de la valeur proposée (153) de P, qui sera devenue, étant

écrite à l'aide des variables (154),

$$P = \frac{C^2}{c^2} \frac{f'_1(U) f'_2(V)}{\operatorname{csh}^2 \frac{i}{2}[f_1(U) - f_2(V)]}, \tag{156}$$

on déduira successivement

$$\left\{ \begin{aligned} lP &= l\frac{C^2}{c^2} + lf'_1(U) + lf'_2(V) - 2l \operatorname{csh}\frac{i}{2}[f_1(U) - f_2(V)], \\ \frac{d.lP}{dU} &= \frac{f''_1(U)}{f'_1(U)} - 2\frac{\operatorname{snh}\frac{i}{2}[f_1(U) - f_2(V)]}{\operatorname{csh}\frac{i}{2}[f_1(U) - f_2(V)]} \cdot \frac{i}{2} f'_1(U), \\ &= F(U) - \operatorname{tgh}\frac{i}{2}[f_1(U) - f_2(V)].if'_1(U), \\ \frac{d^2.lP}{dUdV} &= \frac{d}{dV}\left(\frac{d.lP}{dU}\right) = -\frac{-\frac{i}{2} f'_2(V)}{\operatorname{csh}^2\frac{i}{2}[f_1(U) - f_2(V)]} \cdot if'_1(U), \end{aligned} \right.$$

et le simple rapprochement de la dernière de ces valeurs avec l'expression précédente (156) de P rend dès lors manifeste la vérification de l'équation (155) ou (136), qui était exigée par cette seconde manière de poser la question (*).

(*) Outre le rôle qu'elles jouent ainsi dans les calculs qui précèdent pour la solution complète de la question, ces expressions de P nous paraissent intéressantes à cet autre point de vue qu'elles semblent infirmer, ainsi que l'expression (46) de P relative au Cas III°, une sorte de proposition analytique, énoncée par Lamé sans démonstration (*Coord. Curv.*, § LVI, page 100, dernier alinéa), à savoir que pour tout système triplement isotherme les expressions des trois fonctions P, Q, R étaient nécessairement de la forme

$$P = \alpha[\Psi(\psi) - \Pi(\varpi)], \qquad Q = \beta[\Pi(\varpi) - \Phi(\varphi)], \qquad R = \gamma[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)],$$

(α, β, γ étant trois constantes égales à ± 1), ou tout au moins en ce qu'elles appellent de nouvelles recherches tendant à établir si, oui ou non, ces expressions (46) et (136bis) ou (153) sont effectivement comprises, soit à titre de cas particuliers, soit à titre de cas-limites, dans les dites formules de Lamé, et dans l'affirmative pour quelles formes particulières des fonctions Φ, Ψ, Π on pourrait les y faire rentrer : faute de quoi, les expressions en question constitueraient de véritables solutions singulières non

Nous avons tenu cette fois encore à résoudre le problème analytique tel qu'il avait été posé par Lamé, et sans nous départir un seul instant des méthodes indiquées par l'illustre créateur du Système triplement Isotherme; sinon, nous eussions pu, comme pour le Cas analogue relatif aux cylindres, obtenir beaucoup plus rapidement les mêmes résultats, en ayant recours de nouveau à la même interprétation géométrique des équations restant à intégrer, qui nous a fourni déjà pour ce Cas, comme on l'a vu, la solution complète de la question avec une facilité beaucoup plus grande.

En effet, de même que pour le Cas précité, une fois obtenues les expressions des trois fonctions P, Q, R, le système (21) se partageant encore, ainsi que nous l'avons remarqué, en deux moitiés, composées chacune des mêmes équations, dont l'une est déjà satisfaite par la seule désignation que nous avons reconnue nécessaire de la nature des familles composant le système, à savoir une famille de sphères concentriques et deux familles de cônes ayant pour sommet commun le centre des sphères, il est bien clair que l'autre moitié du système en question ne saurait exprimer géométriquement autre chose que ce triple fait, savoir que ces deux familles de cônes sont individuellement isothermes, et de plus orthogonales entre elles. Et nous nous sommes assuré par un calcul direct, à propos du Cas des cylindres, que ce second mode de résoudre le problème conduisait bien exactement à la même solution que le premier, seul strictement conforme à la méthode et aux idées générales indiquées par Lamé.

Or, si l'on adopte de nouveau pour ce second calcul, comme il est naturel, à la place des coordonnées rectilignes, les variables indépendantes ω et χ, à l'aide desquelles, lors du problème géné-

---

moins importantes des équations générales du problème, dont Lamé ne fait pas mention, et dont on ne peut se dispenser de tenir compte. [Voir également, si l'on veut, pour plus de détails, la note de la page 187 de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes*, etc., dans lequel nous avions cru pouvoir nous baser sans contrôle sur cette proposition, pour résumer en une formule unique les résultats de nos recherches sur les lignes géodésiques des surfaces susceptibles de faire partie d'un semblable système].

ral de l'isothermie traité dans notre Chapitre II, nous avons déjà rendu identiques, quant à la forme, les équations tant différentielles qu'intégrales, propres aux cylindres et celles relatives aux cônes, la dernière des conditions que nous venons de dire (celle de l'orthogonalité) étant dès lors exprimée, comme dans le calcul précédent, par la troisième équation (148), les deux premières, relatives à l'isothermie des familles ψ et ϖ, seront exprimées par ailleurs par deux équations de la forme (38) du dit Chapitre II, que nous avons donnée à l'équation $\Delta_2\lambda = 0$ pour les familles de cônes. L'ensemble des trois équations restantes du système (21), spécifiées tout à l'heure, savoir la première de droite et les deux dernières de gauche, sera donc, d'après ce qui précède, complètement équivalent au système suivant du second ordre entre les deux inconnues ψ et ϖ

$$(157)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2\psi}{d\omega^2} + \dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} = 0, \qquad \dfrac{d^2\varpi}{d\omega^2} + \dfrac{d^2\varpi}{d\chi^2} = 0, \\ \dfrac{d\psi}{d\omega}\dfrac{d\varpi}{d\omega} + \dfrac{d\psi}{d\chi}\dfrac{d\varpi}{d\chi} = 0, \end{array} \right.$$

identique, sauf la dénomination des variables, au système déjà traité (74), relatif aux cylindres. La solution la plus générale du problème actuel sera donc encore représentée, d'après le calcul effectué pour le Cas en question, par les mêmes expressions (79), où la constante k et les variables auxiliaires u et v auront cette fois pour valeurs, à la place des quantités (82) et (69), celles-ci

$$(157^{bis})\qquad k = iC, \qquad u = \omega - i\chi, \qquad v = \omega + i\chi,$$

et consistera par conséquent dans les deux expressions

$$(158)\quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(\omega - i\chi) + \mathcal{F}_2(\omega + i\chi)\right], \\ \varpi = \dfrac{1}{2iC}\left[\mathcal{F}_1(\omega - i\chi) - \mathcal{F}_2(\omega + i\chi)\right], \end{array} \right.$$

dans lesquelles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ désigneront encore deux fonctions imaginaires conjuguées, complètement arbitraires d'ailleurs.

En effet, bien que le système du second ordre (157), ainsi fourni directement par des considérations géométriques évidentes, doive être envisagé *a priori* comme plus large que le système du premier ordre (148) primitivement posé entre les mêmes variables, et qu'il semble par conséquent de nouveau que l'on soit tenu de restreindre actuellement la solution (158) par la condition de satisfaire encore à ces trois équations (148) elles-mêmes, il se trouve que cette condition n'introduit en réalité aucune restriction, par suite de la forme particulière de ce système (148), et notamment de celle de l'expression qui constitue le troisième membre de la première ligne de ce système, laquelle résulte directement de la valeur de la fonction P relative à la question actuelle. Car nous avons reconnu déjà, d'une part, *mutatis mutandis*, par le calcul analogue relatif aux cylindres (pp. 173-174), que ces dernières expressions (158) de ψ et ϖ vérifiaient, quelles que fussent $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ la première et la dernière de ces équations (148). Et, d'autre part, il résulte immédiatement des calculs effectués un peu plus haut pour le Cas actuel, que l'équation intermédiaire est également vérifiée de la même façon, puisque nous avons vu qu'elle se réduisait, avec les expressions (148bis) ou (158) de ψ et ϖ, à la condition réversible (150), qui était vérifiée identiquement en établissant simplement la corrélation (150bis) entre les fonctions F introduites par la fonction P et les fonctions f, inverses des fonctions $\mathscr{F}$ introduites par ces expressions (158) elles-mêmes. Et par conséquent la solution (158), étant supposée obtenue par cette seconde voie, eût donc bien encore coïncidé, non seulement comme forme, mais aussi comme étendue, avec celle (148bis) fournie par notre précédent calcul.

L'intégration de toutes les équations proposées étant ainsi complètement effectuée, comme on vient de le voir, par un simple changement de notations dans les résultats d'un calcul antérieur, une dernière opération nous reste seule désormais à

accomplir pour avoir les relations définitives qui lient entre eux, dans le Cas actuel, les deux systèmes de coordonnées x, y, z, et φ, ψ, ϖ, à savoir, d'éliminer des résultats qui précèdent les variables intermédiaires ω et χ, dont l'introduction n'avait d'autre but que de ramener ainsi le problème à des résultats déjà obtenus.

A cet effet, en premier lieu, si l'on se reporte encore aux résultats établis dans notre Chapitre II, et si l'on fait attention que les deux expressions (158), trouvées à deux reprises pour ψ et ϖ, appartenant nécessairement au type général (39) dudit Chapitre relatif aux familles isothermes de cônes, s'en déduisent dès lors en particularisant simplement les fonctions arbitraires f_1 et f_2 de ce type général de la façon que nous avons dite, il est clair que l'on aura les expressions des mêmes coordonnées en x, y, z, en prenant sous la même condition, pour cette même équation générale des cônes isothermes, au lieu de la forme primitive (39), la forme équivalente (43) à laquelle nous l'avons ensuite ramenée.

En effet, si nous faisons dans ce but

(159) $$\bar{u} = \operatorname{tang} u = \operatorname{tang}(\omega - i\chi), \qquad \bar{v} = \operatorname{tang} v = \operatorname{tang}(\omega + i\chi),$$

ces quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$ étant dès lors, par définition, celles-là mêmes que, dans le passage précité de notre Chapitre II, nous désignions respectivement par v et u [formules (41)], et ayant par conséquent pour valeurs en x, y, z, d'après les formules suivantes (42), savoir

(160) $$\bar{u} = \frac{xy + irz}{x^2 + z^2}, \qquad \bar{v} = \frac{xy - irz}{x^2 + z^2},$$

les formules (158) ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$\psi = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(u) + \mathcal{F}_2(v)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2iC}\left[\mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(v)\right],$$

deviendront, étant exprimées à l'aide de ces quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$,

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_1(\text{arc tang } \bar{u}) + \mathcal{F}_2(\text{arc tang } \bar{v})\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2iC}\left[\mathcal{F}_1(\text{arc tang } \bar{u}) - \mathcal{F}_2(\text{arc tang } \bar{v})\right], \end{aligned}\right.$$

et pourront dès lors être représentées plus simplement, comme dans le type général (48) du Chapitre II, par ces deux autres formules

$$(161) \qquad \psi = \frac{1}{2}\left[F_1(\bar{u}) + F_2(\bar{v})\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2iC}\left[F_1(\bar{u}) - F_2(\bar{v})\right],$$

les deux nouvelles fonctions

$$F_1(t) = \mathcal{F}_1(\text{arc tang } t) \qquad \text{et} \qquad F_2(t) = \mathcal{F}_2(\text{arc tang } t),$$

qui ne sont évidemment pas les mêmes par hypothèse que celles de l'expression (136bis), étant encore, de même que les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ d'où elles procèdent, arbitraires sous la condition d'être deux fonctions imaginaires conjuguées, c'est-à-dire du type (68).

Agissant donc ainsi, et joignant aux deux équations ainsi formées, comme première équation, celle de droite (138), dans laquelle on fera $\frac{1}{\sigma} = A$ et $-\frac{\tau}{\sigma} = B$, les expressions définitives des coordonnées φ, ψ, ϖ en fonction des coordonnées x, y, z, c'est-à-dire les équations les plus générales des familles de surfaces composant le Système Coordonné, seront donc pour le Cas actuel

$$(162) \qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{A}{r} + B = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + B, \\ \psi &= \frac{1}{2}\left[F_1\left(\frac{xy + irz}{x^2 + z^2}\right) + F_2\left(\frac{xy - irz}{x^2 + z^2}\right)\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2iC}\left[F_1\left(\frac{xy + irz}{x^2 + z^2}\right) - F_2\left(\frac{xy - irz}{x^2 + z^2}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

et comprendront par conséquent, avec les trois constantes arbi-

raires réelles A, B, C, les deux fonctions F_1 et F_2, arbitraires sous la seule condition d'être deux fonctions imaginaires conjuguées, et dans la composition desquelles il entrera par conséquent deux fonctions réelles entièrement arbitraires.

En second lieu, pour avoir les formules inverses qui donneront l'expression des coordonnées x, y, z en fonction de φ, ψ, ϖ, il suffira évidemment, dans les formules usuelles de définition du système sphérique, savoir

$$x = r \sin\theta \cos\omega, \qquad y = r \sin\theta \sin\omega, \qquad z = r \cos\theta,$$

de remettre, en premier lieu, à la place de r, $\sin\theta$, et $\cos\theta$, leurs valeurs en fonction des coordonnées φ ou χ, fournies par les équations (138) et (147); puis, cela fait, de substituer dans les expressions ainsi obtenues celles (149) ou (152) trouvées plus haut pour ω et χ en fonction de ψ et ϖ, moyennant quoi la solution définitive de la question sera représentée, pour abréger les écritures, par l'ensemble des cinq formules

$$(163)\quad \left\{\begin{aligned} & x = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \frac{\cos\omega}{\operatorname{csh}\chi}, \qquad y = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \frac{\sin\omega}{\operatorname{csh}\chi}, \qquad z = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau} \frac{\operatorname{snh}\chi}{\operatorname{csh}\chi}, \\ & \omega = \frac{1}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) + f_2(\psi - iC\varpi)\right], \\ & \chi = \frac{i}{2}\left[f_1(\psi + iC\varpi) - f_2(\psi - iC\varpi)\right], \end{aligned}\right.$$

et contiendra de nouveau par conséquent, sous cette seconde forme, trois constantes arbitraires σ, τ et C, et deux fonctions f_1 et f_2 arbitraires sous la condition d'être imaginaires conjuguées, lesquelles introduiront encore deux fractions réelles entièrement arbitraires.

Présentons encore, pour terminer cette théorie, ainsi que nous l'avons fait pour le Cas des Cylindres, deux exemples seulement de l'application des formules que nous venons de donner.

1° Prenons dans les formules (162) ou (161), avec la valeur

$C = 1$ de la constante, pour les deux fonctions conjuguées F_1 et F_2, les fonctions

$$F_1(\overline{u}) = -\frac{1}{a}\left[b - i(\operatorname{arc\,tg}\overline{u} - c)\right], \qquad F_2(\overline{v}) = -\frac{1}{a}\left[b + i(\operatorname{arc\,tg}\overline{v} - c)\right];$$

ces mêmes formules donneront alors

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left[F_1(\overline{u}) + F_2(\overline{v})\right] = -\frac{1}{2a}\left[2b - i(\operatorname{arc\,tg}\overline{u} - \operatorname{arc\,tg}\overline{v})\right], \\ \varpi &= \frac{1}{2i}\left[F_1(\overline{u}) - F_2(\overline{v})\right] = \frac{i}{2ai}\left[\operatorname{arc\,tg}\overline{u} + \operatorname{arc\,tg}\overline{v} - 2c\right]. \end{aligned}\right.$$

Or, les définitions (159) donnant inversement

$$\operatorname{arc\,tang}\overline{u} = \omega - i\chi, \qquad \operatorname{arc\,tang}\overline{v} = \omega + i\chi,$$

d'où

$$\operatorname{arc\,tg}\overline{u} - \operatorname{arc\,tg}\overline{v} = -2i\chi, \qquad \operatorname{arc\,tg}\overline{u} + \operatorname{arc\,tg}\overline{v} = 2\omega,$$

on voit que les expressions précédentes de ψ et ϖ se réduiront simplement à

$$\psi = -\frac{1}{2a}\left[2b - i(-2i\chi)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2a}(2\omega - 2c),$$

d'où l'on tirera par conséquent

$$a\psi + b = \chi, \qquad a\varpi + c = \omega,$$

valeurs qui, étant reportées dans les trois premières de nos formules (163), donneront définitivement, pour les expressions des trois coordonnées x, y, z,

$$x = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau}\,\frac{\cos(a\varpi + c)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)}, \qquad y = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau}\,\frac{\sin(a\varpi + c)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)},$$

$$z = \frac{\pm 1}{\sigma\varphi + \tau}\,\frac{\operatorname{snh}(a\psi + b)}{\operatorname{csh}(a\psi + b)}.$$

Ce sont *littéralement*, sauf encore permutation des trois coordonnées curvilignes, les formules (127) qui définissent le système sphérique avec les *cinq* constantes qu'il comporte essentiellement, lequel rentrait évidemment *a priori*, comme nous l'avons remarqué (page 212, en note), à titre de cas-limite, dans le système conique que nous venons d'étudier.

2° Prenons encore dans les mêmes formules (162) ou (161), avec la valeur C = 1 de la constante, pour les deux fonctions conjuguées F_1 et F_2 la même fonction réelle, savoir

$$(164) \qquad F_1(t) = F_2(t) = \text{Arg sn}\left(\frac{t}{k\sqrt{1+t^2}}\right),$$

k étant le module du sinus d'amplitude, module supposé réel et plus petit que l'unité. Nous aurons alors d'abord, d'après nos définitions (57), comme pour les trois derniers exemples relatifs aux cylindres, les formules inverses (87bis), savoir

$$(165) \qquad \left\{\begin{array}{lll} & U = \psi + i\varpi, & V = \psi - i\varpi, \\ \text{ou} & & \\ & \psi = \frac{1}{2}(U + V), & i\varpi = \frac{1}{2}(U - V), \end{array}\right.$$

et par suite, en comparant les secondes de ces expressions avec les formules (161), les deux séries d'expressions réciproques

$$(166) \qquad \left\{\begin{array}{ll} U = F_1(\overline{u}) = \text{Arg sn}\left(\frac{\overline{u}}{k\sqrt{1+\overline{u}^2}}\right), & V = F_2(\overline{v}) = \text{Arg sn}\left(\frac{\overline{v}}{k\sqrt{1+\overline{v}^2}}\right), \\ \text{ou} & \\ \frac{\overline{u}}{\sqrt{1+\overline{u}^2}} = k \,\text{sn}\, U, & \frac{\overline{v}}{\sqrt{1+\overline{v}^2}} = k \,\text{sn}\, V, \end{array}\right.$$

dans lesquelles les deux radicaux sont expressément supposés, d'après nos définitions (164) des fonctions F_1 et F_2, pris tous les deux avec la même détermination de signe.

Cela posé, traduisons tout d'abord en x, y, z, au lieu des

variables auxiliaires $\bar{u}$ et $\bar{v}$, ces dernières formules (166), qui équivalent en fait aux hypothèses actuelles.

Pour cela, les définitions (160) des quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$ donneront, pour la première, par exemple,

$$\begin{aligned} 1+\bar{u}^2 &= 1 + \frac{(xy+irz)^2}{(x^2+z^2)^2} \\ &= \frac{1}{(x^2+z^2)^2}[(x^4+2x^2z^2+z^4)+(x^2y^2-r^2z^2+2irxyz)] \\ &= \frac{1}{(x^2+z^2)^2}[(x^2+y^2+z^2)x^2+(z^2+x^2-r^2)z^2+2irxyz)] \\ &= \frac{1}{(x^2+z^2)^2}(r^2x^2-y^2z^2+2irxyz) = \frac{(rx+iyz)^2}{(x^2+z^2)^2}, \end{aligned}$$

d'où, en extrayant les racines, les deux valeurs

$$\sqrt{1+\bar{u}^2} = \pm\frac{rx+iyz}{x^2+z^2}, \qquad \sqrt{1+\bar{v}^2} = \pm\frac{rx-iyz}{x^2+z^2},$$

le même signe + ou — devant être pris à la fois devant ces deux expressions pour la même détermination des deux radicaux, du moment que ces premiers membres représentent dans cette hypothèse deux expressions imaginaires conjuguées.

En prenant donc l'inverse de la première de ces expressions, nous trouverons

$$\frac{1}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = \pm\frac{x^2+z^2}{rx+iyz} = \pm\frac{(x^2+z^2)(rx-iyz)}{r^2x^2+y^2z^2} = \pm\frac{(x^2+z^2)(rx-iyz)}{(x^2+z^2)(x^2+y^2)},$$

d'où par conséquent, en simplifiant, pour les deux expressions, avec la même observation relativement aux signes,

$$(167) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = \pm\frac{rx-iyz}{x^2+y^2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\bar{v}^2}} = \pm\frac{rx+iyz}{x^2+y^2}.$$

De là nous conclurons, en multipliant respectivement par ces dernières valeurs les expressions (160), quant à la première,

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = \pm\frac{xy+irz}{x^2+z^2}\,\frac{rx-iyz}{x^2+y^2} = \pm\frac{ry(x^2+z^2)+izx(r^2-y^2)}{(x^2+z^2)(x^2+y^2)},$$

et par conséquent, en simplifiant de nouveau, les deux nouvelles valeurs

$$(168)\qquad \frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = \pm\frac{ry+izx}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\bar{v}}{\sqrt{1+\bar{v}^2}} = \pm\frac{ry-izx}{x^2+y^2}.$$

Et comme les secondes expressions ci-dessus (166) donnent évidemment, quant à la première,

$$\operatorname{dn} U = \pm\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 U} = \pm\sqrt{1-\frac{\bar{u}^2}{1+\bar{u}^2}},$$

c'est-à-dire pour les deux expressions à la fois,

$$(169)\qquad \operatorname{dn} U = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\bar{u}^2}}, \qquad \operatorname{dn} V = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\bar{v}^2}},$$

(le même signe devant encore être pris dans les deux seconds membres, toujours pour la même raison), le simple rapprochement des égalités (166) et (168) d'une part, et (167) et (169) de l'autre, nous fournira donc les quatre égalités

$$(170)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{ry+izx}{x^2+y^2} = \pm k\operatorname{sn} U, \qquad &\frac{ry-izx}{x^2+y^2} = \pm k\operatorname{sn} V,\\ &\frac{rx-iyz}{x^2+y^2} = \pm\operatorname{dn} U, \qquad &\frac{rx+iyz}{x^2+y^2} = \pm\operatorname{dn} V,\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles le signe sera expressément le même, d'après les réserves que nous avons faites à ce sujet, dans les deux équa-

tions d'une même ligne, mais non pas nécessairement pour les quatre équations à la fois, les doubles signes de la seconde ligne étant ici commandés par ceux des équations (169), qui sont complètement indépendants de ceux relatifs aux équations précédentes (167) et (168).

D'ailleurs, à la place de ces dernières équations (170), on pourra tout aussi bien, pour la réalité, considérer les combinaisons linéaires suivantes, obtenues par simple addition ou soustraction,

$$(171)\quad \begin{cases} \dfrac{2ry}{x^2+y^2} = \pm k(\operatorname{sn} U + \operatorname{sn} V), & \dfrac{2izx}{x^2+y^2} = \pm k(\operatorname{sn} U - \operatorname{sn} V), \\ \dfrac{2rx}{x^2+y^2} = \pm (\operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V), & \dfrac{-2iyz}{x^2+y^2} = \pm (\operatorname{dn} U - \operatorname{dn} V), \end{cases}$$

dont deux quelconques, à volonté, pourront être prises à la place des relations primordiales (166), auxquelles elles sont complètement équivalentes (*).

Nos hypothèses relatives à l'exemple actuel étant donc ramenées à cette nouvelle forme, de même que pour l'exemple ana-

(*) Il est bien évident, par la façon même dont elles ont été obtenues, que ces quatre égalités, qui proviennent, par diverses combinaisons algébriques, des deux seules équations (166), ne pourront constituer que deux équations distinctes entre x, y, et z, d'une part, et U et V ou ψ et ϖ, d'autre part, et seront par conséquent compatibles entre elles.

Si l'on en doutait, il serait bien facile de démontrer ce fait *a posteriori*, par cette simple remarque, qu'en multipliant ces dernières équations (171) deux à deux dans chaque ligne, on obtient

$$\frac{4irxyz}{(x^2+y^2)^2} = k^2(\operatorname{sn}^2 U - \operatorname{sn}^2 V) = -(\operatorname{dn}^2 U - \operatorname{dn}^2 V),$$

et, qu'en les divisant de même dans chaque colonne, on trouve semblablement

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{k(\operatorname{sn} U + \operatorname{sn} V)}{\operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V} = \mp \frac{(\operatorname{dn} U - \operatorname{dn} V)}{k(\operatorname{sn} U - \operatorname{sn} V)},$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris à la fois devant les expressions de ces deux rapports. Or, les deux derniers membres dans chacune de ces deux séries d'égalités sont évidemment identiques en ψ en ϖ, attendu que l'on aura toujours, quels que soient U et V,

$$\operatorname{dn}^2 U + k^2 \operatorname{sn}^2 U = \operatorname{dn}^2 V + k^2 \operatorname{sn}^2 V = 1.$$

logue relatif aux cylindres, on pourra encore résoudre la question par deux voies différentes, suivant que l'on se proposera de déterminer de prime abord les expressions en φ, ψ, ϖ des trois coordonnées rectilignes, ou au contraire les équations des trois surfaces qui composeront le système.

(*1re Méthode.*) Par le premier procédé, qui est encore le plus rapide, deux quelconques des équations précédentes (171) détermineront à elles seules les rapports des coordonnées rectilignes entre elles, tels que $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$ par exemple, et par suite, étant jointes à l'équation de la troisième famille φ, savoir celle des sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \frac{1}{(\sigma\rho + \tau)^2}, \tag{172}$$

fourniront dès lors l'expression demandée des trois coordonnées x, y, z, à la seule condition d'y remplacer U et V par leurs valeurs actuelles (165) en ψ et ϖ.

A cet effet, divisant tout d'abord les deux équations de la première ligne (171) par celle de gauche de la seconde ligne, et substituant les valeurs (165) de U et V, nous obtiendrons ainsi, eu égard à l'indépendance du double signe pour les deux lignes entre elles,

$$(173)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\pm k(\operatorname{sn} U + \operatorname{sn} V)}{\operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V} = \frac{\pm k\left[\operatorname{sn}(\psi + i\varpi) + \operatorname{sn}(\psi - i\varpi)\right]}{\operatorname{dn}(\psi + i\varpi) + \operatorname{dn}(\psi - i\varpi)} \\ &= \pm k \frac{2 \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn} i\varpi \operatorname{dn} i\varpi}{2 \operatorname{dn}\psi \operatorname{dn} i\varpi} = \pm k \frac{\operatorname{sn}\psi \operatorname{cn} i\varpi}{\operatorname{dn}\psi}, \end{aligned} \right.$$

$$(174)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{iz}{r} &= \frac{\pm k(\operatorname{sn} U - \operatorname{sn} V)}{\operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V} = \frac{\pm k\left[\operatorname{sn}(\psi + i\varpi) - \operatorname{sn}(\psi - i\varpi)\right]}{\operatorname{dn}(\psi + i\varpi) + \operatorname{dn}(\psi - i\varpi)} \\ &= \pm k \frac{2 \operatorname{sn} i\varpi \operatorname{cn}\psi \operatorname{dn}\psi}{2 \operatorname{dn}\psi \operatorname{dn} i\varpi} = \pm k \frac{\operatorname{cn}\psi \operatorname{sn} i\varpi}{\operatorname{dn} i\varpi}, \end{aligned} \right.$$

le même signe devant encore être pris à la fois, d'après ce que nous avons expliqué dans les expressions de ces deux rap-

ports. Puis, cela fait, la première équation (171) pouvant s'écrire

$$\frac{2r}{x}\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \pm k(\mathrm{sn\,U} + \mathrm{sn\,V}),$$

ou, en résolvant par rapport à x,

$$x = \pm\frac{2r}{k}\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{\mathrm{sn}(\psi + i\varpi) + \mathrm{sn}(\psi - i\varpi)},$$

on trouvera donc, en développant, et remplaçant le rapport $\frac{y}{x}$ par la valeur obtenue tout à l'heure (173),

$$(174^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} x &= \pm\frac{2r}{k}\frac{\frac{k\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,\psi}}{1+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{cn}^2 i\varpi}{\mathrm{dn}^2\psi}}\frac{1}{\frac{2\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi\,\mathrm{dn}\,i\varpi}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{sn}^2 i\varpi}} \\ &= \pm r\frac{\mathrm{dn}\,\psi}{\mathrm{dn}^2\psi + k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{cn}^2 i\varpi}\,\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{sn}^2 i\varpi}{\mathrm{dn}\,i\varpi} = \pm r\frac{\mathrm{dn}\,\psi}{\mathrm{dn}\,i\varpi},\end{aligned}\right.$$

car on aperçoit de suite que l'on a

$$(175)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{dn}^2\psi + k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{cn}^2 i\varpi &= 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\psi + k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,(1-\mathrm{sn}^2 i\varpi) \\ &= 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\psi\,\mathrm{sn}^2 i\varpi.\end{aligned}\right.$$

En remettant alors cette valeur de la coordonnée x dans l'expression obtenue tout à l'heure (173) pour le rapport $\frac{y}{x}$, nous en déduirons

$$(175^{\text{bis}})\qquad y = \pm x\frac{k\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,\psi} = \pm r\frac{\mathrm{dn}\,\psi}{\mathrm{dn}\,i\varpi}\frac{k\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,\psi} = \pm kr\frac{\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,i\varpi}$$

et enfin l'expression (174) deviendra, étant multipliée par $-ir$,

$$z = \pm kr \frac{\operatorname{cn}\psi . i \operatorname{sn} i\varpi}{\operatorname{dn} i\varpi}.$$

Aucune corrélation n'est nécessaire entre le double signe de cette dernière expression et celui des précédentes (174bis) et (175bis) de x et de y, du moment que celui-ci provient de la seule équation (174), tandis que dans les deux autres intervient encore le signe propre à l'équation (171) isolément. C'est pourquoi nous écrivons au second membre encore le double signe de la même façon que pour ces deux expressions précédentes de x et de y.

En rapprochant donc ces résulats, on voit que les expressions des trois coordonnées rectilignes en ψ et ϖ, et r ou φ, sont alors, pour le cas actuel : (*)

$$(176) \qquad x = \pm r \frac{\operatorname{dn}\psi}{\operatorname{dn} i\varpi}, \qquad y = \pm kr \frac{\operatorname{sn}\psi \operatorname{cn} i\varpi}{\operatorname{dn} i\varpi}, \qquad z = \pm kr \frac{\operatorname{cn}\psi . i \operatorname{sn} i\varpi}{\operatorname{dn} i\varpi}.$$

(*) Nous arriverions également à ces mêmes expressions des coordonnées x, y, z en ψ et ϖ, et r ou φ, par une voie plus directe peut-être, mais moins rapide, en appliquant de prime abord les formules (163) que nous avons données spécialement pour cet objet, et dans lesquelles interviennent comme auxiliaires les variables intermédiaires ω et χ (111). Afin de présenter semblablement un exemple de l'application de ces dernières formules, nous croyons devoir indiquer de même, en note, ce nouveau calcul, qui offrira d'ailleurs un bon exercice (l'occasion ne s'en rencontrant pas fréquemment dans l'enseignement classique) pour l'emploi des formules les plus simples relatives aux fonctions elliptiques.

A cet effet les deux premières des formules (149bis) donnant, en même temps que l'équation (138),

$$\left\{\begin{array}{lll} \omega = \frac{1}{2}(u+v), & i\chi = -\frac{1}{2}(u-v), & r = \dfrac{1}{\sigma\varphi + \tau}, \\ \operatorname{csh}\chi = \cos i\chi = \cos\frac{1}{2}(u-v), & & \operatorname{snh}\chi = \frac{1}{i}\sin i\chi = i \sin\frac{1}{2}(u-v), \end{array}\right.$$

les trois premières formules du groupe (163) donneront alors simultanément, pour les trois coordonnées x, y, z,

$$\left\{\begin{aligned} x &= \pm r \frac{\cos\frac{1}{2}(u+v)}{\cos\frac{1}{2}(u-v)} = \pm r \frac{\cos\frac{1}{2}u \cos\frac{1}{2}v - \sin\frac{1}{2}u \sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}u \cos\frac{1}{2}v + \sin\frac{1}{2}u \sin\frac{1}{2}v} = \pm r \frac{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}u \operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}u \operatorname{tang}\frac{1}{2}v}, \\ y &= \pm r \frac{\sin\frac{1}{2}(u+v)}{\cos\frac{1}{2}(u-v)} = \pm r \frac{\sin\frac{1}{2}u \cos\frac{1}{2}v + \cos\frac{1}{2}u \sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}u \cos\frac{1}{2}v + \sin\frac{1}{2}u \sin\frac{1}{2}v} = \pm r \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}u + \operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}u \operatorname{tang}\frac{1}{2}v}, \\ z &= \pm r \frac{i \sin\frac{1}{2}(u-v)}{\cos\frac{1}{2}(u-v)} = \pm ir \operatorname{tang}\frac{1}{2}(u-v) = \pm ir \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}u - \operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}u \operatorname{tang}\frac{1}{2}v}, \end{aligned}\right.$$

De même que les expressions (88bis) rencontrées dans l'exemple analogue relatif aux cylindres, ces dernières valeurs de x, y, z sont bien encore réelles, nonobstant la présence apparente de

---

c'est-à-dire

$$(\alpha) \qquad x = \pm r\frac{N}{D}, \qquad y = \pm r\frac{N'}{D}, \qquad z = \pm ir\frac{N''}{D},$$

en convenant de faire, pour faciliter les transformations,

$$(6) \qquad \begin{cases} D = 1 + \tang\tfrac{1}{2}u \tang\tfrac{1}{2}v, & N = 1 - \tang\tfrac{1}{2}u \tang\tfrac{1}{2}v, \\ N' = \tang\tfrac{1}{2}u + \tang\tfrac{1}{2}v, & N'' = \tang\tfrac{1}{2}u - \tang\tfrac{1}{2}v; \end{cases}$$

et par conséquent la question se réduit simplement à substituer dans ces dernières expressions les valeurs de $\tang\frac{1}{2}u$ et $\tang\frac{1}{2}v$ qui correspondent aux hypothèses (164).

Pour cela, il suffira d'observer qu'ayant immédiatement, d'après les définitions mêmes (159) des quantités $\bar{u}$ et $\bar{v}$,

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{1+\bar{u}^2}} = \sin u \qquad \text{et} \qquad \frac{\bar{v}}{\sqrt{1+\bar{v}^2}} = \sin \bar{v},$$

les équations (166), qui constituent notre point de départ, équivalant aux deux suivantes

$$U = \text{Arg sn}\left(\frac{1}{k}\sin u\right), \qquad V = \text{Arg sn}\left(\frac{1}{k}\sin v\right),$$

donneront alors inversement celles-ci

$$\text{sn}\, U = \frac{1}{k}\sin u, \qquad \text{sn}\, V = \frac{1}{k}\sin v,$$

d'où l'on tirera d'abord

$$\sin u = k\,\text{sn}\, U, \qquad \cos u = \sqrt{1 - k^2\,\text{sn}^2 U} = \text{dn}\, U,$$

puis de là

$$(\gamma) \qquad \tang^2\tfrac{1}{2}u = \frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \frac{1-\text{dn}\,U}{1+\text{dn}\,U}, \qquad \tang^2\tfrac{1}{2}v = \frac{1-\text{dn}\,V}{1+\text{dn}\,V}.$$

Or, les quantités U et V n'intervenant dans les expressions ci-dessus (165) de ψ et $i\varpi$ qu'affectées du coefficient $\frac{1}{2}$, il est rationnel de faire apparaître dans les formules que nous venons d'écrire ces quantités $\frac{1}{2}$ U et $\frac{1}{2}$ V comme arguments, à la place des quantités U et V elles-mêmes, parce que c'est évidemment dans ces conditions que les expressions cherchées de ψ et ϖ ressortiront alors avec le plus de facilité.

Dans ce but, la formule d'addition du delta d'amplitude, si l'on y prend les deux arguments a et b égaux l'un et l'autre à $\frac{1}{2}$ U, donnant

$$(\delta) \qquad \text{dn}\, U = \frac{S}{T},$$

l'imaginaire i. En effet les trois formules classiques, dites *des modules complémentaires*, savoir

$$(176^{bis})\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sn}(i\varpi, k) = \frac{i \operatorname{sn}(\varpi, k')}{\operatorname{cn}(\varpi, k')}, \qquad \operatorname{cn}(i\varpi, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(\varpi, k')}, \\ &\operatorname{dn}(i\varpi, k) = \frac{\operatorname{dn}(\varpi, k')}{\operatorname{cn}(\varpi, k')}, \end{aligned} \right.$$

---

en faisant pour abréger les transformations

$$(\varepsilon)\qquad T = 1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} U,$$

$$(\eta)\qquad \left\{ \begin{aligned} S &= \operatorname{dn}^2 \tfrac{1}{2} U - k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn}^2 \tfrac{1}{2} U \\ &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U - k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U (1 - \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U) \\ &= 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U + k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} U, \end{aligned} \right.$$

on aura donc, en reportant successivement ces valeurs (δ), puis (ε) et (η) dans celle (γ) qu'il s'agit de calculer,

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} u &= \frac{1 - \frac{S}{T}}{1 + \frac{S}{T}} = \frac{T - S}{T + S} \\ &= \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} U - (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U + k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} U)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} U + (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U + k^2 \operatorname{sn}^4 \tfrac{1}{2} U)} \\ &= \frac{2 k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U (1 - \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U)}{2 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U)} = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn}^2 \tfrac{1}{2} U}{\operatorname{dn}^2 \tfrac{1}{2} U}, \end{aligned} \right.$$

et par conséquent simplement, en extrayant les racines,

$$(\theta)\qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u = \frac{k \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} U}{\operatorname{dn} \tfrac{1}{2} U}, \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \frac{k \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} V}{\operatorname{dn} \tfrac{1}{2} V}.$$

Le même signe devant être pris à la fois dans ces deux valeurs (u et v étant par définition deux quantités imaginaires conjuguées), on pourra se dispenser de mettre en évidence le double signe, à condition de supposer que le coefficient k, qui n'intervient dans toutes les formules que nous aurons à appliquer que par son carré, emporte avec lui ce double signe.

Pour calculer commodément les résultats de la substitution de ces valeurs dans les expressions (β), nous introduirons encore, à l'aide d'un symbole spécial, la quantité suivante, que l'on peut mettre sous trois formes,

$$(\zeta)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} V &= \operatorname{cn}^2 \tfrac{1}{2} U + \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} U \operatorname{dn}^2 \tfrac{1}{2} V \\ &= \operatorname{cn}^2 \tfrac{1}{2} V + \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} V \operatorname{dn}^2 \tfrac{1}{2} U. \end{aligned} \right.$$

transformeront ces mêmes expressions, avec le module k' pour les fonctions relatives à ϖ, dans les suivantes, qui sont entièrement réelles, aussi bien quant à l'apparence que quant au fond,

---

A l'aide de cette quantité, les expressions (θ) donneront

$$(\iota)\quad \begin{cases} 1 \pm \operatorname{tang} \frac{1}{2} u \operatorname{tang} \frac{1}{2} v = 1 \pm \dfrac{k \operatorname{sn} \frac{1}{2} U \operatorname{cn} \frac{1}{2} U}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} U} \dfrac{k \operatorname{sn} \frac{1}{2} V \operatorname{cn} \frac{1}{2} V}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} V} \\ = \dfrac{\Delta}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} U \operatorname{dn} \frac{1}{2} V} \dfrac{\operatorname{dn} \frac{1}{2} U \operatorname{dn} \frac{1}{2} V \pm k^2 \operatorname{sn} \frac{1}{2} U \operatorname{sn} \frac{1}{2} V \operatorname{cn} \frac{1}{2} U \operatorname{cn} \frac{1}{2} V}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} U \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} V} \\ = \dfrac{\Delta}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} U \operatorname{dn} \frac{1}{2} V} \operatorname{dn} \frac{1}{2}(U \mp V), \end{cases}$$

d'où par conséquent, pour les deux premières expressions (ϵ), les valeurs

$$D = \frac{\Delta \operatorname{dn} \frac{1}{2}(U - V)}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} U \operatorname{dn} \frac{1}{2} V}, \qquad N = \frac{\Delta \operatorname{dn} \frac{1}{2}(U + V)}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} U \operatorname{dn} \frac{1}{2} V}.$$

On trouvera semblablement, avec la même facilité,

$$(\varkappa)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2} u \pm \operatorname{tang} \frac{1}{2} v = \dfrac{k \operatorname{sn} \frac{1}{2} U \operatorname{cn} \frac{1}{2} U}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} U} \pm \dfrac{k \operatorname{sn} \frac{1}{2} V \operatorname{cn} \frac{1}{2} V}{\operatorname{dn} \frac{1}{2} V} \\ = \dfrac{k\Delta}{\Delta \operatorname{dn} \frac{1}{2} U \operatorname{dn} \frac{1}{2} V} (\operatorname{sn} \frac{1}{2} U \operatorname{cn} \frac{1}{2} U \operatorname{dn} \frac{1}{2} V \pm \operatorname{sn} \frac{1}{2} V \operatorname{cn} \frac{1}{2} V \operatorname{dn} \frac{1}{2} U) \\ = \dfrac{k . \mathfrak{M}}{\Delta \operatorname{dn} \frac{1}{2} U \operatorname{dn} \frac{1}{2} V}, \end{cases}$$

en posant de nouveau, pour faciliter les transformations,

$$(\lambda)\qquad \mathfrak{M} = \Delta (\operatorname{sn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} V \pm \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} U),$$

quantité composée de deux termes, qui se déduisent l'un de l'autre (abstraction faite du signe) par l'échange des deux lettres U et V, la quantité Δ n'étant pas atteinte par cette permutation, et dont il suffira dès lors de calculer le premier seulement.

A cet effet, prenant pour cette quantité Δ la dernière des trois expressions (ζ), on trouvera aisément pour ce premier terme

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} V &= (\operatorname{cn}^2 \tfrac{1}{2} V + \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} V \operatorname{dn}^2 \tfrac{1}{2} U) \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} V \\ &= \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} V . \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} V \\ &+ \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} U . \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} V. \end{aligned}$$

On aura donc, en permutant U et V, pour le second des deux termes de $\mathfrak{M}$, abstraction faite du signe,

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} U &= \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} U . \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} U \\ &+ \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{cn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} V . \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{sn} \tfrac{1}{2} U \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} V \operatorname{dn} \tfrac{1}{2} U, \end{aligned}$$

les deux modules complémentaires k et k' étant tous deux, par hypothèse, moindres que l'unité,

$$(177)\quad\left\{\begin{aligned}
x &= \pm r\frac{\mathrm{dn}(\psi, k)}{\mathrm{dn}(i\varpi, k)} = \pm r\,\mathrm{dn}(\psi, k)\frac{\mathrm{cn}(\varpi, k')}{\mathrm{dn}(\varpi, k')},\\
y &= \pm kr\frac{\mathrm{sn}(\psi, k)\,\mathrm{cn}(i\varpi, k)}{\mathrm{dn}(i\varpi, k)} = \pm kr\frac{\mathrm{sn}(\psi, k)}{\mathrm{cn}(\varpi, k')}\frac{\mathrm{cn}(\varpi, k')}{\mathrm{dn}(\varpi, k')} = \pm kr\frac{\mathrm{sn}(\psi, k)}{\mathrm{dn}(\varpi, k')},\\
z &= \pm kr\frac{\mathrm{cn}(\psi, k)\ i\,\mathrm{sn}(i\varpi, k)}{\mathrm{dn}(i\varpi, k)} = \pm kr\,\mathrm{cn}(\psi, k)\frac{-\mathrm{sn}(\varpi, k')}{\mathrm{cn}(\varpi, k')}\frac{\mathrm{cn}(\varpi, k')}{\mathrm{dn}(\varpi, k')}\\
&= \mp kr\,\mathrm{cn}(\psi, k)\frac{\mathrm{sn}(\varpi, k')}{\mathrm{dn}(\varpi, k')}.
\end{aligned}\right.$$

On peut enfin donner à ces mêmes formules (177) une forme à la fois plus simple et plus symétrique, par le moyen d'un chan-

---

et par suite, en ajoutant ou retranchant, on obtiendra pour la valeur de l'expression $\mathfrak{M}(\lambda)$, les seconds facteurs étant les mêmes pour les termes correspondants dans les deux dernières expressions,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} &= \Delta(\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V} \pm \mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U})\\
&= (\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V} \pm \mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U})\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\\
&+ (\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U} \pm \mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V})\,\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\\
&= (\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V} \pm \mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U})(\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\\
&\qquad \pm \mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}),
\end{aligned}$$

étant entendu expressément que les signes supérieurs doivent être pris tous ensemble dans cette suite d'égalités de même que dans la précédente (ι), et aussi les signes inférieurs également tous en même temps.

Avec cette même condition, l'expression que nous venons de calculer pouvant évidemment être écrite

$$\mathfrak{M} = \Delta\,\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U} \pm \mathrm{V}).\Delta\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U} \mp \mathrm{V}),$$

nous obtiendrons définitivement, en la reportant dans le dernier membre des égalités ($\varkappa$),

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u \pm \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}v = \frac{k.\Delta\,\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U} \pm \mathrm{V}).\Delta\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U} \mp \mathrm{V})}{\Delta\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}},$$

valeur qui donnera, en prenant successivement les signes supérieurs et inférieurs, séparément pour chacune des deux dernières expressions (6),

$$\mathrm{N}' = \frac{k\Delta\,\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}},\qquad \mathrm{N}'' = \frac{k\Delta\,\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})\,\mathrm{cn}\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}\mathrm{V}}.$$

La valeur des quatre quantités (6) étant ainsi calculée, les expressions (α) donneront

gement linéaire du paramètre ϖ, car les trois formules également classiques

(177bis) $$\mathrm{sn}(z+\mathrm{K})=\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{dn}\,z},\qquad \mathrm{cn}(z+\mathrm{K})=-k'\frac{\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{dn}\,z},\qquad \mathrm{dn}(z+\mathrm{K})=\frac{k'}{\mathrm{dn}\,z},$$

étant appliquées à l'argument ϖ et au module k', dont la fonction complète analogue à K est précisément K', donneront

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{sn}(\varpi+\mathrm{K}',k')=\frac{\mathrm{cn}(\varpi,k')}{\mathrm{dn}(\varpi,k')},\qquad \mathrm{cn}(\varpi+\mathrm{K}',k')=-k\frac{\mathrm{sn}(\varpi,k')}{\mathrm{dn}(\varpi,k')},\\ &\mathrm{dn}(\varpi+\mathrm{K}',k')=\frac{k}{\mathrm{dn}(\varpi,k')},\end{aligned}\right.$$

valeurs qui, étant remises dans les expressions précédentes, les transformeront de nouveau dans les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &x=\pm r\,\mathrm{dn}(\psi,k)\,\mathrm{sn}(\varpi+\mathrm{K}',k'),\qquad y=\pm r\,\mathrm{sn}(\psi,k)\,\mathrm{dn}(\varpi+\mathrm{K}',k'),\\ &z=\pm r\,\mathrm{cn}(\psi,k)\,\mathrm{cn}(\varpi+\mathrm{K}',k');\end{aligned}\right.$$

et, dès lors, on voit qu'il suffira d'y changer ϖ en $\varpi-\mathrm{K}'$, pour que les mêmes expressions de x, y, z prennent définitivement la forme suivante, dont on remarquera l'analogie manifeste avec celles (89) de l'exemple 2° relatif aux cylindres,

(178) $$\left\{\begin{aligned} &x=\pm r\,\mathrm{dn}(\psi,k)\,\mathrm{sn}(\varpi,k'),\qquad y=\pm r\,\mathrm{sn}(\psi,k)\,\mathrm{dn}(\varpi,k'),\\ &z=\pm r\,\mathrm{cn}(\psi,k)\,\mathrm{cn}(\varpi,k').\end{aligned}\right.$$

---

alors immédiatement, en supprimant le facteur commun aux deux termes des différents rapports $\frac{\Delta}{\mathrm{dn}\frac{1}{2}\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\frac{1}{2}\mathrm{V}}$, puis ayant égard aux secondes formules initiales (165),

$$\left\{\begin{aligned} x&=\pm r\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}=\pm r\frac{\mathrm{dn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\mathrm{dn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}=\pm r\frac{\mathrm{dn}\,\psi}{\mathrm{dn}\,i\varpi},\\ y&=\pm r\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{D}}=\pm r\frac{k\,\mathrm{sn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})\,\mathrm{cn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}{\mathrm{dn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}=\pm kr\frac{\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,i\varpi},\\ z&=\pm ir\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{D}}=\pm ir\frac{k\,\mathrm{sn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})\,\mathrm{cn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\mathrm{dn}\frac{1}{2}(\mathrm{U}-\mathrm{V})}=\pm kr\frac{\mathrm{cn}\,\psi\,.\,i\,\mathrm{sn}\,i\varpi}{\mathrm{dn}\,i\varpi}.\end{aligned}\right.$$

Ce sont exactement les formules (176) que nous nous proposions de retrouver.

Cette analogie dans la forme analytique des résultats entraîne, ainsi qu'il est naturel, une analogie correspondante dans le caractère géométrique du système, lequel sera déterminé sans peine en formant, par l'élimination de deux des coordonnées curvilignes entre ces trois équations, successivement les équations de chacune des trois familles coordonnées.

A cet effet, faisant, pour simplifier les écritures,

$$(179)\qquad \operatorname{sn}(\psi, k) = \Psi, \qquad \operatorname{sn}(\varpi, k') = \Pi,$$

les expressions (178) pourront s'écrire, étant élevées au carré,

$$x^2 = r^2(1-k^2\Psi^2)\Pi^2, \quad y^2 = r^2\Psi^2(1-k'^2\Pi^2), \quad z^2 = r^2(1-\Psi^2)(1-\Pi^2),$$

d'où l'on conclura en premier lieu, par simple addition,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= r^2\left[(\Pi^2-k^2\Psi^2\Pi^2)+(\Psi^2-k'^2\Psi^2\Pi^2)+\{1-(\Psi^2+\Pi^2)+\Psi^2\Pi^2\}\right] \\ &= r^2\left[1-(k^2+k'^2-1)\Psi^2\Pi^2\right] = r^2; \end{aligned}$$

puis, en second lieu, en séparant à deux reprises les variables dans chaque équation,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{1-k^2\Psi^2} = r^2\Pi^2, && \frac{y^2}{\Psi^2} = r^2(1-k'^2\Pi^2), && \frac{z^2}{1-\Psi^2} = r^2(1-\Pi^2), \\ &\frac{x^2}{\Pi^2} = r^2(1-k^2\Psi^2), && \frac{y^2}{1-k'^2\Pi^2} = r^2\Psi^2, && \frac{z^2}{1-\Pi^2} = r^2(1-\Psi^2); \end{aligned}\right.$$

et enfin, en ajoutant respectivement dans chaque ligne, chaque équation étant multipliée préalablement par un coefficient constant qui sera k^2 ou $-k'^2$, ou bien 1 ou -1,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{k^2x^2}{1-k^2\Psi^2} - \frac{y^2}{\Psi^2} + \frac{z^2}{1-\Psi^2} &= r^2\left[k^2\Pi^2-(1-k'^2\Pi^2)+1-\Pi^2\right] \\ &= r^2(k^2+k'^2-1)\Pi^2 = 0, \\ \frac{x^2}{\Pi^2} - \frac{k'^2y^2}{1-k'^2\Pi^2} - \frac{z^2}{1-\Pi^2} &= r^2\left[1-k^2\Psi^2-k'^2\Psi^2-(1-\Psi^2)\right] \\ &= r^2\left[1-(k^2+k'^2)\right]\Psi^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, par conséquent, eu égard à la définition des symboles Ψ et Π (179),

$$(180)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{k^2x^2}{\mathrm{dn}^2(\psi,k)}-\frac{y^2}{\mathrm{sn}^2(\psi,k)}+\frac{z^2}{\mathrm{cn}^2(\psi,k)}=0,\\ &\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2(\varpi,k')}-\frac{k'^2y^2}{\mathrm{dn}^2(\varpi,k')}-\frac{z^2}{\mathrm{cn}^2(\varpi,k')}=0.\end{aligned}\right.$$

Or, il est visible que ces deux dernières équations, qui sont les analogues des deux équations (89bis) pour le cas des cylindres, représentent de même deux familles de cônes homofocaux; car, si on les fait rentrer l'une et l'autre dans le type commun des cônes du second ordre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

les carrés des demi-distances focales seront, pour la première,

$$\left\{\begin{aligned} &a^2-b^2=\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2(\psi,k)+\mathrm{sn}^2(\psi,k)=\frac{1}{k^2}\left[\mathrm{dn}^2(\psi,k)+k^2\,\mathrm{sn}^2(\psi,k)\right]=\frac{1}{k^2},\\ &a^2-c^2=\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2(\psi,k)-\mathrm{cn}^2(\psi,k)=\frac{1}{k^2}\left[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\psi,k)-k^2\,\mathrm{cn}^2(\psi,k)\right]=\frac{k'^2}{k^2},\end{aligned}\right.$$

et pour la seconde,

$$\left\{\begin{aligned} &a^2-b^2=\mathrm{sn}^2(\varpi,k')+\frac{1}{k'^2}\mathrm{dn}^2(\varpi,k')=\frac{1}{k'^2}\left[k'^2\,\mathrm{sn}^2(\varpi,k')+\mathrm{dn}^2(\varpi,k')\right]=\frac{1}{k'^2},\\ &a^2-c^2=\mathrm{sn}^2(\varpi,k')+\mathrm{cn}^2(\varpi,k')=1.\qquad (*)\end{aligned}\right.$$

(*) Autrement, si l'on écrit comme il suit la première, par exemple, des deux équations (180), en y changeant tous les signes ainsi que l'ordre des différents termes,

$$\frac{y^2}{\mathrm{sn}^2(\psi,k)}-\frac{z^2}{\mathrm{cn}^2(\psi,k)}-\frac{x^2}{\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2(\psi,k)}=0,$$

on y reconnaît à première vue, à la seule condition d'y permuter deux fois les axes des coordonnées rectilignes, la forme même (157) que nous avons donnée dans notre Cha-

Le Système Orthogonal, dans l'exemple que nous venons de traiter, se compose donc d'une famille de sphères concentriques et de deux familles de cônes homofocaux du second ordre. C'est donc, sous forme de coordonnées thermométriques cette fois, précisément le système des *Coordonnées Coniques du second ordre* que nous avons déduit comme cas-limite du système des Coordonnées Elliptiques dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (pp. 78-80), et dont nous avons ensuite fait usage à diverses reprises pour la solution de plusieurs questions intéressantes (*Ibid.*, pp. 80-94 et 176-179).

(*2e Méthode*). Quant au second procédé, visant comme but immédiat la détermination des équations des trois familles coordonnées, nous n'aurions, pour atteindre ce but, qu'à suivre une marche exactement semblable à celle qui nous a déjà conduit au même résultat lors de l'exemple analogue relatif aux cylindres, à la seule condition de substituer partout des fonctions elliptiques aux fonctions circulaires, et à calquer, en quelque sorte, en partant de cette donnée, nos raisonnements et nos procédés de calcul sur ceux que nous avons déjà présentés, précisément dans cette vue, à l'occasion dudit exemple. Toutefois le calcul par cette voie serait extrêmement laborieux, si nous voulions lui maintenir encore, comme pour le précédent, le caractère d'une recherche *a priori*, ne supposant absolument rien de connu quant au résultat à intervenir. C'est pourquoi tout en conservant les grandes lignes et les traits essentiels du calcul précité, nous présenterons celui-ci sous la forme d'une démonstration *a poste-*

---

pitre II, à l'équation (116) des surfaces homofocales du second ordre, en la rapportant, par le procédé de Lamé, à son paramètre thermométrique, ce qui démontre d'une autre façon le résultat que nous venons de formuler.

La double permutation que nous venons de dire équivaut à faire tourner de 240°, dans le sens direct, le système des axes de coordonnées rectilignes autour de la bissectrice de l'angle trièdre des coordonnées positives.

En faisant tourner semblablement, dans le sens direct, le même système, de 90° seulement autour de l'axe des x, ce qui changera y en z et z en $-y$, et équivaudra par conséquent à permuter les carrés y^2 et z^2, il est visible que le même type (157) du Chapitre II redonnera bien alors de la même façon, pour le paramètre ϖ et le module k', la seconde des équations ci-dessus (180) de nos deux familles de cônes, pour l'exemple actuel.

riori, forme qui en abrégera considérablement la longueur, sans altérer la remarquable analogie analytique que nous nous proposons de mettre en pleine lumière.

Dans cette pensée, considérant l'équation du second degré

$$(181) \qquad At^2 - Bt + C = 0,$$

dans laquelle les coefficients A, B, C sont les trois expressions

$$(182) \quad \begin{cases} A = (\mathrm{dn}\,U + \mathrm{dn}\,V)^2, \qquad C = (\mathrm{sn}\,U\,\mathrm{dn}\,V - \mathrm{sn}\,V\,\mathrm{dn}\,U)^2, \\ B = 2(1 + \mathrm{sn}\,U\,\mathrm{sn}\,V)(1 + \mathrm{dn}\,U\,\mathrm{dn}\,V - k^2\,\mathrm{sn}\,U\,\mathrm{sn}\,V), \end{cases}$$

et qui se réduira dès lors manifestement pour $k = 0$ (chacun des deltas d'amplitude devant alors être remplacé par l'unité) à l'équation du second degré (90) rencontrée dans l'exemple en question, cherchons quelles seront les deux racines, lorsqu'on la supposera exprimée en ψ et ϖ, au lieu de U et V, à l'aide des premières expressions (165).

Pour cela, nous allons calculer dans cette hypothèse les valeurs des deux rapports $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$ qui représentent la somme et le produit de ces racines.

Dans ce but, convenant de représenter par D la quantité symétrique en ψ et ϖ déjà envisagée dans l'équation (175) du calcul précédent, savoir

$$(183) \quad \begin{cases} D = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,\psi\,\mathrm{sn}^2\,i\varpi \\ \quad = \mathrm{dn}^2\,\psi + k^2\,\mathrm{sn}^2\,\psi\,\mathrm{cn}^2\,i\varpi = \mathrm{dn}^2\,i\varpi + k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\varpi\,\mathrm{cn}^2\,\psi, \end{cases}$$

on trouvera tout d'abord

$$(184) \quad \mathrm{dn}\,U + \mathrm{dn}\,V = \mathrm{dn}(\psi + i\varpi) + \mathrm{dn}(\psi - i\varpi) = \frac{2}{D}\,\mathrm{dn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,i\varpi,$$

$$\mathrm{sn}\,U\,\mathrm{dn}\,V = \mathrm{sn}(\psi + i\varpi)\,\mathrm{dn}(\psi - i\varpi)$$

$$= \frac{1}{D}(\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi\,\mathrm{dn}\,i\varpi + \mathrm{sn}\,i\varpi\,\mathrm{cn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,\psi)$$

$$\times \frac{1}{D}(\mathrm{dn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,i\varpi + k^2\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,i\varpi\,\mathrm{cn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,i\varpi)$$

$$= \frac{1}{D^2}\big[\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,\psi.\mathrm{cn}\,i\varpi\,\mathrm{dn}^2\,i\varpi + k^2\,\mathrm{sn}^2\,\psi\,\mathrm{cn}\,\psi.\mathrm{sn}\,i\varpi\,\mathrm{cn}^2\,i\varpi\,\mathrm{dn}\,i\varpi$$

$$+ \mathrm{cn}\,\psi\,\mathrm{dn}^2\psi.\mathrm{sn}\,i\varpi\,\mathrm{dn}\,i\varpi + k^2\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}^2\psi\,\mathrm{dn}\,\psi.\mathrm{sn}^2\,i\varpi\,\mathrm{cn}\,i\varpi\big].$$

Des quatre termes qui composent ce dernier produit, le premier et le dernier seuls sont pairs en $i\varpi$; ce seront donc les seuls qui entreront dans la somme des deux produits semblables sn U dn V et sn V dn U, qui se déduisent l'un de l'autre par le changement de U en V, ou de i en $-i$. On obtiendra donc pour cette somme la valeur

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V + \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U \\
&\quad = \frac{2}{D^2}\left[\operatorname{sn}\psi \operatorname{dn}\psi . \operatorname{cn} i\varpi \operatorname{dn}^2 i\varpi + k^2 \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}^2\psi \operatorname{dn}\psi . \operatorname{sn}^2 i\varpi \operatorname{cn} i\varpi\right] \\
&\quad = \frac{2}{D^2} \operatorname{sn}\psi \operatorname{dn}\psi \operatorname{cn} i\varpi (\operatorname{dn}^2 i\varpi + k^2 \operatorname{cn}^2\psi \operatorname{sn}^2 i\varpi) \\
&\quad = \frac{2}{D} \operatorname{sn}\psi \operatorname{dn}\psi \operatorname{cn} i\varpi,
\end{aligned}$$

eu égard à la dernière expression (183) de la quantité D. De cette valeur et de l'expression (184) résultent donc en premier lieu, pour les coefficients A et C (182), celles-ci

$$(185)\quad \left\{\begin{aligned}
A &= (\operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V)^2 &&= \frac{4}{D^2} \operatorname{dn}^2\psi \operatorname{dn}^2 i\varpi, \\
C &= (\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V + \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U)^2 &&= \frac{4}{D^2} \operatorname{sn}^2\psi \operatorname{dn}^2\psi \operatorname{cn}^2 i\varpi.
\end{aligned}\right.$$

En second lieu, pour calculer semblablement le troisième coefficient B, posant, en vue de faciliter les écritures,

$$(186)\qquad \Psi = \operatorname{sn}\psi, \qquad \Pi = \operatorname{sn} i\varpi, \quad (*) \quad \text{d'où} \qquad D = 1 - k^2\Psi^2\Pi^2,$$

on trouvera de même aisément

(*) Les deux sinus d'amplitude Ψ et Π sont ici supposés pris tous les deux avec le même module donné k, contrairement à ce que nous supposons dans le précédent calcul, à l'égard des mêmes symboles, dans les notations introduites par les équations (179).

$$\operatorname{sn} U \operatorname{sn} V = \operatorname{sn}(\psi + i\varpi)\operatorname{sn}(\psi - i\varpi)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\Psi^2(1-\Pi^2)(1-k^2\Pi^2) - \Pi^2(1-\Psi^2)(1-k^2\Psi^2)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\Psi^2\left\{1-(1+k^2)\Pi^2 + k^2\Pi^4\right\} - \Pi^2\left\{1-(1+k^2)\Psi^2 + k^2\Psi^4\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\Psi^2 - \Pi^2 + k^2\Psi^2\Pi^2(\Pi^2 - \Psi^2)\right] = \frac{1}{D^2}(1-k^2\Psi^2\Pi^2)(\Psi^2 - \Pi^2),$$

$$\operatorname{dn} U \operatorname{dn} V = \operatorname{dn}(\psi + i\varpi)\operatorname{dn}(\psi - i\varpi)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[(1-k^2\Psi^2)(1-k^2\Pi^2) - k^4\Psi^2\Pi^2(1-\Psi^2)(1-\Pi^2)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - k^2(\Psi^2+\Pi^2) + k^4\Psi^2\Pi^2 - k^4\Psi^2\Pi^2\left\{1-(\Psi^2+\Pi^2)+\Psi^2\Pi^2\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - k^4\Psi^4\Pi^4 - k^2(\Psi^2+\Pi^2)(1-k^2\Psi^2\Pi^2)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}(1-k^2\Psi^2\Pi^2)\left[1 + k^2\Psi^2\Pi^2 - k^2(\Psi^2+\Pi^2)\right],$$

c'est-à-dire simplement, eu égard à la valeur (186) de D,

$$\operatorname{sn} U \operatorname{sn} V = \frac{1}{D}(\Psi^2 - \Pi^2), \qquad \operatorname{dn} U \operatorname{dn} V = \frac{1}{D}\left[1 + k^2\Psi^2\Pi^2 - k^2(\Psi^2+\Pi^2)\right];$$

d'où l'on conclura successivement

$$1 + \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V = \frac{1}{D}(D + \Psi^2 - \Pi^2) = \frac{1}{D}(1 - k^2\Psi^2\Pi^2 + \Psi^2 - \Pi^2)$$

$$= \frac{1}{D}\left[\Psi^2(1-k^2\Pi^2) + 1 - \Pi^2\right] = \frac{1}{D}(\operatorname{sn}^2\psi \operatorname{dn}^2 i\varpi + \operatorname{cn}^2 i\varpi),$$

$$1 + \operatorname{dn} U \operatorname{dn} V - k^2 \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V$$

$$= \frac{1}{D}\left[(1-k^2\Psi^2\Pi^2) + \left\{1 + k^2\Psi^2\Pi^2 - k^2(\Psi^2+\Pi^2)\right\} - k^2(\Psi^2 - \Pi^2)\right]$$

$$= \frac{2}{D}(1-k^2\Psi^2) = \frac{2\operatorname{dn}^2\psi}{D},$$

$$B = 2(1 + \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V)(1 + \operatorname{dn} U \operatorname{dn} V - k^2 \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{D}(\operatorname{sn}^2\psi \operatorname{dn}^2 i\varpi + \operatorname{cn}^2 i\varpi) \cdot \frac{2\operatorname{dn}^2\psi}{D}.$$

Rapprochant alors cette dernière expression des précédentes (185), on voit que la somme et le produit des racines de l'équation proposée (181) auront respectivement pour valeurs

$$\left\{\begin{aligned}\frac{B}{A} &= \frac{\frac{4}{D^2}(\operatorname{sn}^2\psi\operatorname{dn}^2 i\varpi + \operatorname{cn}^2 i\varpi)\operatorname{dn}^2\psi}{\frac{4}{D^2}\operatorname{dn}^2\psi\operatorname{dn}^2 i\varpi} = \frac{\operatorname{sn}^2\psi\operatorname{dn}^2 i\varpi + \operatorname{cn}^2 i\varpi}{\operatorname{dn}^2 i\varpi} \\ &= \operatorname{sn}^2\psi + \frac{\operatorname{cn}^2 i\varpi}{\operatorname{dn}^2 i\varpi}, \\ \frac{C}{A} &= \frac{\frac{4}{D^2}\operatorname{sn}^2\psi\operatorname{dn}^2\psi\operatorname{cn}^2 i\varpi}{\frac{4}{D^2}\operatorname{dn}^2\psi\operatorname{dn}^2 i\varpi} = \operatorname{sn}^2\psi\cdot\frac{\operatorname{cn}^2 i\varpi}{\operatorname{dn}^2 i\varpi}.\end{aligned}\right.$$

D'où il appert que les deux racines de l'équation proposée sont $\operatorname{sn}^2\psi$ et $\frac{\operatorname{cn}^2 i\varpi}{\operatorname{dn}^2 i\varpi} = \operatorname{sn}^2(i\varpi + K)$, lesquelles se réduisent bien effectivement, pour $k = 0$, à $\sin^2\psi$ et $\cos^2 i\varpi = \sin^2\left(i\varpi + \frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire aux deux racines de l'équation analogue (90) de l'exemple relatif aux cylindres.

Chacune de ces racines n'étant ainsi fonction que d'une seule des coordonnées ψ ou ϖ, il est clair qu'il n'y a plus de nouveau qu'à exprimer la même équation (181) en x, y, et z, au lieu de U et V, pour avoir immédiatement les équations demandées des deux familles de cônes.

A cet effet, déduisant des formules (170), tirées à l'avance des hypothèses propres à l'exemple actuel,

$$\operatorname{sn}U\operatorname{sn}V = \frac{1}{k^2}\frac{r^2y^2+z^2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{k^2}\frac{(x^2+y^2+z^2)y^2+z^2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{k^2}\frac{(x^2+y^2)y^2+z^2(y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\operatorname{dn}U\operatorname{dn}V = \frac{r^2x^2+y^2z^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)x^2+y^2z^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)x^2+z^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

et joignant à la troisième équation (171), nous aurons donc en premier lieu les trois valeurs

$$(187)\qquad \operatorname{dn}U+\operatorname{dn}V = \frac{\pm 2rx}{x^2+y^2},\qquad \operatorname{sn}U\operatorname{sn}V = \frac{1}{k^2}\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2},\qquad \operatorname{dn}U\operatorname{dn}V = \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2}.$$

Tirant en second lieu des mêmes formules (170)

$$\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V = \pm \frac{1}{k} \frac{ry + izx}{x^2 + y^2} \frac{rx + iyz}{x^2 + y^2} = \pm \frac{1}{k} \frac{(r^2 - z^2)xy + irz(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

nous en déduirons successivement ces trois autres valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn} U \operatorname{dn} V = \pm \dfrac{1}{k} \dfrac{xy + irz}{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U = \pm \dfrac{1}{k} \dfrac{xy - irz}{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{sn} U \operatorname{dn} V + \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U = \pm \dfrac{2}{k} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \end{array}\right.$$

dont la dernière, étant jointe aux précédentes (187), fournira immédiatement pour les trois coefficients A, B, C (182) les trois expressions cherchées, qui seront

$$\left\{\begin{array}{l} A = (\operatorname{dn} U + \operatorname{dn} V)^2 = \dfrac{4r^2x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ C = (\operatorname{sn} U \operatorname{dn} V + \operatorname{sn} V \operatorname{dn} U)^2 = \dfrac{4}{k^2} \dfrac{x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ B = 2(1 + \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V)(1 + \operatorname{dn} U \operatorname{dn} V - k^2 \operatorname{sn} U \operatorname{sn} V) \\ \quad = 2\left(1 + \dfrac{1}{k^2} \dfrac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2}\right)\left(1 + \dfrac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2} - \dfrac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2}\right) \\ \quad = \dfrac{2}{k^2} \dfrac{[k^2(x^2 + y^2) + y^2 + z^2][(x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) - (y^2 + z^2)]}{(x^2 + y^2)^2} \\ \qquad\qquad = \dfrac{2}{k^2} \dfrac{[y^2 + z^2 + k^2(x^2 + y^2)]\, 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{array}\right.$$

L'équation proposée (181), exprimée en x, y, z par le moyen de ces dernières valeurs, deviendra donc

$$\frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2}\left[r^2.t^2 - \frac{1}{k^2}\{y^2 + z^2 + k^2(x^2 + y^2)\}.t + \frac{y^2}{k^2}\right] = 0,$$

ou, plus simplement,

(188) $$k^2(x^2 + y^2 + z^2).t^2 - [y^2 + z^2 + k^2(x^2 + y^2)].t + y^2 = 0.$$

En l'ordonnant alors par rapport à x, y, z, elle deviendra

$$(k^2t^2 - k^2t)\,x^2 + y^2\,|1 - (1 + k^2)\,t + k^2t^2| - z^2\,(t - k^2t^2) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$-t\,(1-t).k^2x^2 + y^2\,(1-t)\,(1-k^2t) - z^2t\,(1-k^2t) = 0,$$

et, par conséquent, en la divisant par le produit $t(1-t)(1-k^2t)$, elle pourra être écrite définitivement sous la forme

$$\frac{y^2}{t} - \frac{z^2}{1-t} - \frac{x^2}{\frac{1}{k^2}(1-k^2t)} = 0.$$

Dès lors, ses deux racines étant $\mathrm{sn}^2\psi$ et $\mathrm{sn}^2(i\varpi + \mathrm{K})$, ainsi que nous l'avons reconnu tout d'abord, nous aurons séparément les équations

$$(189)\quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{\mathrm{sn}^2\psi} - \dfrac{z^2}{\mathrm{cn}^2\psi} - \dfrac{x^2}{\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2\psi} = 0, \\[2ex] \dfrac{y^2}{\mathrm{sn}^2(i\varpi+\mathrm{K})} - \dfrac{z^2}{\mathrm{cn}^2(i\varpi+\mathrm{K})} - \dfrac{x^2}{\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2(i\varpi+\mathrm{K})} = 0, \end{cases}$$

qui sont toutes deux réelles, nonobstant la présence apparente de l'imaginaire i dans la seconde, ainsi qu'il résulte immédiatement des formules classiques (177bis) et (176bis) déjà rappelées à l'occasion du précédent calcul.

Ces deux équations, dont la première n'est autre que la première équation déjà rencontrée (180), dans laquelle on a simplement changé les signes et interverti l'ordre des termes, représentent les deux familles de cônes relatives à l'exemple actuel. On voit qu'elles appartiennent l'une et l'autre, sauf permutation des trois axes de coordonnées rectilignes, au type (157) du Chapitre II, que nous avons donné pour les surfaces homofocales du second ordre, rapportées à leur paramètre thermométrique,

en attribuant simplement aux deux constantes, entièrement arbitraires par définition, σ et τ de ce paramètre, respectivement les valeurs 1 et 0 pour la famille ψ, et $\sqrt{-1}$ et K pour la famille ϖ.

D'ailleurs, si l'on a égard, pour la seconde de ces équations, aux formules classiques précitées (177 bis), comme elle se changera alors dans celle-ci

$$(190) \qquad \frac{k'^2 y^2}{\mathrm{cn}^2\, i\varpi} - \frac{z^2}{\mathrm{sn}^2\, i\varpi} - k^2 x^2 = 0,$$

si on la joint alors sous cette nouvelle forme aux équations des deux autres familles qui composent le système, savoir la première (189), et celle des sphères (172), il est bien facile de s'assurer que la résolution de ces trois équations par rapport à x, y, z redonnera bien alors, comme cela doit être, les expressions (176) auxquelles nous sommes arrivés de prime abord par notre premier calcul.

Comme conclusion de cette étude, nous résumerons de nouveau, pour les mieux graver dans l'esprit du Lecteur, les résultats essentiels que nous avons obtenus pour les deux systèmes si importants, et complètement analogues, de cylindres et de cônes à la fois orthogonaux et isothermes, en formulant l'énoncé suivant, auquel nous attribuerions encore le nom de théorème, si son objet n'était pas cette fois exclusivement analytique :

PROPOSITION. — « *Les systèmes réels, à la fois orthogonaux et*
» *isothermes, composés exclusivement, soit de cylindres, soit de*
» *cônes, peuvent tous être compris* (*) *dans les formules*

$$\psi = \frac{1}{2}\left[F_1(\alpha) + F_2(6)\right], \qquad \varpi = \frac{1}{2iC}\left[F_1(\alpha) - F_2(6)\right],$$

(*) En prenant, dans le cas des cylindres, l'axe des z parallèle à la direction commune des génératrices des deux familles.

» *dans lesquelles* F_1 *et* F_2 *représentent deux fonctions imaginaires*
» *conjuguées, c'est-à-dire telles que*

$$F_1(t) = \Psi(t) + i\Pi(t), \qquad F_2(t) = \Psi(t) - i\Pi(t),$$

» *les deux fonctions* Ψ *et* Π, *et la constante* C *étant réelles et*
» *entièrement arbitraires, et les arguments* α *et* β *seront respec-*
» *tivement les expressions*

$$\alpha = x - iy, \quad \beta = x + iy, \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \frac{xy - irz}{x^2 + z^2}, \quad \beta = \frac{xy + irz}{x^2 + z^2},$$

» *selon qu'il s'agira des cylindres ou des cônes.*

» *En particulier, l'on obtiendra les deux types remarquables,*
» *et en quelque sorte parallèles, composés exclusivement de*
» *surfaces homofocales du second ordre, en attribuant à la*
» *constante la valeur* $C = 1$, *et prenant pour les deux fonctions*
» *conjuguées* F_1 *et* F_2 *une même fonction réelle qui sera*

$$F(t) = \text{arc sin}\,\frac{t}{l}, \qquad \textit{ou bien} \qquad F(t) = \text{Arg sn}\left(\frac{1}{k}\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right),$$

» *suivant encore qu'il s'agira d'une famille de cylindres ou d'une*
» *famille de cônes* (*). »

(*) Pour qui lirait simplement ce seul énoncé, sans avoir pris connaissance des calculs par lesquels nous en établissons l'exactitude, une grave suspicion d'erreur s'élèverait sans doute aussitôt, basée sur ce fait que la seconde des expressions de la fonction $F(t)$ spécifiées à l'avant-dernière ligne semble prendre pour $k=0$ la forme indéterminée Arg sn ∞, tandis qu'elle doit évidemment *a priori* se réduire à la première, le premier Cas (celui des cylindres) n'étant manifestement qu'une cas-limite du second.

Cette objection, qui serait parfaitement fondée si la variable t représentait la même fonction dans les deux Cas, ou tout au moins si son expression t_1, relative au premier Cas, était précisément la limite, pour $k=0$, de son expression analogue t_2, relative au second, porte à faux dans la circonstance, en raison de ce que ni l'une ni l'autre de ces deux conditions ne se trouve actuellement remplie.

En effet, transportant tout d'abord le plan des yz parallèlement à lui-même en un point déterminé de l'axe des x, ce qui revient à faire

$$x = a + x', \qquad r = \sqrt{(a+x')^2 + y^2 + z^2} = a\sqrt{\left(1 + \frac{x'}{a}\right)^2 + \frac{y^2+z^2}{a^2}},$$

Système des coordonnées sphéroïdales du second ordre. — 2° « *Les deux dérivées qui sont supposées nulles sont réciproques* », c'est-à-dire que l'on a, par exemple,

$$\frac{Q}{\varpi} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{Q}{\varphi} = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad Q = \text{const.},$$

en vertu de la condition générale (9). Or, la seconde équation (13) se réduisant alors à $Q\,\frac{R}{\varphi}\,\frac{P}{\varpi} = 0$, ne peut être vérifiée avec ces hypothèses : d'où il suit que ce second sous-cas ne peut donner naissance à aucune solution du problème.

---

puis imaginant que, la section de chacune des surfaces par le nouveau plan des yz demeurant constante, le sommet commun des cônes s'éloigne à l'infini sur l'axe des x, et supposant par conséquent que la coordonnée a grandisse indéfiniment, nous ferons tendre k vers 0 sous la condition $ka = \text{const} = l$, ou $k = \frac{l}{a}$. Il sera bien clair alors que la quantité précitée $t_2 = \frac{xy \pm irz}{x^2 + z^2}$, dont le dénominateur est du second degré en a tandis que le numérateur est du premier seulement, tendra vers la limite zéro, et qu'en même temps le rapport $\frac{t_2}{k}$, dont la valeur peut être écrite, avec notre hypothèse, en divisant les deux termes par a,

$$\frac{t_2}{k} = \frac{1}{k}\,\frac{(a + x')\,y \pm irz}{(a + x')^2 + z^2} = \frac{1}{ka}\,\frac{\left(1 + \frac{x'}{a}\right) y \pm i\,\frac{r}{a}\,z}{\left(1 + \frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2},$$

donnera semblablement, pour $a =$ ou $k = 0$, à cause de la valeur évidente : $\lim \frac{r}{a} = 1$,

$$\lim \frac{t_2}{k} = \frac{1}{l}\,(y \pm iz) = \frac{t_1}{l},$$

à la seule condition de permuter une fois les trois axes de coordonnées rectilignes dans les formules de notre théorie (et par suite de l'énoncé ci-dessus), spéciales au Cas des cylindres. De ces deux limites, ainsi calculées séparément, résultera dès lors de nouveau celle-ci

$$\lim \frac{t_2}{k\sqrt{1 + t_2^2}} = \lim \frac{t_2}{k} = \frac{t_1}{l},$$

d'où l'on voit que la seconde des expressions en question de la fonction F (t) se réduira bien, comme cela devait être, à la première, pour $k = 0$, ou $a = \infty$, c'est-à-dire lorsque la famille de cônes sera devenue une famille de cylindres parallèle à l'axe des x.

On vérifiera sans peine que la même série de considérations transformerait isolément chacune des équations de nos calculs relatifs aux cônes dans l'équation correspondante relative aux cylindres, notamment, par exemple, les deux dernières équations (176) dans les deux (89), et de même l'équation (188) de laquelle nous avons tiré, par notre seconde méthode, à la fois celles des deux familles de cônes, dans celle (90bis) qui nous avait antérieurement rendu le même service à l'occasion des systèmes de cylindres.

3° « *Les deux dérivées qui sont supposées nulles sont conjuguées* », c'est-à-dire que l'on a, par exemple,

(191) $$\frac{P}{\varpi}=0, \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\varpi}=0, \quad \text{ou} \quad P=f_2(\psi), \quad \text{et} \quad Q=f_1(\varphi),$$

en vertu des conditions générales (8) ou (9).

Avec ces hypothèses, les deux premières équations du premier ordre (13) sont vérifiées d'ores et déjà, et la troisième, qui subsiste sans modification, peut être écrite aussi bien, en la divisant par le produit PQR, et renversant l'ordre des termes,

(192) $$\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\varphi}+\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\psi}=\frac{lP}{\psi}\frac{lQ}{\varphi}.$$

Quant au groupe du second ordre (19), la quantité G (18) se réduisant par ces hypothèses à la valeur

$$G=P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}+Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi},$$

ces trois équations (19), en faisant la substitution, et effectuant ensuite les réductions dans les deux premières, seront alors les trois suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
&2PQR.Q\frac{P^2}{\psi^2}=2Q^2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2-P^3\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}+PQ^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi},\\
&2PQR.P\frac{Q^2}{\varphi^2}=2RP^2\left(\frac{Q}{\varphi}\right)^2-Q^3\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}+QP^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi},\\
&2PQR\left(P\frac{R^2}{\varphi^2}+Q\frac{R^2}{\psi^2}\right)=2\left[P^2Q\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2+PQ^2\left(\frac{R}{\psi}\right)^2\right]+R\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}+Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right),
\end{aligned}\right.$$

ou encore respectivement

$$\left\{\begin{aligned}
&2Q^2R\left[P\frac{P^2}{\psi^2}-\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right]=-P\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}-Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right),\\
&2P^2R\left[Q\frac{Q^2}{\varphi^2}-\left(\frac{Q}{\varphi}\right)^2\right]=\quad Q\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}-Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right),\\
&2P^2Q\left[R\frac{R^2}{\varphi^2}-\left(\frac{R}{\varphi}\right)^2\right]+2PQ^2\left[R\frac{R^2}{\psi^2}-\left(\frac{R}{\psi}\right)^2\right]=R\left(P^2\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi}+Q^2\frac{R}{\psi}\frac{P}{\psi}\right).
\end{aligned}\right.$$

équations que nous pourrons écrire de nouveau, en les divisant respectivement la première par P^3Q^2R, la seconde par P^2Q^3R et la troisième par $P^2Q^2R^2$:

$$(193)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2}{P}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{P}\frac{P}{\psi}\right) &= -\left(\frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} - \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi}\right),\\ \frac{2}{Q}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{Q}\frac{Q}{\varphi}\right) &= \frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} - \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi},\\ \frac{2}{Q}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R}\frac{R}{\varphi}\right) + \frac{2}{P}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R}\frac{R}{\psi}\right) &= \frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} + \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi}. \end{aligned}\right.$$

Or, si nous considérons d'abord les deux premières de ces équations, nous voyons qu'elles ont le même second membre, au signe près, et que, eu égard aux hypothèses (191), les premiers membres sont, pour la première une fonction de ψ seule, et pour la seconde une fonction de la seule variable φ; d'où il suit que cette valeur absolue commune des seconds membres ne peut être qu'une constante, que nous désignerons par $4c^2$, en sorte que, ces deux équations équivalant ainsi à elles seules en réalité aux trois suivantes

$$\frac{2}{P}\frac{d^2.lP}{d\psi^2} = -\frac{2}{Q}\frac{d^2.lQ}{d\varphi^2} = -\left(\frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} - \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi}\right) = 4c^2,$$

les trois fonctions cherchées P, Q, R seront déterminées successivement par les trois équations

$$(194)\qquad \frac{d^2.lP}{d\psi^2} = 2c^2P, \qquad \frac{d^2.lQ}{d\varphi^2} = -2c^2Q,$$

$$(195)\qquad \frac{1}{Q}\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} - \frac{1}{P}\frac{lP}{\psi}\frac{lR}{\psi} = -4c^2,$$

conjointement avec l'équation (192) et la troisième (193). Or, lorsqu'on aura déterminé isolément les deux fonctions P et Q par l'intégration de chacune des équations (194), en reportant alors les valeurs ainsi trouvées dans les deux équations (192) et (195), celles-ci détermineront à la fois les deux dérivées $\frac{lR}{\varphi}$ et $\frac{lR}{\psi}$.

En conséquence, pour qu'il existe une solution correspondante à ce Cas, il faudra que deux conditions se trouvent remplies successivement, savoir : en premier lieu, que les valeurs de $\frac{l\mathrm{R}}{\varphi}$ et $\frac{l\mathrm{R}}{\psi}$ supposées ainsi obtenues satisfassent à la condition d'intégrabilité $\frac{d}{d\psi}\left(\frac{l\mathrm{R}}{\varphi}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{l\mathrm{R}}{\psi}\right)$, et en second lieu, que les trois valeurs de P, Q, R ainsi successivement déterminées vérifient encore après coup la dernière équation (193). Il importe donc de reconnaître si ces deux conditions se trouveront toujours remplies par le seul fait des hypothèses (191), ou si elles exigeront pour cela l'adjonction de quelque hypothèse supplémentaire.

Pour cela, remarquant tout d'abord que la seconde équation (194), qui détermine Q, n'est autre que l'équation (115) déjà rencontrée dans le Cas antérieur IV°, sauf la dénomination de la variable indépendante, en sorte que les deux égalités (117) et (116) nous donneront de nouveau pour le Cas actuel

$$(196) \qquad \mathrm{Q} = \frac{a^2}{c^2 \operatorname{csh}^2(a\varphi + b)}, \qquad \left(\frac{d.l\mathrm{Q}}{d\varphi}\right)^2 = 4a^2 - 4c^2\mathrm{Q};$$

puis observant que la première équation (194), qui détermine P, se déduit de la précédente en changeant simplement φ en ψ, et c^2 en $-c^2$, nous aurons semblablement, relativement à P, les égalités

$$\mathrm{P} = \frac{a'^2}{-c^2 \operatorname{csh}^2(a'\psi + b')}, \qquad \left(\frac{d.l\mathrm{P}}{d\psi}\right)^2 = 4a'^2 + 4c^2\mathrm{P}.$$

Mais, c étant supposé réel, la première de ces deux expressions n'offrira une valeur positive, comme cela est imposé par la définition (7) de P, qu'à la condition de prendre pour a' et b' des quantités imaginaires de la forme $a' = i\alpha$, $b' = i\beta$, auquel cas elles deviendront alors les suivantes :

$$(197) \qquad \mathrm{P} = \frac{\alpha^2}{c^2 \cos^2(\alpha\psi + \beta)} \qquad \left(\frac{d.l\mathrm{P}}{d\psi}\right)^2 = -4\alpha^2 + 4c^2\mathrm{P}.$$

Ces premières valeurs obtenues, tirant des deux équations

linéaires (192) et (195) celles de $\frac{lR}{\varphi}$ et $\frac{lR}{\psi}$, à savoir

$$(198)\qquad \frac{lR}{\varphi}=\frac{-4c^2\frac{lQ}{\varphi}+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2\frac{lQ}{\varphi}}{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2},\qquad \frac{lR}{\psi}=\frac{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2\frac{lP}{\psi}+4c^2\frac{lP}{\psi}}{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2}.$$

puis, déduisant des deux secondes équations précédentes (196) et (197)

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+4c^2=\frac{4a^2}{Q},\qquad \frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2-4c^2=-\frac{4\alpha^2}{P},$$

et ajoutant ensuite ces deux dernières égalités,

$$(199)\qquad \frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2=\frac{4a^2}{Q}-\frac{4\alpha^2}{P}=\frac{4}{PQ}(a^2P-\alpha^2Q),$$

nous aurons dès lors, en substituant ces trois dernières valeurs dans les expressions précédentes (198),

$$(200)\quad \begin{cases} \dfrac{lR}{\varphi}=\dfrac{\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2-4c^2}{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2}\cdot\dfrac{lQ}{\varphi}=\dfrac{-\frac{4\alpha^2}{P}}{\frac{4}{PQ}(a^2P-\alpha^2Q)}\cdot\dfrac{1}{Q}\dfrac{Q}{\varphi}=\dfrac{-\alpha^2\frac{Q}{\varphi}}{a^2P-\alpha^2Q}, \\[2ex] \dfrac{lR}{\psi}=\dfrac{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+4c^2}{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2}\cdot\dfrac{lP}{\psi}=\dfrac{\frac{4a^2}{Q}}{\frac{4}{PQ}(a^2P-\alpha^2Q)}\cdot\dfrac{1}{P}\dfrac{P}{\psi}=\dfrac{a^2\frac{P}{\psi}}{a^2P-\alpha^2Q}, \end{cases}$$

d'où nous conclurons immédiatement

$$d.lR=\frac{lR}{\varphi}d\varphi+\frac{lR}{\psi}d\psi=\frac{a^2\frac{P}{\psi}d\psi-\alpha^2\frac{Q}{\varphi}d\varphi}{a^2P-\alpha^2Q},$$

expression différentielle intégrable, eu égard aux hypothèses

(191), qui montre déjà que la première des conditions précitées est bien remplie, et qui donnera pour l'expression de R :

$$(201) \qquad lR = l(a^2P - \alpha^2Q) + l.C^2 \qquad \text{ou} \qquad R = C^2(a^2P - \alpha^2Q).$$

Pour voir à présent si la seconde condition se trouve également remplie, nous n'aurons plus qu'à calculer séparément, en vue de les comparer, les valeurs qui résultent, pour chacun des deux membres de l'équation restante (193), des expressions précédentes (197), (196) et (201), auxquelles nous venons d'arriver pour les trois inconnues P, Q, R.

A cet effet, les valeurs (200) donnant

$$(202) \quad \begin{cases} \dfrac{lR}{\varphi} = \dfrac{-\alpha^2C^2Q}{C^2(a^2P - \alpha^2Q)} \cdot \dfrac{1}{Q}\dfrac{Q}{\varphi} = \dfrac{-\alpha^2C^2Q}{R}\dfrac{lQ}{\varphi}, \\ \dfrac{lR}{\psi} = \dfrac{a^2C^2P}{C^2(a^2P - \alpha^2Q)} \cdot \dfrac{1}{P}\dfrac{P}{\psi} = \dfrac{a^2C^2P}{R}\dfrac{lP}{\psi}, \end{cases}$$

nous en conclurons, en premier lieu, en ayant égard aux secondes valeurs (196) et (197),

$$(203) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{Q}\dfrac{lQ}{\varphi}\dfrac{lR}{\varphi} + \dfrac{1}{P}\dfrac{lP}{\psi}\dfrac{lR}{\psi} = \dfrac{C^2}{R}\left[-\alpha^2\left(\dfrac{lQ}{\varphi}\right)^2 + a^2\left(\dfrac{lP}{\psi}\right)^2\right] \\ \qquad = \dfrac{C^2}{R}\left[-\alpha^2(4a^2 - 4c^2Q) + a^2(-4\alpha^2 + 4c^2P)\right] \\ \qquad = \dfrac{4C^2}{R}\left[-2\alpha^2a^2 + c^2(a^2P + \alpha^2Q)\right], \end{cases}$$

et, en second lieu, en différentiant une seconde fois les valeurs (202),

$$\frac{d^2.lR}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{lR}{\varphi}\right) = -\alpha^2C^2\left[\frac{Q}{R}\frac{d^2.lQ}{d\varphi^2} + \frac{lQ}{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{Q}{R}\right)\right]$$
$$= \frac{-\alpha^2C^2Q}{R}\left[\frac{d^2.lQ}{d\varphi^2} + \frac{lQ}{\varphi}\frac{d.l}{d\varphi}\left(\frac{Q}{R}\right)\right].$$

D'ailleurs, les expressions (202) et (201) donnant également

$$\frac{d.l}{d\varphi}\left(\frac{Q}{R}\right)=\frac{lQ}{\varphi}-\frac{lR}{\varphi}=\frac{lQ}{\varphi}\left(1+\frac{\alpha^2C^2Q}{R}\right)=\frac{lQ}{\varphi}\,\frac{R+\alpha^2C^2Q}{R}=\frac{C^2a^2P}{R}\,\frac{lQ}{\varphi},$$

nous aurons dès lors, en reportant dans l'expression qui précède,

$$\frac{d^2.lR}{d\varphi^2}=-\frac{\alpha^2C^2Q}{R}\left[\frac{d^2.lQ}{d\varphi^2}+\frac{C^2a^2P}{R}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2\right],$$

et il est bien clair que la seconde expression (202), qui se déduit de la première en y changeant φ en ψ, Q en P, et α^2 en $-a^2$, ou a^2 en $-\alpha^2$, donnerait exactement de la même façon :

$$\frac{d^2.lR}{d\psi^2}=\frac{a^2C^2P}{R}\left[\frac{d^2.lP}{d\psi^2}-\frac{C^2\alpha^2Q}{R}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2\right].$$

Par suite, ces deux dernières égalités donneront, en ayant égard ensuite successivement aux deux équations (194), puis aux égalités (199) et (201),

$$\frac{2}{Q}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R}\frac{R}{\varphi}\right)+\frac{2}{P}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R}\frac{R}{\psi}\right)=\frac{2}{Q}\frac{d^2.lR}{d\varphi^2}+\frac{2}{P}\frac{d^2.lR}{d\psi^2}$$

$$=\frac{2C^2}{R}\left[-\alpha^2\frac{d^2.lQ}{d\varphi^2}+a^2\frac{d^2.lP}{d\psi^2}-\frac{C^2a^2\alpha^2}{R}\left\{P\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+Q\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2\right\}\right]$$

$$=\frac{2C^2}{R}\left[\alpha^2.2c^2Q+a^2.2c^2P-\frac{C^2a^2\alpha^2}{R}PQ\left\{\frac{1}{Q}\left(\frac{lQ}{\varphi}\right)^2+\frac{1}{P}\left(\frac{lP}{\psi}\right)^2\right\}\right]$$

$$=\frac{2C^2}{R}\left[2c^2(\alpha^2Q+a^2P)-\frac{C^2a^2\alpha^2}{R}PQ.\frac{4}{PQ}\frac{R}{C^2}\right]$$

$$=\frac{4C^2}{R}\left[c^2\,a^2P+\alpha^2Q)-2a^2\alpha^2\right].$$

Dès lors, le simple rapprochement de cette dernière expression avec celle obtenue tout à l'heure (203) fait voir que la seconde des conditions susindiquées sera également remplie, c'est-à-dire

que la dernière équation (193), qu'il nous restait à vérifier, sera bien toujours satisfaite, sans l'adjonction d'aucune hypothèse supplémentaire, avec les expressions de P, Q, R que nous venons de trouver, savoir

$$(204)\qquad P=\frac{\alpha^2}{c^2\cos^2(\alpha\psi+6)},\qquad Q=\frac{a^2}{c^2\operatorname{csh}^2(a\varphi+b)},\qquad R=C^2(a^2P-\alpha^2Q);$$

et, par conséquent, dans ce dernier Cas encore, caractérisé par les hypothèses (191), aucune impossibilité essentielle ne s'oppose jusqu'ici à ce qu'il leur corresponde une nouvelle solution du problème (*).

Cette première question, en quelque sorte préjudicielle, étant ainsi hors de cause, et ces premiers résultats étant acquis, si nous nous reportons encore au tableau (12) des courbures principales du système, afin de suivre une fois de plus la marche que nous avons constamment adoptée pour tous les différents Cas successivement examinés jusqu'ici, nous verrons qu'avec les hypothèses (191) la famille ϖ d'abord est une famille de plans. Or, ces plans ne pourront évidemment pas être supposés tous parallèles, car le raisonnement que nous avons présenté déjà à l'occasion du Cas III° (pp. 157-158) montre qu'alors les deux autres familles φ et ψ seraient nécessairement des cylindres normaux à ces plans ϖ et, par conséquent, auraient chacune une courbure principale constamment nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse (191). Cette famille de plans ϖ pourra dès lors être représentée de nouveau par une équation de la forme (25), telle que

$$(205)\qquad \frac{y}{x}=\operatorname{tang}(m\varpi+n),$$

m et n désignant deux constantes provisoirement indéterminées, et la première équation (32), qui fournira donc la valeur de $\Delta_1^2\varpi$,

---

(*) Même observation que dans la note de la page 211, relative au sous-cas 1°.

en y écrivant alors m et ϖ à la place de a et φ, sera pour le Cas actuel

$$(206) \qquad m^2\Delta_1^2\varpi = \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_1^2\varpi = \frac{1}{m^2(x^2+y^2)}.$$

Cela posé, si l'on raisonne à l'égard de ces plans ϖ et de chacune des deux familles φ et ψ successivement, exactement comme nous l'avons fait à l'occasion du Cas II° (pp. 144-145), au sujet des plans ϖ et de la famille ψ seulement, on verra facilement de même que les deux inconnues φ et ψ devront satisfaire dans le Cas actuel séparément aux deux équations

$$(207) \qquad y\frac{d\varphi}{dx} - x\frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad y\frac{d\psi}{dx} - x\frac{d\psi}{dy} = 0,$$

lesquelles donneront pour intégrales, en faisant, pour abréger, $\rho^2 = x^2 + y^2$,

$$\varphi = f_1(\rho, z) \qquad \text{et} \qquad \psi = f_2(\rho, z);$$

car aucune considération n'autorisant plus actuellement à penser que la variable indépendante z ne doive pas entrer dans l'expression des inconnues φ et ψ, cette variable doit prendre place dès lors à titre de constante dans les fonctions arbitraires introduites par l'intégration des deux équations (207). D'où il appert que les deux familles de surfaces φ et ψ se composeront dans ce cas l'une et l'autre de surfaces de révolution autour de l'axe des z.

La solution du problème pour ce dernier sous-cas 3° est donc constituée par une famille de plans méridiens et deux familles de surfaces de révolution autour du même axe, par lequel passent tous les plans (*). C'est donc le système des *Coordonnées Sphéroïdales* que nous employons sous le numéro V° dans notre

(*) Ce dernier Cas particulier nous offre, *pour la première fois*, un exemple simple et remarquable d'application de la réciproque du Théorème II de Lamé, que nous formulons dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 29), tandis que Lamé n'indique que la proposition directe seulement (formulée en premier lieu par nous dans le susdit énoncé).

En effet, dans le Cas actuel, les deux seules courbures principales supposées nulles,

Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes (page 141, au bas), mais réduit encore aux seules surfaces de révolution capables de constituer une famille isotherme. Il ne nous reste donc plus qu'à déterminer seulement quelles sont, parmi les surfaces de cette catégorie, celles qui peuvent donner ainsi naissance à deux familles qui soient à la fois individuellement isothermes et de plus orthogonales entre elles.

Pour cela, la nature des surfaces φ et ψ étant ainsi connue, remarquons tout d'abord que la condition qui exprimera leur

---

savoir $\frac{1}{R''_1}$ et $\frac{1}{R''_2}$, étant, d'après les dénominations de Lamé, *conjuguées en surface*, mais non pas *conjuguées en arc* (voir la seconde note de la page 150), d'après le Théorème I de Lamé, démontré quelques lignes auparavant (*loc. cit.*, pp. 27-28), aucun des trois arcs d'intersection des surfaces coordonnées deux à deux n'a sa propre courbure constamment nulle, ou, ce qui est la même chose, aucun des trois rayons R, R', R'' n'est constamment infini. Dans ces conditions, la proposition réciproque en question consiste en ce que deux des normales principales de ces mêmes arcs d'intersection feront nécessairement entre elles un angle droit. Or, effectivement, les arcs d'intersection des deux surfaces de révolution φ et ψ avec les plans méridiens ϖ n'étant autres dans le Cas actuel que les deux méridiennes elles-mêmes, et les normales principales de ces courbes étant évidemment celles situées dans leur plan commun, c'est-à-dire dans le plan méridien, il est bien clair, les surfaces φ et ψ étant orthogonales, qu'elles feront entre elles un angle droit, ainsi que l'expriment du reste nos équations subséquentes (208) ou (221).

Cette même proposition réciproque ne nous aurait fourni de conclusion précise pour aucun des différents Cas examinés jusqu'ici, parce que dans tous ces Cas, comme il est facile de le constater, il se trouvait toujours parmi les courbures principales supposées nulles au moins deux courbures qui étaient *conjuguées en arc*, en sorte que l'un des trois rayons de courbure précités R, R', R'' était alors constamment infini, en vertu du Théorème I de Lamé (*Ibid.*). Et dans ces conditions, le second membre de la formule que traduit cette réciproque, savoir

$$\cos\omega\cos\omega'\cos\omega'' = \frac{R^2R'^2R''^2}{R_1R'_1R''_1 . R_2R'_2R''_2},$$

prenant alors la forme indéterminée $0 \times \infty$, il n'en résultait plus dès lors aucune conséquence nécessaire relativement à aucun des angles ω, ω', ω'' des trois normales principales entre elles : circonstance analytique qui correspondait géométriquement à ce fait, que l'un des trois arcs d'intersection au moins, étant dans chacun de ces Cas une droite, c'est-à-dire une courbe dont la normale principale est indéterminée, deux des trois angles ω, ω', ω'' étaient eux-mêmes indéterminés, ce qui rend illusoire la formule en question.

C'est sans doute dans cette rareté de l'existence *effective* de cette proposition réciproque qu'il faut chercher la raison du silence que garde Lamé à son sujet, bien qu'elle traduise exactement au même titre que la proposition directe, seule énoncée par lui, sa remarquable formule; mais on voit par cet exemple que, toute rare qu'elle soit, elle n'est pas illusoire, et que son intérêt n'est pas purement théorique.

orthogonalité réciproque, c'est-à-dire la dernière équation de droite (21), les deux premières étant déjà vérifiées sous la forme (207), signifiera simplement que leurs deux méridiennes se coupent elles-mêmes orthogonalement, et sera, par conséquent, en considérant ρ et z comme les deux coordonnées rectilignes de ces méridiennes,

(208) $$\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\psi}{d\rho}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz}=0.$$

Mais, de même que pour le Cas III°, cette condition ne sera pas d'ailleurs la seule, puisque ces deux inconnues φ et ψ, conjointement avec la troisième ϖ déjà déterminée par l'équation ci-dessus (205), devront ensemble vérifier encore les trois équations de gauche (21), c'est-à-dire celles-ci

(209) $$\Delta_1^2\varphi=\frac{1}{QR},\qquad \Delta_1^2\psi=\frac{1}{RP},\qquad \Delta_1^2\varpi=\frac{1}{PQ},$$

dans lesquelles P, Q, R représentant les expressions trouvées un peu plus haut (204), les invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, en raison de la même interprétation des variables ρ et z que tout à l'heure, et eu égard à l'équation ci-dessus (206), devront être remplacées par les expressions (*)

(210) $$\Delta_1^2\varphi=\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,\qquad \Delta_1^2\psi=\left(\frac{d\psi}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2,\qquad \Delta_1^2\varpi=\frac{1}{m^2\rho^2},$$

(*) Ces expressions résultent immédiatement de l'interprétation géométrique de l'invariant différentiel Δ_1, exprimée analytiquement par la formule $\Delta_1\varphi=\frac{d\varphi}{dn}$ (voir notre *Mémoire sur la Courbure des Surfaces*, formule (40bis), page 44), attendu que pour une surface de révolution, l'élément de normale dn, étant situé dans le plan méridien, se confond évidemment en grandeur et direction avec celui de la courbe méridienne elle-même.

On la retrouverait d'ailleurs bien aisément, de même que la condition (208), par voie analytique, en remarquant que pour une pareille surface $\varphi(x,y,z)=f(\rho,z)=\varphi$, où $\rho^2=x^2+y^2$, on a évidemment

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{x}{\rho},\qquad \frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\rho}{dy}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{y}{\rho},$$

de telle sorte qu'en faisant cette double substitution dans ces trois équations (209), on voit qu'elles auront lieu dès lors entre les seules inconnues φ et ψ, et les variables indépendantes ρ et z.

Écrivant donc ces trois équations (209), en y remettant d'abord la valeur (204) de R et celle (210) de $\Delta_1^2\varpi$, ainsi qu'il suit

$$(211)\qquad \Delta_1^2\varphi=\frac{1}{Q.C^2(a^2P-\alpha^2Q)},\qquad \Delta_1^2\psi=\frac{1}{C^2(a^2P-\alpha^2Q).P},\qquad \frac{1}{PQ}=\frac{1}{m^2\rho^2},$$

puis éliminant des deux premières, soit P, soit Q (c'est-à-dire par le fait ψ ou φ) à l'aide de la dernière, ce qui nous donnera les deux suivantes

$$\Delta_1^2\varphi=\frac{1}{C^2(a^2m^2\rho^2-\alpha^2Q^2)},\qquad \Delta_1^2\psi=\frac{1}{C^2(a^2P^2-\alpha^2m^2\rho^2)},$$

et enfin remplaçant à la fois $\Delta_1^2\varphi$ et $\Delta_1^2\psi$ par les expressions précédentes (210), ainsi que P et Q par leurs valeurs (204), puis extrayant les racines pour la dernière (211), nous obtiendrons ainsi, pour tenir lieu des trois équations de gauche (21), les trois équations

$$(212)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\varphi}{d\rho}\right)^2+\left(\dfrac{d\varphi}{dz}\right)^2=\dfrac{1}{C^2a^2}\,\dfrac{1}{m^2\rho^2-\dfrac{\alpha^2a^2}{c^4\,\mathrm{csh}^4(a\varphi+b)}}, \\[2ex] \left(\dfrac{d\psi}{d\rho}\right)^2+\left(\dfrac{d\psi}{dz}\right)^2=\dfrac{-1}{C^2\alpha^2}\,\dfrac{1}{m^2\rho^2-\dfrac{a^2\alpha^2}{c^4\cos^4(\alpha\psi+6)}}. \end{cases}$$

$$(213)\qquad \mathrm{csh}\,(a\varphi+b)\cos(\alpha\psi+6)=\pm\frac{a\alpha}{mc^2}\,\frac{1}{\rho}.$$

---

d'où l'on conclura, pour une surface φ isolément,

$$\Delta_1^2\varphi=\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2\left[\left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2\right]+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2=\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,$$

et, en y adjoignant une autre surface ψ de même nature,

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\psi}{d\rho}\left[\left(\frac{x}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{\rho}\right)^2\right]+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz}=\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\psi}{d\rho}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz}.$$

(C. Q. F. D.)

Les deux inconnues φ et ψ devront donc encore dans le Cas actuel, de même que les inconnues ψ et ϖ dans le Cas III° et le sous-cas précédent 1°, satisfaire d'abord isolément à deux équations aux dérivées partielles du même type (sauf la valeur réelle ou imaginaire des constantes), et ensuite simultanément à l'équation du premier ordre (208). Mais ici la détermination est beaucoup plus complète, parce que, outre ces équations (212), elles doivent satisfaire actuellement non plus seulement à cette équation du premier ordre (208), mais encore à la dernière (213), qui ne contient les inconnues φ et ψ qu'en termes finis seulement.

Avant d'effectuer cette détermination, vidons tout d'abord une question qui s'offre d'elle-même à l'esprit, aussitôt que le problème analytique est posé dans les termes que nous venons de dire, et dont l'examen va nous conduire à une conséquence importante pour la suite du calcul.

Si nous adjoignons aux quatre équations que nous venons d'indiquer, entre les deux inconnues φ et ψ et les variables indépendantes, les deux autres du premier ordre que l'on peut former immédiatement par la différentiation en ρ et z de la dernière (213), et qui seront, en prenant simplement les dérivées logarithmiques de ladite équation,

$$(214)\quad \left\{ \begin{aligned} & a \operatorname{tgh}(a\varphi + b).\frac{d\varphi}{d\rho} - \alpha \operatorname{tang}(\alpha\psi + 6).\frac{d\psi}{d\rho} = -\frac{1}{\rho}, \\ & a \operatorname{tgh}(a\varphi + b).\frac{d\varphi}{dz} - \alpha \operatorname{tang}(\alpha\psi + 6).\frac{d\psi}{dz} = 0, \end{aligned} \right.$$

comme l'on aura alors un total de six équations entre les six quantités φ, $\frac{d\varphi}{d\rho}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, ψ, $\frac{d\psi}{d\rho}$, $\frac{d\psi}{dz}$, et les variables indépendantes ρ et z, en admettant que ces six équations fussent toutes distinctes et compatibles, comme elles suffiraient alors à déterminer algébriquement ces six quantités en ρ et z, les expressions obtenues de cette façon pour φ et ψ constitueraient une solution ***singulière*** du problème (c'est-à-dire sans constante introduite par l'intégration), si les valeurs qu'elles fourniraient directement par la diffé-

rentiation en ρ et z coïncidaient bien effectivement avec les valeurs correspondantes obtenues en même temps par la résolution totale du système que nous venons de spécifier : double condition dont il importe, par conséquent, de s'assurer, si l'on veut être sûr de ne laisser échapper aucune solution du problème.

A cet effet, visant, comme but immédiat, en vue d'obtenir finalement les expressions de φ et ψ en question, à former, par l'élimination des quatre dérivées précitées, une seconde équation analogue à (213), c'est-à-dire ne contenant φ et ψ qu'en termes finis seulement, nous élèverons les deux équations (214) au carré, ce qui nous donnera

$$\left\{\begin{aligned} & a^2 \operatorname{tgh}^2 (a\varphi + \beta).\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + \alpha^2 \operatorname{tang}^2 (\alpha\psi + \beta).\left(\frac{d\psi}{d\rho}\right)^2 \\ & \qquad - 2a\alpha \operatorname{tgh}(a\varphi + b) \operatorname{tang}(\alpha\psi + \beta).\frac{d\varphi}{d\rho}\frac{d\psi}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2}, \\ & a^2 \operatorname{tgh}^2 (\alpha\varphi + b).\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \alpha^2 \operatorname{tang}^2 (\alpha\psi + \beta).\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 \\ & \qquad - 2a\alpha \operatorname{tgh}(a\varphi + b) \operatorname{tang}(\alpha\psi + \beta).\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz} = 0, \end{aligned}\right.$$

et si nous ajoutons alors ces deux dernières, en tenant compte des deux (212), ou, ce qui est la même chose, des deux premières (210) et (209), ainsi que de l'équation (208), nous formerons par là celle-ci, qui pourra dès lors être substituée à l'une quelconque des six équations du système en question, et ne contiendra plus que φ, ψ, et ρ seulement :

$$(215) \qquad a^2 \operatorname{tgh}^2 (a\varphi + b).\frac{1}{QR} + \alpha^2 \operatorname{tang}^2 (\alpha\psi + \beta).\frac{1}{RP} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Or, on reconnait sans calcul que cette équation ne pourra servir, comme on avait pu l'espérer, à déterminer, conjointement avec l'équation (213), les deux inconnues φ et ψ en ρ et z. En effet, elles ne contiennent l'une et l'autre que la seule variable indépendante ρ, à l'exclusion de z ; en admettant donc qu'elles

fussent distinctes et compatibles, comme elles donneraient dans ce cas deux valeurs telles que

$$\varphi = \mathcal{F}_1(\rho), \qquad \psi = \mathcal{F}_2(\rho),$$

on voit qu'il existerait alors nécessairement entre les deux seules inconnues φ et ψ une relation de la forme $F(\varphi, \psi) = 0$, hypothèse inadmissible *a priori*, du moment que les trois variables φ, ψ, ϖ constituent par définition un système de coordonnées. D'où il résulte immédiatement qu'il n'existe aucune solution singulière du problème engendrée de la manière que nous avons indiquée.

Nous arriverons aisément à la même conclusion par un calcul direct, qui aura l'avantage en outre de nous révéler une relation nécessaire entre les constantes, dont la suite du calcul permettra d'apprécier l'importance.

En effet, si, après avoir multiplié par R l'équation que nous venons de former (215), nous y remplaçons alors cette même quantité R par sa valeur (204), ainsi que $\frac{1}{\rho^2}$ par celle déduite de la dernière équation (211), ce qui la transformera dans la suivante

$$\begin{aligned} a^2 \operatorname{tgh}^2(a\varphi + b).\frac{1}{Q} + \alpha^2 \operatorname{tang}^2(\alpha\psi + 6).\frac{1}{P} &= \frac{m^2}{PQ}.C^2(a^2P - \alpha^2Q) \\ &= m^2C^2\left(\frac{a^2}{Q} - \frac{\alpha^2}{P}\right), \end{aligned}$$

et que nous y remettions alors semblablement à la place de P et Q leurs valeurs (204), elle se réduira par cette substitution simplement à celle-ci

$$\begin{aligned} c^2\left[\operatorname{snh}^2(a\varphi + b) + \sin^2(\alpha\psi + 6)\right] &= m^2C^2.c^2\left[\operatorname{csh}^2(a\varphi + b) - \cos^2(\alpha\psi + 6)\right] \\ &= m^2C^2.c^2\left[1 + \operatorname{snh}^2(a\varphi + b) - \{1 - \sin^2(\alpha\psi + 6)\}\right], \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, à la suivante

$$(1 - m^2C^2)\left[\operatorname{snh}^2(a\varphi + b) + \sin^2(\alpha\psi + 6)\right] = 0,$$

dans laquelle le second facteur, ne renfermant que les deux

variables φ et ψ, complètement indépendantes l'une de l'autre, ne peut évidemment être supposé nul, et qui dès lors exigera pour être satisfaite que les constantes m et C vérifient la relation

$$(216) \qquad 1 - m^2C^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad C^2 = \frac{1}{m^2},$$

auquel cas, l'équation précédente devenant alors une identité, il n'existera plus que *cinq* équations seulement entre les six quantités φ, $\frac{d\varphi}{d\rho}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, ψ, $\frac{d\psi}{d\rho}$, $\frac{d\psi}{dz}$: ce qui montre par conséquent de nouveau l'impossibilité de la solution singulière dont nous nous proposions de reconnaître l'existence.

De là il est facile à présent de conclure, avant tout calcul, que la solution définitive du problème ne comportera plus seulement qu'une constante arbitraire nouvelle, en sus de celles déjà introduites, et non plus aucune fonction arbitraire, comme dans les deux Cas susmentionnés des cylindres et des cônes.

En effet, comme on pourra du moins résoudre les cinq équations que nous venons de dire par rapport à cinq des quantités précitées, soit par exemple $\frac{d\varphi}{d\rho}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, ψ, $\frac{d\psi}{d\rho}$, $\frac{d\psi}{dz}$, on obtiendra par cette résolution, en particulier pour les dérivées de φ, des valeurs telles que

$$(217) \qquad \frac{d\varphi}{d\rho} = \Phi_1(\varphi, \rho), \qquad \frac{d\varphi}{dz} = \Phi_2(\varphi, \rho),$$

la variable z n'entrant explicitement dans aucune des équations en question, et dès lors l'intégration de l'équation différentielle totale

$$(218) \qquad d\varphi = \Phi_1 d\rho + \Phi_2 dz$$

achèvera la solution avec une seule constante arbitraire, car l'inconnue φ étant ainsi déterminée, l'équation en termes finis (213) fournira dès lors immédiatement l'expression de la seconde inconnue ψ.

Les calculs que nous venons d'indiquer deviendront évidem-

ment beaucoup plus simples et plus faciles, si dans les mêmes équations nous intervertissons les variables indépendantes et les inconnues, c'est-à-dire si nous prenons φ et ψ pour les premières, et ρ et z pour les secondes; attendu que ladite équation en termes finis (213) ne contenant plus alors que la seule inconnue ρ, les deux expressions analogues aux fonctions Φ_1 et Φ_2 (217), savoir $\frac{dz}{d\varphi} = Z_1$ et $\frac{dz}{d\psi} = Z_2$, que l'on obtiendra par un procédé tout semblable, ne contiendront pas z non plus, mais seulement φ et ψ; en sorte que l'intégration de l'équation

$$dz = Z_1 d\varphi + Z_2 d\psi$$

se réduira à une simple quadrature, au lieu d'avoir à intégrer une équation différentielle totale telle que (218). En outre, en suivant cette voie, la valeur de l'inconnue ρ est d'ores et déjà fournie par l'équation (213), qui donne immédiatement

$$(219) \qquad \rho = \pm \frac{a\alpha}{mc^2} \frac{1}{\operatorname{csh}(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + 6)},$$

en sorte qu'il n'y a plus qu'à rechercher séparément la valeur de la seule inconnue z.

Adoptant donc ce second mode de calcul, qui présente ainsi un avantage considérable sur le premier, et ayant en vue le dernier objet que nous venons de dire, nous rappellerons encore une fois, comme nous l'avons déjà fait à l'occasion du Cas III° (page 160), les formules (16) et (17) de notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (page 18), lesquelles, en y faisant $y = 0$, et par suite $x = \rho$, nous donneront, à la place des deux premières formules de gauche et de la dernière de droite (17) en question, celles-ci

$$(220) \qquad H = \Delta_1^{-2}\varphi = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2, \qquad K = \Delta_1^{-2}\psi = \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2,$$

$$(221) \qquad \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\rho}{d\psi} + \frac{dz}{d\varphi}\frac{dz}{d\psi} = 0,$$

cette dernière tenant évidemment lieu de notre équation (208), du moment qu'elles expriment aussi bien l'une que l'autre l'orthogonalité des deux familles φ et ψ. D'où il suit que nos deux premières équations (211), ou (212), se transformeront, en prenant les inverses des deux membres, par l'échange des variables indépendantes et des inconnues, dans celles-ci

$$(222)\qquad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2=Q.C^2(a^2P-\alpha^2Q),\qquad \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2=P.C^2(a^2P-\alpha^2Q),$$

tandis que la dernière équation en termes finis (213) ou (219), n'étant pas modifiée par cette nouvelle interprétation des variables, donnera, en prenant la dérivée logarithmique de la seconde forme successivement par rapport à φ et ψ,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d.l\rho}{d\varphi}&=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\left[-\log \operatorname{csh}(a\varphi+b)\right]=-\frac{a\operatorname{snh}(a\varphi+b)}{\operatorname{csh}(a\varphi+b)},\\ \frac{d.l\rho}{d\psi}&=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\psi}=\frac{d}{d\psi}\left[-\log\cos(\alpha\psi+6)\right]=\frac{\alpha\sin(\alpha\psi+6)}{\cos(\alpha\psi+6)},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, en multipliant par ρ, et faisant abstraction des premiers et troisièmes membres,

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=-\rho.a\operatorname{tgh}(a\varphi+b),\qquad \frac{d\rho}{d\psi}=\rho.\alpha\operatorname{tang}(\alpha\psi+6).$$

Nous aurons, par conséquent, en élevant au carré, et ayant égard de nouveau à la troisième équation (211), la première des deux expressions

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\frac{PQ}{m^2}.a^2\operatorname{tgh}^2(a\varphi+b),\qquad \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2=\frac{PQ}{m^2}.\alpha^2\operatorname{tang}^2(\alpha\psi+6),$$

et, si nous reportons maintenant ces deux dernières expressions dans les équations précédentes (222), nous en tirerons alors,

pour les carrés des deux quantités que nous avons appelées tout à l'heure Z_1 et Z_2,

$$\left\{\begin{aligned} Z_1^2 &= \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 = Q.C^2(a^2P - \alpha^2Q) - \frac{PQ}{m^2}.a^2 \operatorname{tgh}^2(a\varphi + b),\\ Z_2^2 &= \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2 = P.C^2(a^2P - \alpha^2Q) - \frac{PQ}{m^2}.\alpha^2 \operatorname{tang}^2(\alpha\psi + 6),\end{aligned}\right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{aligned} Z_1^2 &= C^2Q\left[a^2P\left(1 - \frac{1}{C^2m^2}\operatorname{tgh}^2(a\varphi + b)\right) - \alpha^2Q\right],\\ Z_2^2 &= C^2P\left[a^2P - \alpha^2Q\left(1 + \frac{1}{C^2m^2}\operatorname{tang}^2(\alpha\psi + 6)\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Or, il est très facile de voir que ces expressions des dérivées Z_1 et Z_2 rempliront bien la condition d'intégrabilité en vertu de la relation nécessaire (216) entre les constantes C et m (*), car la première de ces deux dernières égalités devient par cette condition, en ayant égard de nouveau aux valeurs (204) de P et Q,

$$\begin{aligned} Z_1^2 &= C^2Q\left[a^2P\left(1 - \frac{\operatorname{snh}^2(a\varphi + b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)}\right) - \alpha^2Q\right]\\ &= C^2Q\left[c^2P.\frac{a^2}{c^2}\,\frac{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b) - \operatorname{snh}^2(a\varphi + b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} - \alpha^2Q\right]\\ &= C^2Q\,[c^2P.Q - \alpha^2Q] = C^2Q^2\left(c^2\frac{\alpha^2}{c^2\cos^2(\alpha\psi + 6)} - \alpha^2\right)\\ &= C^2Q^2\alpha^2\left(\frac{1}{\cos^2(\alpha\psi + 6)} - 1\right) = C^2Q^2\alpha^2\operatorname{tang}^2(\alpha\psi + 6),\end{aligned}$$

(*) On voit par là l'importance de cette relation (216) dans la théorie, car si nous n'eussions pas démontré tout d'abord sa *nécessité*, il est clair que la même solution à laquelle nous allons arriver tout à l'heure, étant obtenue dans cette hypothèse en établissant *arbitrairement*, pour les besoins de l'intégration, la même relation entre les constantes, ne saurait plus être acceptée que comme une solution particulière intéressante du problème spécial au Cas envisagé, la question de la recherche de la solution la plus générale relative à ce même Cas demeurant absolument entière comme auparavant.

et la seconde deviendra de la même façon

$$Z_2^2 = C^2P\left[a^2P - \alpha^2Q\left(1 + \text{tang}^2(\alpha\psi + 6)\right)\right]$$
$$= C^2P\left[a^2P - c^2Q.\frac{\alpha^2}{c^2}\frac{1}{\cos^2(\alpha\psi + 6)}\right] = C^2P\left[a^2P - c^2Q.P\right]$$
$$= C^2P^2\left(a^2 - c^2\frac{a^2}{c^2\,\text{csh}^2(a\varphi + b)}\right) = C^2P^2a^2\left(1 - \frac{1}{\text{csh}^2(a\varphi + b)}\right)$$
$$= C^2P^2a^2\frac{\text{csh}^2(a\varphi + b) - 1}{\text{csh}^2(a\varphi + b)} = C^2P^2a^2\,\text{tgh}^2(a\varphi + b).$$

D'où il résultera, en extrayant les racines, pour Z_1 et Z_2, les valeurs

(223) $$Z_1 = \pm\, CQ\alpha\,\text{tang}(\alpha\psi + 6), \qquad Z_2 = \pm\, CPa\,\text{tgh}(a\varphi + b),$$

expressions qui donneront, en ayant égard de nouveau aux valeurs (204),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dZ_1}{d\psi} &= \pm\, CQ\alpha\frac{\alpha}{\cos^2(\alpha\psi + 6)} = \pm\frac{C}{c^2}\frac{a^2\alpha^2}{\text{csh}^2(a\varphi + b)\cos^2(\alpha\psi + 6)}, \\ \frac{dZ_2}{d\varphi} &= \pm\, CPa\frac{a}{\text{csh}^2(a\varphi + b)} = \pm\frac{C}{c^2}\frac{\alpha^2a^2}{\cos^2(\alpha\psi + 6)\,\text{csh}^2(a\varphi + b)}, \end{aligned}\right.$$

et satisfont par conséquent à la condition d'intégrabilité $\frac{dZ_1}{d\psi} = \frac{dZ_2}{d\varphi}$, à la seule condition de prendre le même signe devant les deux expressions.

Nous aurons donc dès lors, avec les valeurs (223), pour expression de la différentielle dz,

$$dz = Z_1d\varphi + Z_2d\psi = \pm\, CQ\alpha\,\text{tang}(\alpha\psi + 6)\,d\varphi \pm CPa\,\text{tgh}(a\varphi + b)\,d\psi$$
$$= \pm\, C\left[\alpha\,\text{tang}(\alpha\psi + 6).\frac{a}{c^2}\frac{ad\varphi}{\text{csh}^2(a\varphi + b)} + a\,\text{tgh}(a\varphi + b).\frac{\alpha}{c^2}\frac{\alpha d\psi}{\cos^2(\alpha\psi + 6)}\right]$$
$$= \pm\frac{Ca\alpha}{c^2}\left[\text{tang}(\alpha\psi + 6).d\,\text{tgh}(a\varphi + b) + \text{tgh}(a\varphi + b).d\,\text{tang}(\alpha\psi + 6)\right],$$

et par conséquent, en conservant comme arbitraire la constante m_r et introduisant, pour abréger l'écriture, à la place de la con-

stante c, la nouvelle constante $l = \frac{C a \alpha}{c^2} = \frac{a\alpha}{mc^2}$, nous aurons, en intégrant, pour l'inconnue z, définitivement la valeur

$$(224) \qquad z = z_0 \pm l \operatorname{tgh}(a\varphi + b) \operatorname{tang}(\alpha\psi + \beta),$$

tandis que l'expression (219) de ρ, obtenue de prime abord, deviendra, en y introduisant la même constante l,

$$(225) \qquad \rho = \pm \frac{l}{\operatorname{csh}(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + \beta)}.$$

La possession de ces deux derniers résultats permettra maintenant, conjointement avec l'équation (205), d'obtenir aisément l'expression des trois coordonnées x, y, z, en fonction des coordonnées φ, ψ, ϖ, qui est essentiellement le but qu'il s'agissait d'atteindre.

En effet, cette équation (205) donnant immédiatement

$$y = x \operatorname{tang}(m\varpi + n),$$

et par suite

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = x^2\left[1 + \operatorname{tang}^2(m\varpi + n)\right] = \frac{x^2}{\cos^2(m\varpi + n)},$$

on déduira successivement de ces deux égalités

$$\pm\rho = \frac{x}{\cos(m\varpi + n)}, \qquad x = \pm\rho\cos(m\varpi + n), \qquad y = \pm\rho\sin(m\varpi + n),$$

et dès lors, en se reportant aux valeurs (225) et (224), que nous venons de trouver pour ρ et z, on obtiendra les trois expressions

$$(226) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \pm l \frac{\cos(m\varpi + n)}{\operatorname{csh}(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + \beta)}, \\ y &= \pm l \frac{\sin(m\varpi + n)}{\operatorname{csh}(a\varphi + b)\cos(\alpha\psi + \beta)}, \\ z &= \pm l \operatorname{tgh}(a\varphi + b)\operatorname{tang}(\alpha\psi + \beta) + z_0, \end{aligned}\right.$$

qui renferment, comme on le voit, outre la constante additive z_0, sept constantes arbitraires, l, m, n, a, b, α et β.

Un dernier point reste à éclaircir, pour traiter ce dernier sous-cas avec la même précision que les Cas précédents, à savoir la détermination exacte au point de vue géométrique des deux surfaces de révolution φ et ψ qui entrent alors dans la composition du système, et ce dernier résultat, outre son importance propre, nous conduira à une conséquence analytique intéressante, qui eût échappé à une recherche directe, et qu'il n'était d'ailleurs évidemment pas possible de prévoir.

Ce dernier calcul se bornant simplement à éliminer successivement ψ et φ entre les deux équations (225) et (224), nous les récrirons à cet effet l'une et l'autre comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{csh}(a\varphi+b)\cos(\alpha\psi+\beta)=\pm\frac{l}{\rho},\\ &\operatorname{snh}(a\varphi+b)\sin(\alpha\psi+\beta)=\pm\frac{z-z_0}{l}\operatorname{csh}(a\varphi+b)\cos(\alpha\psi+\beta)=\pm\frac{z-z_0}{\rho}\end{aligned}\right.$$

Puis tirant de là successivement

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{csh}(a\varphi+b)=\pm\frac{l}{\rho}\frac{1}{\cos(\alpha\psi+\beta)}, \qquad &&\operatorname{snh}(a\varphi+b)=\pm\frac{z-z_0}{\rho}\frac{1}{\sin(\alpha\psi+\beta)},\\ &\cos(\alpha\psi+\beta)=\pm\frac{l}{\rho}\frac{1}{\operatorname{csh}(a\varphi+b)}, \qquad &&\sin(\alpha\psi+\beta)=\pm\frac{z-z_0}{\rho}\frac{1}{\operatorname{snh}(a\varphi+b)},\end{aligned}\right.$$

et ayant alors égard aux deux formules parallèles

$$(227)\qquad \operatorname{csh}^2 u-\operatorname{snh}^2 u=1,\qquad \cos^2 v+\sin^2 v=1,$$

nous trouverons sans peine pour les deux équations demandées

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{l^2}{\rho^2}\frac{1}{\cos^2(\alpha\psi+\beta)}-\frac{(z-z_0)^2}{\rho^2}\frac{1}{\sin^2(\alpha\psi+\beta)}=1,\\ &\frac{l^2}{\rho^2}\frac{1}{\operatorname{csh}^2(a\varphi+b)}+\frac{(z-z_0)^2}{\rho^2}\frac{1}{\operatorname{snh}^2(a\varphi+b)}=1;\end{aligned}\right.$$

équations qui pourront encore être écrites, en les multipliant respectivement par $\rho^2 \cos^2(\alpha\psi + 6)$ et $\rho^2 \operatorname{csh}^2(a\varphi + b)$, et les transposant ensuite,

$$
(228) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\rho^2}{\dfrac{1}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)}} + \frac{(z - z_0)^2}{-\dfrac{\operatorname{snh}^2(a\varphi + b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)}} = l^2, \\
&\frac{\rho^2}{\dfrac{1}{\cos^2(\alpha\psi + 6)}} + \frac{(z - z_0)^2}{\dfrac{\sin^2(\alpha\psi + 6)}{\cos^2(\alpha\psi + 6)}} = l^2,
\end{aligned}
\right. \quad (*)
$$

et représenteront par suite, en coordonnées rectilignes ρ et z, deux coniques, dont les demi-distances focales ont pour carrés respectivement, eu égard aux deux formules classiques (227),

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{l^2}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} + \frac{l^2 \operatorname{snh}^2(a\varphi + b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} = l^2 \frac{1 + \operatorname{snh}^2(a\varphi + b)}{\operatorname{csh}^2(a\varphi + b)} = l^2, \\
&\frac{l^2}{\cos^2(\alpha\psi + 6)} - \frac{l^2 \sin^2(\alpha\psi + 6)}{\cos^2(\alpha\psi + 6)} = l^2 \frac{1 - \sin^2(\alpha\psi + 6)}{\cos^2(\alpha\psi + 6)} = l^2,
\end{aligned}
\right.
$$

ce qui montre que les méridiennes des deux familles de surfaces de révolution sont deux familles de coniques homofocales, qui sont manifestement toutes des hyperboles pour la première, et de même des ellipses pour la seconde.

Voici maintenant en quoi consiste le fait analytique sur lequel nous nous proposons d'appeler l'attention.

Comme nous l'avons déjà observé à propos de deux Cas précédents, à partir du moment où nous avons reconnu que le système orthogonal se composait dans l'hypothèse actuelle d'une famille

---

(*) Ces équations coïncident bien effectivement avec celles que Lamé obtient, en les rapportant par sa méthode à leurs paramètres thermométriques, pour les surfaces de révolution du second ordre homofocales. [Voir, pour la première famille, *Leçons sur les Fonctions Inverses*, § XVI, équation (14), page 23, en se reportant à notre note relative au Cas précédent IV° (page 205 de ce Mémoire); et pour la seconde famille LAMÉ, *ibid.*, § XV, équation (10), page 21.]

de plans méridiens, et de deux familles de surfaces de révolution, il est bien clair que le problème se réduisait alors à déterminer, ainsi que nous l'avons fait pour les susdits Cas des cylindres et des cônes (pp. 170-171 et 227), le système le plus général de deux familles de surfaces de révolution à la fois isothermes et orthogonales entre elles, conditions qui, eu égard à l'expression classique de l'invariant Δ_2 en coordonnées cylindriques, déjà rappelée dans notre Chapitre II [voir la note de la page 62, formules (6)], eussent été exprimées pour les familles φ et ψ par les trois équations

$$(229) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \dfrac{d^2\varphi}{dz^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\varphi}{d\rho} = 0, \qquad \dfrac{d^2\psi}{d\rho^2} + \dfrac{d^2\psi}{dz^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\psi}{d\rho} = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{d\varphi}{d\rho}\dfrac{d\psi}{d\rho} + \dfrac{d\varphi}{dz}\dfrac{d\psi}{dz} = 0, \end{array} \right.$$

complètement analogues aux équations (74) ou (157), relatives aux deux Cas que nous venons de rappeler. Et il est bien clair qu'il y a dès lors identité absolue entre la solution de ce dernier problème analytique ainsi formulé, et celle qui complète, conjointement avec l'équation (205) des plans méridiens, le système triple orthogonal primitivement demandé, en sorte qu'il soit indifférent d'obtenir cette solution par l'intégration directe de ce dernier système (229), ou par celle des équations qui nous ont conduit au résultat formulé par les équations (228), ou (224) et (225).

Or il se présente cette circonstance singulière, que tandis que pour les cylindres et les cônes, c'est-à-dire pour le système à coefficients constants (74) ou (157), la solution la plus générale, représentée par les deux équations (86) ou (158), renferme les deux *fonctions* arbitraires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ du type (68), c'est-à-dire par conséquent les deux fonctions entièrement arbitraires Ψ et Π, pour le système (229), au contraire, qui ne diffère du précédent que par l'introduction dans les deux premières équations d'un même terme du premier ordre, à coefficient variable et d'ailleurs très simple, la solution la plus générale pour ce système, savoir

celle obtenue tout à l'heure, qui est représentée pour les deux équations (228), ou (224) et (225), ne renferme plus simplement que les cinq *constantes* arbitraires a, b, α, 6, et l, et la constante simplement additive z_0.

Si l'on tient compte en outre de ce fait, que, de même que pour l'équation (136) du sous-cas précédent 1°, ni la méthode de Laplace, ni la méthode d'Ampère ne réussissent pour l'intégration isolée des deux équations du second ordre (229), lesquelles n'admettent pas non plus d'intégrale intermédiaire (*), en sorte que la même voie qui nous a conduits tout naturellement à l'intégration du système (74) nous eût été fermée pour ce dernier système (229), on voit ainsi que les résultats que nous venons de rencontrer comme solution de notre problème général pour ce dernier Cas particulier V° (sous-cas 3°), outre leur intérêt propre relativement à ce problème, nous ont encore révélé une sorte d'anomalie analytique très curieuse, qui fournirait peut-être quelque indication utile pour la théorie, non encore faite, des systèmes d'équations aux dérivées partielles simultanées entre plusieurs inconnues, et qu'il eût été en tout cas fort difficile d'apercevoir en envisageant directement la question analytique posée par les seules équations (229), en dehors du

---

(*) Cette circonstance, qui n'est une pierre d'achoppement que pour la méthode d'Ampère seule, persiste évidemment quelles que soient les variables indépendantes que l'on introduise. La méthode de Laplace, au contraire, qui n'exige pas la même condition que celle d'Ampère, peut fort bien, pour la même équation, échouer avec certaines variables indépendantes, et réussir avec d'autres. Dans cette pensée, nous avons essayé d'introduire dans la première équation (229) successivement différents systèmes de variables indépendantes, parmi lesquelles nous indiquerons en particulier les variables $u = \rho + iz$, $v = \rho - iz$, analogues à celles employées pour les Cas précités des Cylindres et des Cônes, qui ramènent cette équation au type plus symétrique

$$2(u+v)\frac{d^2\varphi}{dudv}+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}=0,$$

dont Lamé fait dépendre la recherche de la solution la plus générale du problème, ainsi que nous le dirons dans l'un des Chapitres suivants de ce Mémoire, et dont l'intégrale générale, si on pouvait l'obtenir, présenterait à ce double point de vue un véritable intérêt. Mais aucun des systèmes, ainsi essayés par nous, ne nous a permis l'emploi de la méthode de Laplace à l'équation précitée du second ordre du type (229).

problème plus général, dont la recherche nous a amené incidemment à cette constatation.

Nous en dirions autant, avec la même raison, de la solution la plus générale elle-même du système (229), à savoir celle représentée par les deux équations (228), et qui montrent que les seules surfaces de révolution autour du même axe, capables de constituer deux familles à la fois isothermes et orthogonales entre elles, sont exclusivement des surfaces du second ordre homofocales, en y comprenant toujours, bien entendu, leurs cas-limites, c'est-à-dire les paraboloïdes, les cônes, et les cylindres, ainsi que nous le faisons dans notre Chapitre II (pages 100-101), à l'occasion de l'équation (116).

Ayant ainsi épuisé dans ce Chapitre tous les cas particuliers où l'on suppose nulle quelqu'une des six dérivées sur lesquelles a porté toute cette discussion [puisque, d'après l'équation (15), on ne peut supposer nulle une seule d'entre elles seulement], nous allons traiter maintenant, dans la Seconde Partie de ce Mémoire, le Cas le plus général, c'est-à-dire celui où ces dérivées sont supposées recevoir une valeur quelconque, sauf la valeur zéro qui correspond aux Cas successivement étudiés dans cette Première Partie.

SECONDE PARTIE

CAS GÉNÉRAL DU PROBLÈME

ET APPLICATIONS.

CHAPITRE IV.

Détermination, pour le cas le plus général, en fonction des coordonnées curvilignes, des trois invariants différentiels Δ_1 relatifs à ces coordonnées.

Réduction de ce problème a la recherche séparée de trois fonctions d'une seule variable. — La première moitié de la tâche que nous nous sommes imposée consiste, avons-nous dit au début du Chapitre précédent (pages 123 et 135), à déterminer de la façon la plus générale, en fonction des coordonnées curvilignes elles-mêmes, les trois invariants différentiels Δ_1 correspondant à ces trois coordonnées, ou, ce qui revient au même, à déterminer les trois fonctions de deux variables seulement P, Q, R, que nous leur avons substituées comme inconnues, à l'aide des six équations (13) d'une part, et (19) de l'autre, les trois premières, qui sont du premier ordre et se réduisent à deux distinctes seulement, pouvant être remplacées, si l'on veut, par les deux équations (15) et (17).

La voie qu'il nous faut parcourir pour parvenir à ce but étant assez longue et hérissée d'obstacles qui nous obligeront à des sinuosités ou des détours, capables de faire perdre de vue le fil conducteur des calculs, nous la fractionnerons encore une fois en une série de sept étapes successives, que l'on nous permettra d'accuser nettement (malgré le caractère exclusivement analytique de la méthode) en énonçant en tête de chacune le terme ou résultat auquel elle devra nous conduire, ainsi qu'un usage constant s'en est établi, depuis Euclide, pour l'exposition et l'enseignement des Éléments de la Géométrie. De cette façon, la route se trouvant jalonnée en quelque sorte en ses points remarquables, une fois parvenu au but, l'esprit du Lecteur embrassera facilement d'un seul coup d'œil, et se remémorera aisément toute la carrière parcourue, malgré sa longueur, ses obstacles et ses détours.

1° « *Les trois inconnues* P, Q, R *ne dépendent que de six fonctions d'une seule variable.* » — Occupons-nous d'abord du groupe d'équations du premier ordre (13). Différentiant par rapport à φ la première équation, nous trouverons, eu égard aux hypothèses (8) ou (9),

$$P\left(\frac{Q^2}{\varpi\varphi}\frac{R}{\psi}+\frac{Q}{\varpi}\frac{R^2}{\psi\varphi}\right)=\frac{P}{\varpi}\left(Q\frac{R^2}{\psi\varphi}+\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\psi}\right)+\frac{P}{\psi}\left(R\frac{Q^2}{\varpi\varphi}+\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}\right).$$

ou simplement, en ayant égard à l'équation de remplacement (15),

$$\left(P\frac{Q}{\varpi}-Q\frac{P}{\varpi}\right)\frac{R^2}{\varphi\psi}=\left(R\frac{P}{\psi}-P\frac{R}{\psi}\right)\frac{Q^2}{\varpi\varphi};$$

c'est-à-dire que nous obtiendrons évidemment, en agissant de même à l'égard de l'une quelconque des deux autres équations (13), les deux équations du second ordre

$$(1)\qquad \left(Q\frac{R}{\varphi}-R\frac{Q}{\varphi}\right)\frac{P^2}{\psi\varpi}=\left(R\frac{P}{\psi}-P\frac{R}{\psi}\right)\frac{Q^2}{\varpi\varphi}=\left(P\frac{Q}{\varpi}-Q\frac{P}{\varpi}\right)\frac{R^2}{\varphi\psi}.$$

Or, ayant examiné séparément dans le Chapitre précédent tous les Cas particuliers pour lesquels l'une quelconque des six dérivées premières qui figurent dans ces équations est supposée constamment nulle, nous devrons maintenant exclure cette hypothèse, ou en d'autres termes supposer expressément que chacune d'elles est en général, c'est-à-dire sauf en des points exceptionnels, différente de zéro. Ayant donc mis les trois équations (13) sous la forme

$$\begin{cases}\dfrac{R}{\psi}\left(P\dfrac{Q}{\varpi}-Q\dfrac{P}{\varpi}\right)=R\dfrac{P}{\psi}\dfrac{Q}{\varpi},\\[2ex] \dfrac{P}{\varpi}\left(Q\dfrac{R}{\varphi}-R\dfrac{Q}{\varphi}\right)=P\dfrac{Q}{\varpi}\dfrac{R}{\varphi},\\[2ex] \dfrac{Q}{\varphi}\left(R\dfrac{P}{\psi}-P\dfrac{R}{\psi}\right)=Q\dfrac{R}{\varphi}\dfrac{P}{\psi},\end{cases}$$

nous pourrons alors, en divisant tout d'abord ces trois équations par les facteurs $\frac{P}{\psi}$, $\frac{Q}{\varpi}$, $\frac{R}{\varphi}$, en tirer les valeurs

$$P\frac{Q}{\varpi}-Q\frac{P}{\varpi}=\frac{R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}}{\frac{R}{\psi}},\qquad Q\frac{R}{\varphi}-R\frac{Q}{\varphi}=\frac{P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}}{\frac{P}{\varpi}},\qquad R\frac{P}{\psi}-P\frac{R}{\psi}=\frac{Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}}{\frac{Q}{\varphi}},$$

lesquelles, étant remises dans les deux équations obtenues tout à l'heure (1), les transformeront dans les suivantes

$$\frac{P\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}}{\frac{P}{\varpi}}\frac{P^2}{\psi\varpi}=\frac{Q\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}}{\frac{Q}{\varphi}}\frac{Q^2}{\varpi\varphi}=\frac{R\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}}{\frac{R}{\psi}}\frac{R^2}{\varphi\psi};$$

puis, en second lieu, multiplier de même haut et bas chacun des rapports égaux ainsi obtenus, respectivement par les trois autres facteurs $\frac{P}{\psi}$, $\frac{Q}{\varpi}$, $\frac{R}{\varphi}$, ce qui nous donnera de nouveau, à la place des mêmes équations, les deux autres

$$\frac{P.\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}}{\frac{P}{\psi}\frac{P}{\varpi}}\frac{P^2}{\psi\varpi}=\frac{Q.\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}}{\frac{Q}{\varpi}\frac{Q}{\varphi}}\frac{Q^2}{\varpi\varphi}=\frac{R.\frac{R}{\varphi}\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}}{\frac{R}{\varphi}\frac{R}{\psi}}\frac{R^2}{\varphi\psi}$$

et enfin, cela fait, diviser simultanément ces deux dernières équations par le produit $\frac{P}{\psi}\frac{Q}{\varpi}\frac{R}{\varphi}$, qui est par hypothèse différent de zéro (*), de manière à les ramener à la forme beaucoup plus

(*) C'est précisément à cause de ces multiplications ou divisions itératives par les unes ou les autres des six dérivées des fonctions P, Q, R, opérations nécessaires, comme on le voit, pour arriver à la forme d'équation (2), d'où ressortira toute notre recherche, que nous avons dû forcément, au risque d'allonger sensiblement notre travail, examiner dans un chapitre à part, comme nous l'avons fait, les cas particuliers dans lesquels ces dérivées étaient supposées nulles.

avantageuse pour notre recherche

$$(2)\qquad \frac{P\,\frac{P^2}{\psi\varpi}}{\frac{P}{\psi}\,\frac{P}{\varpi}} = \frac{Q\,\frac{Q^2}{\varpi\varphi}}{\frac{Q}{\varpi}\,\frac{Q}{\varphi}} = \frac{R\,\frac{R^2}{\varphi\psi}}{\frac{R}{\varphi}\,\frac{R}{\psi}} = m,$$

en désignant par m la valeur commune de ces rapports. Or il est manifeste que cette valeur commune ne peut être qu'une simple constante, car, si l'on se reporte aux hypothèses (9), on voit que cette valeur commune ne devra contenir, ni φ en raison de sa première expression, ni ψ à cause de la seconde, ni ϖ eu égard à la troisième : d'où il suit que les deux équations (2), auxquelles nous étions parvenus tout à l'heure, équivaudront en fait aux trois équations beaucoup plus simples

$$P\,\frac{P^2}{\psi\varpi} = m\,\frac{P}{\psi}\,\frac{P}{\varpi}, \qquad Q\,\frac{Q^2}{\varpi\varphi} = m\,\frac{Q}{\varpi}\,\frac{Q}{\varphi}, \qquad R\,\frac{R^2}{\varphi\psi} = m\,\frac{R}{\varphi}\,\frac{R}{\psi},$$

qui, outre qu'elles ne renferment qu'une seule inconnue chacune, sont intégrables, pour ainsi dire immédiatement, par simple quadrature. Car la première, par exemple, pouvant s'écrire, en la divisant par le produit $P\,\frac{P}{\psi}$, qui n'est pas nul,

$$\frac{\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{P}{\psi}\right)}{\frac{P}{\psi}} = m\,\frac{\frac{P}{\varpi}}{P},$$

donnera de suite en intégrant, P étant indépendant de φ,

$$\log\frac{P}{\psi} = m\log P + \log f(\psi), \qquad \text{ou} \qquad \frac{P}{\psi} = P^m f(\psi),$$

équation que nous récrirons, en multipliant par $(1-m)\,P^{-m}d\psi$,

$$(1-m)\,P^{-m}\,\frac{P}{\psi}\,d\psi = (1-m)\,f(\psi)\,d\psi,$$

et qui donnera dès lors, en intégrant de nouveau, et faisant $\int(1 - m) f(\psi)\, d\psi = \Psi_1(\psi)$, Ψ_1 désignant ainsi que Π_2 deux fonctions arbitraires d'une seule variable

$$P^{1-m} = \Psi_1(\psi) + \Pi_2(\varpi), \qquad \text{ou} \qquad P = \left[\Psi_1(\psi) + \Pi_2(\varpi)\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

D'où il suit qu'en faisant définitivement $\frac{1}{1-m} = n$, nous aurons comme première expression des trois inconnues P, Q, R les trois suivantes

$$(3) \qquad P = \left[\Psi_1(\psi) + \Pi_2(\varpi)\right]^n, \qquad Q = \left[\Pi_1(\varpi) + \Phi_2(\varphi)\right]^n, \qquad R = \left[\Phi_1(\varphi) + \Psi_2(\psi)\right]^n,$$

qui ne dépendent que de six fonctions d'une seule variable $\Phi_1, \Psi_1, \Pi_1, \Phi_2, \Psi_2, \Pi_2$.

2° « *Les six fonctions précitées d'une seule variable se réduisent à trois seulement, dont une de chaque variable,* $\Phi(\varphi)$, $\Psi(\psi)$, $\Pi(\varpi)$. » — Les trois expressions auxquelles nous venons de parvenir ont été obtenues en différentiant tout d'abord les équations proposées (13); elles représentent donc une solution plus large que celle qui convient à la question, et il ne faudra garder parmi les expressions de la forme précédente (3) que celles qui satisferont effectivement à ces équations (13) elles-mêmes, ou, ce qui est la même chose, aux deux équations (15) et (17), qui leur sont, comme on l'a vu, complètement équivalentes.

A cet effet lesdites expressions (3) donnant par la différentiation

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{P}{\psi} = n(\Psi_1 + \Pi_2)^{n-1}.\Psi_1', \qquad \frac{Q}{\varpi} = n(\Pi_1 + \Phi_2)^{n-1}.\Pi_1', \qquad \frac{R}{\varphi} = n(\Phi_1 + \Psi_2)^{n-1}.\Phi_1', \\ &\frac{P}{\varpi} = n(\Psi_1 + \Pi_2)^{n-1}.\Pi_2', \qquad \frac{Q}{\varphi} = n(\Pi_1 + \Phi_2)^{n-1}.\Phi_2', \qquad \frac{R}{\psi} = n(\Phi_1 + \Psi_2)^{n-1}.\Psi_2', \end{aligned} \right.$$

nous trouverons en substituant, en premier lieu, dans l'équation (15),

$$(5) \qquad n^3(\Psi_1 + \Pi_2)^{n-1}(\Pi_1 + \Phi_2)^{n-1}(\Phi_1 + \Psi_2)^{n-1}(\Psi_1'\Pi_1'\Phi_1' + \Pi_2'\Phi_2'\Psi_2') = 0,$$

équation composée de quatre facteurs variables dont le dernier seul évidemment peut s'annuler, car dans chacun des trois premiers facteurs les deux termes qui le composent dépendent chacun d'une variable différente. Cette équation se réduisant donc à

$$(5^{\text{bis}}) \qquad \Phi'_1\Psi'_1\Pi'_1 + \Phi'_2\Psi'_2\Pi'_2 = 0,$$

et pouvant dès lors être écrite aussi bien sous l'une ou l'autre des trois formes

$$\frac{\Phi'_2}{\Phi'_1} = -\frac{\Psi'_1}{\Psi'_2}\frac{\Pi'_1}{\Pi'_2} = p, \qquad \frac{\Psi'_2}{\Psi'_1} = -\frac{\Pi'_1}{\Pi'_2}\frac{\Phi'_1}{\Phi'_2} = q, \qquad \frac{\Pi'_2}{\Pi'_1} = -\frac{\Phi'_1}{\Phi'_2}\frac{\Psi'_1}{\Psi'_2} = r,$$

montre que les valeurs respectives de ces trois suites de rapports p, q, r sont de simples constantes, car, dans la première suite, par exemple, le premier rapport ne dépend que de φ, et le second de ψ et ϖ seulement, et de même en permutant φ, ψ, ϖ, pour les deux autres suites.

De plus, ces trois séries d'égalités, étant multipliées membre à membre, donneront, en faisant abstraction des membres intermédiaires,

$$\frac{\Phi'_2\Psi'_2\Pi'_2}{\Phi'_1\Psi'_1\Pi'_1} = pqr, \qquad \text{ou simplement} \qquad -1 = pqr,$$

si l'on tient compte de nouveau de la précédente équation (5bis); c'est-à-dire, en résumé, que les six fonctions $\Phi_1, \Psi_1, \Pi_1, \Phi_2, \Psi_2, \Pi_2$ seront liées par les trois relations.

$$(6) \qquad \Phi'_2 = p\Phi'_1, \qquad \Psi'_2 = q\Psi'_1, \qquad \Pi'_2 = r\Pi'_1,$$

les trois constantes p, q, r étant elles-mêmes assujetties à vérifier la condition

$$(7) \qquad pqr + 1 = 0.$$

Par où l'on voit déjà que les expressions de P, Q, R ne dépendent en réalité que de trois fonctions d'une seule variable seule-

ment, au lieu de six que comportait la forme obtenue de prime abord (3).

Afin de n'avoir dans le résultat à intervenir que des constantes séparément arbitraires, nous introduirons, à la place des trois constantes p, q, r, supposées liées par la relation (7), trois autres constantes g, h, k, définies par les égalités

$$p = -\frac{k}{g}, \qquad q = -\frac{g}{h}, \qquad r = -\frac{h}{k},$$

que nous choisissons de telle sorte que cette même relation se trouve vérifiée, quelles que soient ces nouvelles constantes g, h, k; et alors les trois égalités précédentes (6) devenant avec ces nouvelles constantes

$$\Phi'_2 = -\frac{k}{g}\Phi'_1, \qquad \Psi'_2 = -\frac{g}{h}\Psi'_1, \qquad \Pi'_2 = -\frac{h}{k}\Pi'_1,$$

donneront en intégrant, et désignant encore par kb, gc, ha, trois autres constantes arbitraires

$$\Phi_2 = -\frac{k}{g}\Phi_1 + kb, \qquad \Psi_2 = -\frac{g}{h}\Psi_1 + gc, \qquad \Pi_2 = -\frac{h}{k}\Pi_1 + ha,$$

valeurs qui, étant reportées dans les expressions ci-dessus (3), transformeront celles-ci dans les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} P &= \left(\Psi_1 - \frac{h}{k}\Pi_1 + ha\right)^n = h^n\left(\frac{1}{h}\Psi_1 - \frac{1}{k}\Pi_1 + a\right)^n, \\ Q &= \left(\Pi_1 - \frac{k}{g}\Phi_1 + kb\right)^n = k^n\left(\frac{1}{k}\Pi_1 - \frac{1}{g}\Phi_1 + b\right)^n, \\ R &= \left(\Phi_1 - \frac{g}{h}\Psi_1 + gc\right)^n = g^n\left(\frac{1}{g}\Phi_1 - \frac{1}{h}\Psi_1 + c\right)^n, \end{aligned}\right.$$

ou plus simplement en écrivant respectivement α, β, γ, à la place de h^n, k^n, g^n, et Φ, Ψ, Π, au lieu de $\frac{1}{g}\Phi_1$, $\frac{1}{h}\Psi_1$, et $\frac{1}{k}\Pi_1$:

(8) $$P = \alpha(\Psi - \Pi + a)^n, \qquad Q = \beta(\Pi - \Phi + b)^n, \qquad R = \gamma(\Phi - \Psi + c)^n.$$

Ce premier résultat obtenu, il faudra substituer de même ces valeurs, ainsi que celles qui en résulteraient pour les six dérivées $\frac{P}{\psi}, \frac{P}{\varpi}, \frac{Q}{\varphi}, \dots \frac{R}{\psi}$, dans l'autre équation de remplacement (17). A cette fin, convenant de désigner par A, B, C, en vue de faciliter les écritures, les trois quantités

(9) $$A = \Psi - \Pi + a, \qquad B = \Pi - \Phi + b, \qquad C = \Phi - \Psi + c,$$

lesquelles donneront, comme on le voit, l'égalité

(10) $$A + B + C = a + b + c,$$

les expressions ci-dessus (8), qui deviennent alors

(11) $$P = \alpha A^n, \qquad Q = \beta B^n, \qquad R = \gamma C^n,$$

fourniront maintenant, au lieu des valeurs (4), celles-ci

(12) $$\left\{\begin{aligned} \frac{P}{\psi} &= n\alpha A^{n-1}.\Psi', & \frac{Q}{\varpi} &= n\beta B^{n-1}\,\Pi', & \frac{R}{\varphi} &= n\gamma C^{n-1}.\Phi', \\ \frac{P}{\varpi} &= -n\alpha A^{n-1}.\Pi', & \frac{Q}{\varphi} &= -n\beta B^{n-1}.\Phi', & \frac{R}{\psi} &= -n\gamma C^{n-1}.\Psi', \end{aligned}\right.$$

lesquelles, étant remises dans la susdite équation (17), donneront de prime abord pour résultat

$$\begin{aligned} &-\alpha A^n.\,n\beta B^{n-1}.\,n\gamma C^{n-1}.(\Phi'\Psi' + \Pi'\Phi' + \Psi'\Pi') \\ &-\beta B^n.\,n\gamma C^{n-1}.\,n\alpha A^{n-1}.(\Psi'\Pi' + \Phi'\Psi' + \Pi'\Phi') \\ &-\gamma C^n.\,n\alpha A^{n-1}.\,n\beta B^{n-1}.(\Pi'\Phi' + \Psi'\Pi' + \Phi'\Psi') = 0, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$n^2\alpha\beta\gamma A^{n-1}B^{n-1}C^{n-1}(A + B + C)(\Psi'\Pi' + \Pi'\Phi' + \Phi'\Psi') = 0.$$

Or, aucun des facteurs A, B, C ne pouvant être constamment nul, par la même raison que nous avons dite tout à l'heure, à l'occasion de l'équation (5), celle que nous venons d'obtenir en

dernier lieu équivaudra simplement, en tenant compte de la relation (10), à celle-ci

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\Phi'}+\frac{1}{\Psi'}+\frac{1}{\Pi'}\right)\Phi'\Psi'\Pi'=0,$$

dont le premier des facteurs variables ne peut de nouveau être supposé constamment nul, toujours par la même raison, non plus que les trois suivants parce que les six dérivées (12) sont toutes expressément supposées différentes de zéro; et par conséquent cette dernière équation exigera, pour être vérifiée, que les constantes a, b, c, satisfassent à la relation

$$a+b+c=0.$$

Pour n'avoir encore dans notre résultat, nonobstant cette dernière condition, que des constantes séparément arbitraires, nous introduirons de nouveau dans nos expressions (8), comme constantes arbitraires, à la place de celles que nous nommions tout à l'heure a, b, c, trois différences telles que $b-c$, $c-a$, $a-b$, dont la somme est nulle, ce qui donnera tout d'abord pour les quantités A, B, C, à la place des expressions (9), les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} A &= \Psi - \Pi + b - c = \Psi + b - (\Pi + c), \\ B &= \Pi - \Phi + c - a = \Pi + c - (\Phi + a), \\ C &= \Phi - \Psi + a - b = \Phi + a - (\Psi + b), \end{aligned}\right.$$

ou tout aussi bien, en convenant d'écrire simplement désormais Φ, Ψ, Π, à la place de $\Phi+a$, $\Psi+b$, $\Pi+c$, celles-ci

$$(13)\qquad A=\Psi-\Pi,\qquad B=\Pi-\Phi,\qquad C=\Phi-\Psi,$$

lesquelles vérifieront maintenant la relation

$$(14)\qquad A+B+C=0;$$

et dès lors les formules (11) donneront pour les inconnues

P, Q, R, à la place des valeurs (8) obtenues tout à l'heure, ces valeurs plus simples et aussi symétriques

$$(15) \qquad P = \alpha(\Psi - \Pi)^n, \qquad Q = \beta(\Pi - \Phi)^n, \qquad R = \gamma(\Phi - \Psi)^n,$$

les expressions des six dérivées (12) restant d'ailleurs les mêmes, mais avec les nouvelles valeurs (13) des quantités A, B, C.

Détermination de ces trois fonctions inconnues par le moyen d'une même équation différentielle ordinaire du cinquième ordre. — Telle est donc la forme nécessaire que la considération du seul groupe des trois équations du premier ordre (13) du Chapitre III, joint aux hypothèses (8), impose à nos trois inconnues. Voyons maintenant quelles restrictions, ou délimitation nouvelle, apporte à cette forme le second groupe des trois équations du second ordre (19) du même Chapitre.

3° « *Les trois inconnues* P, Q, R *sont égales, chacune à un facteur constant près, aux différences deux à deux de ces trois fonctions* Φ, Ψ, Π. » — Écrivant d'abord comme il suit la première de ces trois équations (19)

$$2Q^2R\left[P\frac{P^2}{\psi^2} - \left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right] + 2QR^2\left[P\frac{P^2}{\varpi^2} - \left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right] + 2P^3\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi} = PG,$$

puis remarquant, comme dans le Chapitre précédent [formules (134) et (135)], que l'on a pour une variable indépendante θ quelconque,

$$\frac{(lP)^2}{\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{lP}{\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{P}\frac{P}{\theta}\right) = \frac{P\frac{P^2}{\theta^2} - \left(\frac{P}{\theta}\right)^2}{P^2},$$

nous la mettrons, en la divisant alors par le produit $2P^2QR$, sous la forme

$$(15^{bis}) \qquad Q\frac{(lP)^2}{\psi^2} + R\frac{(lP)^2}{\varpi^2} + P\frac{lQ}{\varphi}\frac{lR}{\varphi} = \frac{G}{2PQR}.$$

Or les expressions (15) ou (11) de P, Q, R, dans lesquelles

A, B, C ont les valeurs (13), ou plutôt celles-ci qui s'en déduisent,

$$lP = l\alpha + nlA, \qquad lQ = l\beta + nlB, \qquad lR = l\gamma + nlC,$$

donnant par deux différentiations successives

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{lP}{\psi} = n\dfrac{\Psi'}{A}, & \dfrac{lQ}{\varpi} = n\dfrac{\Pi'}{B}, & \dfrac{lR}{\varphi} = n\dfrac{\Phi'}{C}, \\ \dfrac{lP}{\varpi} = -n\dfrac{\Pi'}{A}, & \dfrac{lQ}{\varphi} = -n\dfrac{\Phi'}{B}, & \dfrac{lR}{\psi} = -n\dfrac{\Psi'}{C}, \end{array}\right. \\ \dfrac{(lP)^2}{\psi^2} = n\left(\dfrac{\Psi''}{A} - \dfrac{\Psi'^2}{A^2}\right), \qquad \dfrac{(lP)^2}{\varpi^2} = -n\left(\dfrac{\Pi''}{A} + \dfrac{\Pi'^2}{A^2}\right), \\ \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

la substitution de ces dérivées dans l'équation précédente (13bis), fournira celle-ci

$$Q.n\left(\frac{\Psi''}{A} - \frac{\Psi'^2}{A^2}\right) - R.n\left(\frac{\Pi''}{A} + \frac{\Pi'^2}{A^2}\right) - P.n^2\frac{\Phi'^2}{BC} = \frac{G}{2PQR},$$

ou, ce qui est la même chose, en multipliant par $\frac{A}{n}$, la première des trois équations suivantes

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} Q\Psi'' - R\Pi'' = \dfrac{AG}{2nPQR} + n\dfrac{A}{BC}P\Phi'^2 + \dfrac{Q\Psi'^2 + R\Pi'^2}{A}, \\ R\Pi'' - P\Phi'' = \dfrac{BG}{2nPQR} + n\dfrac{B}{CA}Q\Psi'^2 + \dfrac{R\Pi'^2 + P\Phi'^2}{B}, \\ P\Phi'' - Q\Psi'' = \dfrac{CG}{2nPQR} + n\dfrac{C}{AB}R\Pi'^2 + \dfrac{P\Phi'^2 + Q\Psi'^2}{C}, \end{array}\right.$$

les deux autres devant résulter manifestement d'un calcul analogue opéré sur les deux autres équations (19) précitées, puis que toutes les équations dont nous avons fait usage pour ce calcul procèdent d'une loi de permutation évidente.

On pourra donc substituer dans le calcul actuel, à la pre-

mière de ces équations (19), soit la première des trois équations que nous venons d'écrire, soit une combinaison quelconque de ces mêmes équations, par exemple celle obtenue en les ajoutant membre à membre, équation dont la considération s'impose de préférence à tout autre, parce que, les premiers membres se détruisant, elle ne sera plus alors que du premier ordre seulement en Φ, Ψ, Π, et qui sera la suivante

$$(17)\quad \begin{cases} 0=(A+B+C)\dfrac{G}{2nPQR}+(nA+B+C)\dfrac{P\Phi'^2}{BC}+(nB+C+A)\dfrac{Q\Psi'^2}{CA} \\ \qquad\qquad +(nC+A+B)\dfrac{R\Pi'^2}{AB}, \end{cases}$$

laquelle, en tenant compte de la relation identique (14), puis ramenant tous les termes au même dénominateur, se réduira finalement à la suivante :

$$(18)\qquad \frac{n-1}{ABC}(A^2.P\Phi'^2+B^2.Q\Psi'^2+C^2.R\Pi'^2)=0.$$

Or, comme nous l'avons fait observer maintes fois déjà dans le Chapitre précédent, il résulte des définitions (7) des quantités P, Q, R qu'elles sont toutes trois essentiellement positives, et ne peuvent être supposées nulles que pour des points exceptionnels. L'équation qui précède ne saurait donc être vérifiée qu'à la condition que l'on ait $n-1=0$, ou $n=1$, ce qui réduit dès lors les valeurs (15) de nos inconnues P, Q, R à la forme linéaire très simple, découverte par Lamé (*) :

$$(19)\qquad P=\alpha(\Psi-\Pi),\qquad Q=6(\Pi-\Phi),\qquad R=\gamma(\Phi-\Psi).$$

(*) Ces expressions sont celles qui résultent immédiatement du rapprochement des formules (4) du § LIII (p. 95), et (14) du § LVI (p. 99) des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*. Lamé, à la vérité, y fait expressément $-\alpha=6=-\gamma$; mais aucune considération, comme nous le verrons par la suite, n'impose cette restriction, qui outre qu'elle est arbitraire, à le grave défaut de rompre la symétrie essentielle entre ces trois fonctions P, Q, R, laquelle est une condition indispensable au succès des calculs qui nous restent à accomplir, si nous voulons obtenir une solution complètement rigoureuse du problème posé dans ce Mémoire.

Mais si l'illustre Auteur a su deviner en quelque sorte cette solution remarquable imposée par la forme des équations (13) et (19) du Chapitre III, il la pose d'emblée, en se contentant, pour toute justification, de remarquer en dix lignes (*) qu'elle satisfait bien aux trois équations (13), et par conséquent rien dans sa théorie ne permet de penser que cette solution soit la seule admissible, ou seulement la plus générale possible, proposition qui résulte au contraire avec une complète rigueur des calculs qui nous ont conduits tout à l'heure à ces mêmes expressions (19).

Nous aurons plus d'une fois encore, dans le cours de cette recherche, l'occasion de renouveler, avec autant de raison, la même observation.

4° « *Ces fonctions inconnues* Φ, Ψ, Π *satisfont toutes les trois à une même équation différentielle ordinaire du cinquième ordre.* » — Les trois équations du second ordre (19) du Chapitre III, dont nous n'avons encore utilisé qu'une seule, lorsqu'on y aura remis à la place de P, Q, R leurs valeurs précédentes (19) en Φ, Ψ, Π, appartiendront alors à une catégorie que l'on rencontre assez rarement en Analyse, et qui est en quelque sorte intermédiaire entre les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles. En effet, si, d'une part, elles ne renferment pour inconnues, de même que les premières, que des fonctions d'une seule variable, chacune d'elles contient néanmoins, comme les secondes, des fonctions inconnues de chacune des trois variables indépendantes, ainsi que leurs dérivées relatives à ces trois variables différentes, puisque les trois inconnues y entrent

(*) A savoir le dernier alinéa de la page 99 (§ LVI), car les équations (14) qu'il y écrit présentent manifestement la même forme que nos équations ci-dessus (19), à la seule condition d'y particulariser les constantes α, 6, γ, ainsi que nous venons de le dire dans la note précédente.

Quant à l'alinéa suivant de douze lignes (page 100), il fait bien connaître par quelle série d'inductions rationnelles l'on peut être conduit à constater qu'une pareille forme d'expressions vérifie par le fait les équations en question, mais il n'établit évidemment en quoi que ce soit la *nécessité* de cette même forme, qui permet seule de dire qu'elle est la plus générale possible.

simultanément : d'où il suit que ces équations ne peuvent être intégrées, *en l'état,* ni comme un système d'équations différentielles ordinaires, toutes les dérivées des inconnues n'étant pas relatives à la même variable indépendante, ni comme un système d'équations aux dérivées partielles, puisque chaque inconnue ne dépend que d'une seule variable.

Toutefois, il est facile de voir qu'elles pourront être ramenées sans peine à de simples équations différentielles ordinaires, à l'aide de la méthode d'élimination des constantes arbitraires qui conduit, en partant d'équations en termes finis, à la formation de semblables équations. Car, par rapport à l'inconnue Φ, par exemple, les deux autres fonctions Ψ et Π pouvant être considérées, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, comme autant de constantes distinctes, il est clair qu'il suffira de se procurer, par la différentiation en φ seule, un nombre total de *sept* équations distinctes, pour que l'on puisse ensuite éliminer entre elles les *six* quantités Ψ, Ψ', Ψ'', Π, Π', Π'', et former par là une équation différentielle ordinaire à laquelle devra satisfaire isolément l'inconnue Φ.

Si donc nous n'avions pas encore fait usage de ce groupe d'équations (19) du Chapitre III, comme on obtiendrait précisément ce nombre de sept équations en joignant à ces trois équations elles-mêmes celles qui en proviendraient en différentiant par rapport à φ, une fois chacune des deux dernières équations, et deux fois la première (laquelle ne contenant pas, comme les deux autres, la dérivée Φ'', devra dès lors être différentiée une fois de plus que celles-là), on voit de cette façon que l'équation différentielle cherchée serait ainsi du troisième ordre seulement. Mais il n'en peut plus être ainsi actuellement, parce qu'ayant tout à l'heure substitué à l'une quelconque de ces équations (19) du Chapitre III, ou (16) de celui-ci, la combinaison (17) ou (18), à laquelle nous avons déjà satisfait en prenant $n = 1$ dans les expressions (15), nous sommes assurés par là qu'avec les expressions (19) ainsi obtenues, ces trois équations (19) du Chapitre III se réduisent maintenant à *deux* distinctes seulement.

Il faudra donc à présent, pour obtenir le même nombre de sept équations, différentier trois fois la première de ces équations (19) et deux fois l'une des deux suivantes, puis joindre les équations ainsi formées à deux quelconques de ces équations (19) elles-mêmes : d'où l'on voit ainsi que l'équation différentielle demandée sera dès lors du *cinquième* ordre en Φ. Et cela posé, il résulte évidemment de la symétrie complète que présentent à la fois, ce groupe d'équations d'une part, et les expressions (19) ci-dessus de P, Q, R d'autre part, que les deux équations semblables qui déterminent Ψ et Π apppartiendront exactement au même type, en sorte que l'intégration de ces trois équations différentielles n'exigera qu'un seul et même calcul.

Pour effectuer cette élimination, différentions donc d'abord trois fois de suite par rapport à φ, la première équation du groupe (19) du Chapitre III.

A cette fin, récrivant d'abord cette équation, en y remplaçant G par sa valeur immédiatement précédente (18), puis réduisant, ainsi qu'il suit

$$2PQR\left(Q\frac{P^2}{\psi^2}+R\frac{P^2}{\varpi^2}\right)=Q^2\left[P\frac{P}{\psi}\frac{R}{\psi}+2R\left(\frac{P}{\psi}\right)^2\right]$$
$$+R^2\left[P\frac{P}{\varpi}\frac{Q}{\varpi}+2Q\left(\frac{P}{\varpi}\right)^2\right]-P^3\frac{Q}{\varphi}\frac{R}{\varphi},$$

puis y remettant à la place des dérivées de P, Q, R leurs valeurs déduites des expressions (19), savoir

$$(20)\quad\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{P}{\psi}=\alpha\Psi', & \dfrac{Q}{\varpi}=6\Pi', & \dfrac{R}{\varphi}=\gamma\Phi',\\[2ex] \dfrac{P}{\varpi}=-\alpha\Pi', & \dfrac{Q}{\varphi}=-6\Phi', & \dfrac{R}{\psi}=-\gamma\Psi'.\\[2ex] \dfrac{P^2}{\psi^2}=\alpha\Psi'', & \dfrac{P^2}{\varpi^2}=-\alpha\Pi'', & \\ \ldots & \ldots & \end{array}\right.$$

nous les transformerons dans celle-ci

$$2P(RQ^2.\alpha\Psi'' - QR^2.\alpha\Pi'') = Q^2(-P.\alpha\gamma\Psi'^2 + 2R.\alpha^2\Psi'^2) + R^2(-P.\alpha 6\Pi'^2 + 2Q\,\alpha^2\Pi'^2) + P^3.6\gamma\Phi'^2,$$

ou, en divisant par α et ordonnant le second membre par rapport aux dérivées Φ', Ψ', Π',

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} 2P(RQ^2\,\Psi'' - QR^2.\Pi'') = \frac{6\gamma}{\alpha}P^3.\Phi'^2 &+ (2\alpha R - \gamma P)Q^2.\Psi'^2 \\ &+ (2\alpha Q - 6P)R^2.\Pi'^2. \end{aligned} \right.$$

Cela fait, une première différentiation en φ nous donnera, en nous rappelant que, par hypothèse, P est indépendant de cette variable,

$$2P\left[\left(R.2Q\frac{Q}{\varphi} + Q^2\frac{R}{\varphi}\right)\Psi'' - \left(Q.2R\frac{R}{\varphi} + R^2\frac{Q}{\varphi}\right)\Pi''\right]$$
$$= \frac{6\gamma}{\alpha}P^3.2\Phi'\Phi'' + \left[(2\alpha R - \gamma P)2Q\frac{Q}{\varphi} + Q^2.2\alpha\frac{R}{\varphi}\right]\Psi'^2 + \left[(2\alpha Q - 6P)2R\frac{R}{\varphi} + R^2.2\alpha\frac{Q}{\varphi}\right]\Pi'^2,$$

ou, en remplaçant de nouveau les dérivées de P, Q, R par leurs valeurs (20),

$$2P\left[(-R.2Q.6\Phi' + Q^2.\gamma\Phi')\Psi'' - (Q.2R.\gamma\Phi' - R^2.6\Phi')\Pi''\right]$$
$$= \frac{6\gamma}{\alpha}P^3.2\Phi'\Phi'' + \left[(2\alpha R - \gamma P)(-2Q.6\Phi') + Q^2.2\alpha\gamma\Phi'\right]\Psi'^2 + \left[(2\alpha Q - 6P)2R.\gamma\Phi' \quad - R^2.2\alpha 6\Phi'\right]\Pi'^2,$$

ou encore, en divisant par $2\Phi'$, et ordonnant par rapport à P, Q, R les deux parenthèses du second membre :

$$P\left[Q(\gamma Q - 26R)\Psi'' + R(6R - 2\gamma Q)\Pi''\right]$$
$$= \frac{6\gamma}{\alpha}P^3.\Phi'' + Q(6\gamma P + \alpha\gamma Q - 2\alpha 6R)\Psi'^2 - R(6\gamma P + \alpha 6R - 2\alpha\gamma Q)\Pi'^2.$$

Or, les expressions (19) donnant évidemment les relations

$$6\gamma P + \gamma\alpha Q + \alpha 6 R = \alpha 6\gamma(\Psi - \Pi + \Pi - \Phi + \Phi - \Psi) = 0,$$

d'où l'on conclut séparément

$$6\gamma P + \alpha\gamma Q = -\alpha 6 R, \qquad 6\gamma P + \alpha 6 R = -\alpha\gamma Q,$$

l'équation que nous venons d'obtenir par une première différentiation pourra dès lors être mise sous la forme plus simple

$$(21^{\text{bis}})\quad \left\{ \begin{aligned} P\left[Q(\gamma Q - 26R)\Psi'' + R(6R - 2\gamma Q)\Pi''\right] = \frac{6\gamma}{\alpha}P^3.\Phi'' \\ - 3\alpha QR(6\Psi'^2 - \gamma\Pi'^2). \end{aligned} \right.$$

Différentiant alors de nouveau celle-ci, nous obtiendrons de la même façon

$$\begin{aligned} P\Bigg[\left\{Q\left(\gamma\frac{Q}{\varphi} - 26\frac{R}{\varphi}\right) + (\gamma Q - 26R)\frac{Q}{\varphi}\right\}\Psi'' \\ + \left\{R\left(6\frac{R}{\varphi} - 2\gamma\frac{Q}{\varphi}\right) + (6R - 2\gamma Q)\frac{R}{\varphi}\right\}\Pi''\Bigg] \\ = \frac{6\gamma}{\alpha}P^3.\Phi''' - 3\alpha\left(Q\frac{R}{\varphi} + R\frac{Q}{\varphi}\right)(6\Psi'^2 - \gamma\Pi'^2). \end{aligned}$$

et, en substituant encore les valeurs (20),

$$\begin{aligned} P\Big[\left\{Q(-\gamma.6\Phi' - 26.\gamma\Phi') + (\gamma Q - 26R)(-6\Phi')\right\}\Psi'' \\ + \left\{R(6.\gamma\Phi' + 2\gamma.6\Phi') + (6R - 2\gamma Q)\gamma\Phi'\right\}\Pi''\Big] \\ = \frac{6\gamma}{\alpha}P^3.\Phi''' - 3\alpha(Q.\gamma\Phi' - R.6\Phi')(6\Psi'^2 - \gamma\Pi'^2), \end{aligned}$$

ou, en divisant encore par Φ',

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} 2P\left[6(6R - 2\gamma Q)\Psi'' - \gamma(\gamma Q - 26R)\Pi''\right] \\ = \frac{6\gamma}{\alpha}P^3.\frac{\Phi'''}{\Phi'} - 3\alpha(\gamma Q - 6R)(6\Psi'^2 - \gamma\Pi'^2). \end{aligned} \right.$$

Une troisième différentiation nous donnera enfin

$$2P\left[6\left(6\frac{R}{\varphi}-2\gamma\frac{Q}{\varphi}\right)\Psi''-\gamma\left(\gamma\frac{Q}{\varphi}-26\frac{R}{\varphi}\right)\Pi''\right]$$
$$=\frac{6\gamma}{\alpha}P^3.\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)-3\alpha\left(\gamma\frac{Q}{\varphi}-6\frac{R}{\varphi}\right)(6\Psi'^2-\gamma\Pi'^2),$$

ou, toujours par l'application des mêmes procédés,

$$2P\left[6\,(6.\gamma\Phi'+2\gamma.6\Phi')\,\Psi''-\gamma\,(-\gamma.6\Phi'-26.\gamma\Phi')\,\Pi''\right]$$
$$=\frac{6\gamma}{\alpha}P^3.\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)-3\alpha\,(-\gamma.6\Phi'-6.\gamma\Phi')\,(6\Psi'^2-\gamma\Pi'^2),$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant, et divisant par $6\gamma\Phi'$,

$$(22^{bis})\qquad 6P(6\Psi''+\gamma\Pi'')=\frac{P^3}{\alpha}\cdot\frac{1}{\Phi'}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)+6\alpha(6\Psi'^2-\gamma\Pi'^2).$$

Pour accomplir littéralement le programme que nous nous sommes tracé pour ce calcul, il faudrait maintenant former deux équations analogues, en différentiant deux fois, également en φ, la seconde ou la troisième équation (19) du Chapitre III, joindre les deux équations obtenues de cette façon, ainsi que les précédentes (21bis), (22) et (22bis), à deux de ces mêmes équations (19) elles-mêmes, puis, après avoir remplacé de nouveau dans toutes P, Q, R et leurs dérivées par leurs expressions (19) et (20), éliminer alors entre ces sept équations les six quantités Ψ, Ψ', Ψ'', Π, Π', Π''. Mais la forme particulière de l'équation (22bis) que nous venons d'obtenir nous dispensera heureusement de cette seconde partie de notre programme; car si nous récrivons cette même équation ainsi qu'il suit, en ne gardant au second membre que le premier terme, et divisant ensuite par son coefficient $\frac{P^3}{\alpha}$,

$$\frac{6\alpha}{P^3}\left[P\,(6\Psi''+\gamma\Pi'')-\alpha\,(6\Psi'^2-\gamma\Pi'^2)\right]=\frac{1}{\Phi'}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right),$$

le second membre, qui ne dépendra alors que de φ seule, ne

pourra être constamment égal au premier, qui ne dépend lui que de ψ et de ϖ, qu'à la condition de conserver une valeur constante, en sorte que le résultat de l'élimination poursuivie sera certainement une équation de la forme

$$\frac{1}{\Phi'}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right) = \text{const.},$$

et les équations différentielles demandées seront dès lors les trois suivantes

$$(23)\qquad \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\Phi'}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)\right] = 0,\qquad \frac{d}{d\psi}\left[\frac{1}{\Psi'}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Psi'''}{\Psi'}\right)\right] = 0,\qquad \frac{d}{d\varpi}\left[\frac{1}{\Pi'}\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\Pi'''}{\Pi'}\right)\right] = 0,$$

équations que n'indiquent ni Lamé, ni Betti, et dont l'intégration générale, malgré leur ordre élevé et leur apparente complication, sera, au contraire, comme nous le verrons tout à l'heure, des plus simples et des plus faciles.

Comparaison de la méthode de détermination qui précède avec celle indiquée par Lamé pour le même objet. — Avant de procéder à cette intégration, et, au moyen de ses résultats, à la formation de la solution cherchée, on nous permettra bien, en vue de justifier l'opportunité et l'intérêt des calculs qui précèdent, d'indiquer sommairement quelles considérations et quelle méthode propose Lamé, dans les *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, pour parvenir à la détermination des inconnues Φ, Ψ, Π.

Au lieu de ramener la question, ainsi que nous venons de le faire, à l'intégration d'une seule équation différentielle, Lamé, après avoir mis chacune des trois équations (19) du Chapitre III sous la forme analogue à (21), allègue comme évident que « la vérification de semblables équations *ne saurait être obtenue qu'en* exprimant » les carrés des dérivées (*) Φ'^2, Ψ'^2, Π'^2 par des développements tels que

$$(24)\qquad \Phi'^2 = \sum_i \mathcal{A}_i \Phi^i,\qquad \Psi'^2 = \sum_i \mathcal{B}_i \Psi^i,\qquad \Pi'^2 = \sum_i \mathcal{C}_i \Pi^i,$$

(*) Pour faciliter au Lecteur l'intelligence du texte de Lamé, et lui rendre aussi aisée que

lesquels donneront à leur tour, en différentiant et divisant respectivement par $2\Phi'$, $2\Psi'$, $2\Pi'$, pour les dérivées secondes, les développements corrélatifs

$$(25)\qquad \Phi''=\sum_i \frac{i}{2}\mathcal{A}_i\Phi^{i-1},\qquad \Psi''=\sum_i \frac{i}{2}\mathcal{B}_i\Psi^{i-1},\qquad \Pi''=\sum_i \frac{i}{2}\mathcal{C}_i\Pi^{i-1},$$

et qui, « d'après la symétrie complète des équations qu'ils doivent vérifier, doivent êtrę composés d'un même nombre *fini* (?) de termes (*) ». Et alors, dit Lamé, « la substitution de ces valeurs dans les trois équations développées les réduira à ne contenir que des puissances entières des (Φ, Ψ, Π), et l'indépendance relative de ces trois fonctions de variables différentes exigera l'annulation de tous les termes à l'aide des trois séries de coefficients indéterminés $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i)$ (**) ».

Il est à peine besoin de faire observer, sans examiner pour l'instant les conditions pratiques de l'application de cette méthode

---

possible la comparaison que nous avons en vue dans cet article, nous croyons devoir substituer, *même dans les citations textuelles* empruntées au discours de Lamé, les notations et le numérotage d'équations du présent Mémoire à ceux de l'illustre Auteur, ce qui ne modifiera évidemment en quoi que ce soit le sens ni la portée des textes en question.

(*) Leçons sur les coordonnées curvilignes, § LVIII, (page 103, second alinéa).

(**) Ibid., § LVII (page 102, *in medio*). L'équation (21) de Lamé, qui précède immédiatement ce texte, n'est autre en effet que notre équation (21) dans laquelle on aurait permuté deux fois de suite les trois groupes $(\alpha, 6, \gamma)$, (Φ, Ψ, Π), (P, Q, R), puis fait passer tous les termes dans le premier membre, et enfin divisé par le produit $4PQR^2$. On retrouvera en effet *littéralement* cette équation (21) de Lamé, si l'on traduit notre équation (21), préparée comme nous venons de le dire, dans les notations de l'Auteur, à l'aide de la *clef* suivante, qui pourra servir de même pour toutes les équations empruntées à Lamé et rapportées par nous dans le cours de cette théorie, savoir

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi=\rho, & \psi=\rho_1, & \varpi=\rho_2, \\ \Delta_1\varphi=h, & \Delta_1\psi=h_1, & \Delta_1\varpi=h_2, \\ \Phi=c^2A^2, & \Psi=c^2A_1^2, & \Pi=c^2A_2^2, \end{array}\right.\qquad \begin{array}{lll} H=H^2, & K=H_1^2, & J=H_2^2, \\ P=lQ^2, & Q=lQ_1^2, & R=lQ_2^2, \end{array}$$

à laquelle il faut joindre la restriction $-\alpha=6=-\gamma=\frac{l}{c^2}$ déjà signalée dans une note antérieure (page 294). On s'assurera, aisément par exemple, en appliquant la même transformation à nos trois équations (19), qu'elles reproduiront bien de même *littéralement* les trois équations (14) de Lamé (page 99), déjà citées un peu plus haut dans la note de la page 295 ci-dessus.

dans l'hypothèse que nous allons dire (*), qu'elle ne serait admissible, même *en théorie* pure, pour le Cas général, que si le nombre commun *n* des termes de chaque développement (24) était *a priori*, non seulement *fini*, mais *connu*, condition essentielle que, pas plus avant qu'après, Lamé n'établit d'une façon certaine, quant au Cas le plus général du problème : attendu qu'en l'absence de cette double condition, l'on ne pourra faire autrement que de supposer illimité chacun des développements (24), auquel cas, après substitution des valeurs (19) d'abord, puis (24), et (25), dans les équations précitées (21), les premiers membres de chacune d'elles devant alors être composés eux-mêmes d'une suite illimitée de termes en Φ, Ψ, Π, l'on se trouverait ainsi condamné par cette voie, à former d'abord, puis à poser et à résoudre, un nombre indéfini d'équations successives.

Aussi, après avoir indiqué *en théorie* cette méthode pour la détermination des inconnues Φ, Ψ, Π, Lamé se garde-t-il bien de l'adopter en fait, et se hâte-t-il, en attaquant le problème, « au lieu d'entreprendre une opération aussi prodigieusement longue », de lui substituer une série de déductions fort ingénieuses, mais de valeur purement conjecturale, dont il trace ainsi le programme : « D'après certaines propriétés des fonctions (Φ, Ψ, Π et leurs dérivées), assigner d'avance les valeurs *probables* des coefficients ($\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$) ; composer, en quelque sorte de toutes

(*) Si l'on admet comme démontrée, par le procédé que nous indiquons ou bien par tout autre, l'hypothèse assurément fort restreinte de $n = 3$, qui correspond, ainsi que nous allons le voir, à la réalité pour le Cas le plus général, et qui n'introduira dès lors que neuf coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, à déterminer, comme rien n'indique *à priori* que les coefficients α, 6, γ des expressions (19) devront rester arbitraires, l'on voit que, suivant cette méthode, l'on devra calculer d'abord, puis égaler à zéro, au moins douze coefficients des différents termes en Φ, Ψ, Π, formant le développement des équations précitées (21) après la substitution des expressions (19) d'abord, puis (24) et (25) ensuite. Ainsi, en n'envisageant que les conditions dans lesquelles *seules* devient admissible et réalisable la méthode indiquée par Lamé, on sera donc amené par cette voie à résoudre un système de *douze* équations, qui seront linéaires par rapport aux neuf coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, mais du *cinquième* degré par rapport aux trois autres α, 6, γ. C'est un calcul équivalent au fond à celui-là que nous allons effectuer dans les pages qui vont suivre, mais en le présentant sous une forme qui permette mieux de le développer jusqu'au bout, et telle que les résultats définitifs en soient beaucoup plus clairs et plus faciles à interpréter.

pièces, un groupe (24) qui reproduise ces propriétés, et constater ensuite que le groupe ainsi obtenu vérifie les équations [du type (21)] ». Si nous ajoutons que Lamé fonde ce nouvel ordre de considérations sur la base, singulièrement étroite, consistant à démontrer, comme il le fait un peu plus loin, que « le nombre commun des termes des développements (24) ne saurait être inférieur à trois, et qu'il *peut* n'être que trois », et qui dès lors n'établit en aucune façon la *nécessité* de la forme de solution correspondant à cette hypothèse, permise mais gratuite, l'on jugera sans doute avec nous que cette solution présentée par lui dans les *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, quelque belle et importante qu'elle soit, étant rencontrée et justifiée par les procédés que nous venons de dire, n'offre en l'état que la valeur d'une solution *très particulière*. Et dès lors, la question de la recherche de la solution la plus générale du problème restant entière comme devant, peut-être sera-t-on plus disposé à nous pardonner, en considération de leur rigueur et de la netteté de leurs résultats, la prolixité et la complication des calculs que nous allons offrir dans ce Chapitre, pour suppléer à l'insuffisance trop manifeste de ceux présentés par Lamé dans l'ouvrage ci-dessus désigné (*).

Intégration générale de l'équation différentielle du cinquième ordre proposée. — On pourrait avoir la pensée, ayant à intégrer d'une façon générale l'équation différentielle du cinquième ordre à laquelle nous sommes parvenus un peu plus haut, de développer cette équation, et de l'ordonner, conformément à l'usage, par rapport aux divers ordres des dérivées, et pour les dérivées

(*) Nous ne savons en effet dans quel autre ouvrage se trouve la démonstration postérieure (dont nous n'avons nulle connaissance) à laquelle Lamé fait allusion, en disant, à deux reprises différentes et dans les mêmes termes, successivement à propos de celles de ses formules qui correspondent à nos équations (19) d'abord, et (28) ensuite : « J'ai démontré, *depuis*, que les valeurs [(19) ci-dessus] des (P, Q, R), exprimées par les [Φ, Ψ, Π, ci-après (28)], sont les intégrales *les plus générales* du groupe des trois équations aux différences partielles [(13) ou (19) de notre Chap. III], qu'elles vérifient ». (Coordonn. Curv., pp. 100, dernier alinéa, et 107, premier alinéa.)

de chaque ordre, suivant leurs puissances. Écrite de cette façon, avec les notations classiques, la première de ces trois équations (23) serait alors

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2\cdot\frac{d^5\Phi}{d\varphi^5}-3\frac{d\Phi}{d\varphi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\cdot\frac{d^4\Phi}{d\varphi^4}-\frac{d\Phi}{d\varphi}\left(\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}\right)^2+3\left(\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right)^2\cdot\frac{d^3\Phi}{d\varphi^3}=0.$$

Mais ce calcul préalable, loin de rapprocher du but et de faciliter la découverte de l'intégrale cherchée, en éloigne au contraire, en faisant perdre de vue la voie naturelle, qui consiste évidemment à repasser en ordre inverse, et en les intervertissant elles-mêmes, par la série d'opérations, différentielles ou algébriques, dont les symboles, accumulés dans la formule précitée (23), constituent précisément la représentation de l'équation différentielle elle-même, méthode qui devra par conséquent nous conduire beaucoup plus aisément et plus sûrement au but.

5° « *Les trois inconnues* Φ, Ψ, Π *sont de simples fonctions linéaires des sinus carrés d'amplitude de la variable correspondante* ». — Adoptant donc comme point de départ la première des trois équations proposées, savoir

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{\Phi'}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)\right]=0,$$

une première intégration donnant immédiatement

$$\frac{1}{\Phi'}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right)=3\mathrm{A}\qquad\text{ou}\qquad d\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)=3\mathrm{A}\,.\Phi'd\varphi=3\mathrm{A}d\Phi,$$

une seconde aussi facile donnera semblablement

$$\frac{\Phi'''}{\Phi'}=3\mathrm{A}\Phi+\mathrm{A}'\qquad\text{ou}\qquad\Phi'''=3\mathrm{A}\Phi\Phi'+\mathrm{A}'\Phi',$$

équation qui pourra être écrite, en multipliant de nouveau par $d\varphi$,

$$\Phi'''d\varphi=3\mathrm{A}\Phi\;\Phi'd\varphi+\mathrm{A}'.\Phi'd\varphi,\qquad\text{ou}\qquad d\Phi''=\tfrac{3}{2}\,\mathrm{A}\,.2\Phi d\Phi+\mathrm{A}'d\Phi,$$

et fournira dès lors à son tour, par une troisième intégration,

$$\Phi'' = \tfrac{3}{2}\,A\Phi^2 + A'\Phi + \tfrac{1}{2}\,A''.$$

Cette dernière enfin, étant elle-même multipliée par $2\Phi' d\varphi$, deviendra

$$2\Phi'\Phi'' d\varphi = A\,.\,3\Phi^2\Phi' d\varphi + A'\;2\Phi\Phi' d\varphi + A''.\,\Phi' d\varphi,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$d\,.\,\Phi'^2 = A\,d\,.\,\Phi^3 + A'd\,.\,\Phi^2 + A''d\Phi,$$

et donnera par conséquent, avec la même facilité :

$$\text{(26)} \qquad \Phi'^2 = \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = A\Phi^3 + A'\Phi^2 + A''\Phi + A'''.$$

Et dès lors, en extrayant les racines, et séparant les variables, nos trois équations proposées (23) conduiront donc, comme on le voit, pour déterminer les trois inconnues Φ, Ψ, Π, à trois équations de la forme

$$\text{(27)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} d\varphi = \dfrac{d\Phi}{\sqrt{A\Phi^3 + A'\Phi^2 + A''\Phi + A'''}}, & d\psi = \dfrac{d\Psi}{\sqrt{B\Psi^3 + B'\Psi^2 + B''\Psi + B'''}}, \\ & d\varpi = \dfrac{d\Pi}{\sqrt{C\Pi^3 + C'\Pi^2 + C''\Pi + C'''}}, \end{array} \right.$$

lesquelles nous fourniront définitivement les expressions cherchées par l'inversion de trois intégrales elliptiques de première espèce, au moyen des douze constantes arbitraires A, B, C, qui figurent dans ces équations, et de trois autres simplement additives h, h', h'', ce qui, avec les trois constantes α, β, γ qui entrent antérieurement dans les expressions (19) de P, Q, R, formera un total de *dix-huit* constantes arbitraires figurant dans les résultats obtenus jusqu'à ce moment.

La forme de l'expression des carrés des trois dérivées Φ'^2, Ψ'^2, Π'^2, est donc bien, comme on voit, exactement celle

pressentie par le merveilleux flair analytique de Lamé (*); mais tandis que sa théorie se borne à établir que cette forme est *suffisante* pour fournir une solution, et ne montre en aucune façon par conséquent que cette solution soit la seule possible, ce fait, capital pour la question qui nous occupe, est établi nettement au contraire par le calcul précédent, qui démontre rigoureusement la *nécessité* de cette même forme d'expression pour les carrés des dérivées considérées.

La question de l'intégration générale des équations différentielles (23), dont nous avons fait un intermédiaire obligé de notre difficile recherche, est donc dès à présent déjà complètement acquise, mais ce serait une erreur grave de croire que ce résultat suffise à lui seul pour nous fournir la solution du problème spécial envisagé dans ce Chapitre. En effet, de même que dans deux autres occasions déjà signalées (pp. 159-160, et 2° p. 287), ces équations (23) ont été introduites dans le calcul au moyen de différentiations successives et multipliées des équations proposées (19) du Chapitre III; leurs intégrales représentent donc encore une solution plus large que celle qui convient à la question, et il y aura lieu, par conséquent, de faire un choix parmi toutes les expressions des fonctions P, Q, R qui résulteraient, par les formules (19) précédentes, des valeurs des inconnues Φ, Ψ, Π, fournies en dernière analyse par l'inversion des intégrales des différentielles (27). En d'autres termes, les expressions de P, Q, R ainsi obtenues, ne vérifieront pas, en l'état, le groupe du second ordre (19) précité, les *dix-huit* constantes énumérées tout à l'heure demeurant toutes arbitraires; et il reste, en conséquence,

---

(*) Avec cette observation, qu'à la place de nos fonctions Φ, Ψ, Π, qui sont, comme on le verra tout à l'heure, des fonctions linéaires des sinus carrés d'amplitude des variables correspondantes, Lamé introduit dans sa théorie des fonctions A, A_1, A_2 qui n'y entrent que par leurs carrés et leurs dérivées, et qui sont proportionnelles aux sinus d'amplitude eux-mêmes, ce qui revient dès lors à supposer, dans ses équations différentielles correspondant à (26) ou (27), les seconds membres réduits à la forme canonique, qui comporte seulement *trois* termes, tous pairs, ainsi qu'il l'avait supposé expressément à l'avance, fort arbitrairement du reste, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut.

à attribuer à ces constantes, jusqu'à concurrence du nombre nécessaire, des valeurs déterminées, telles que ces trois équations (19) du Chapitre III soient effectivement vérifiées : calcul, en quelque sorte rétrospectif, qui, pour s'imposer le dernier, et au moment où nous pouvions espérer toucher au but, n'en constituera pas moins peut-être la partie la plus laborieuse de notre tâche.

Nous y arriverons cependant, en changeant à la fois de variables et de constantes, et formant alors, à l'aide d'un petit nombre d'identifications, le système complet des relations auxquelles les nouvelles constantes devront satisfaire pour remplir cette condition.

A cette fin, substituant aux neuf constantes A′, A″, A‴, B′, B″, B‴, C′, C″, C‴, neuf autres constantes arbitraires a^2, b^2, c^2, a'^2, b'^2, c'^2, a''^2, b''^2, c''^2, nous mettrons les trois équations différentielles du premier ordre (27), supposées ramenées préalablement au type équivalent (26), sous la forme, plus commode pour la dernière intégration,

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi'^2 &= \mathrm{A}(\Phi + a^2)(\Phi + b^2)(\Phi + c^2),\\ \Psi'^2 &= \mathrm{B}(\Psi + a'^2)(\Psi + b'^2)(\Psi + c'^2),\\ \Pi'^2 &= \mathrm{C}(\Pi + a''^2)(\Pi + b''^2)(\Pi + c''^2); \end{aligned}\right.$$

et alors le même calcul que nous avons déjà présenté à la fin de notre Chapitre II à l'occasion de l'expression (147), et qui aboutit aux équations (152) et (153), nous donnera, en écrivant respectivement cette fois Φ, φ, g, et h à la place de λ, θ, σ, et τ, pour intégrale générale de la première de ces trois équations (28), la première des trois suivantes (les deux autres résultant d'un calcul tout semblable),

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi &= -a^2\ \mathrm{cn}^2(g\varphi + h) - b^2\ \mathrm{sn}^2(g\varphi + h),\\ \Psi &= -b'^2\ \mathrm{cn}^2(g'\psi + h') - c'^2\ \mathrm{sn}^2(g'\psi + h'),\\ \Pi &= -c''^2\ \mathrm{cn}^2(g''\varpi + h'') - a''^2\ \mathrm{sn}^2(g''\varpi + h''), \end{aligned}\right.$$

h, h', h'', étant les trois nouvelles constantes arbitraires, simple-

ment additives, introduites par cette dernière intégration, et les trois modules k, k', k'', ainsi que les trois coefficients g, g', g'', qui figurent (au moins implicitement) dans ces formules, étant par définition les valeurs (*) :

$$(30)\qquad g=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}}\sqrt{a^2-c^2},\qquad g'=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{B}}\sqrt{b'^2-a'^2},\qquad g''=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{C}}\sqrt{c''^2-b''^2},$$

$$(31)\qquad k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\qquad k'=\sqrt{\frac{b'^2-c'^2}{b'^2-a'^2}},\qquad k''=\sqrt{\frac{c''^2-a''^2}{c''^2-b''^2}}.$$

Car il est visible qu'avec le changement de notation que nous venons de dire, d'une part l'équation différentielle (152) se transformera dans la première équation proposée (28), à la seule condition de faire $\frac{2g}{\sqrt{a^2-c^2}}=\sqrt{\mathrm{A}}$, c'est-à-dire de prendre pour g la première valeur (30), et que d'autre part l'expression (147),

---

(*) Si l'on aime mieux s'en assurer par un calcul direct, ayant écrit la première des expressions (29) sous la première forme (148) du Chap. II, savoir

$$\Phi=-a^2+(a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h),$$

l'on en déduira encore immédiatement, eu égard à la valeur (31) du module k, comme lors des équations (147), (148), (149), et (150),

$$\left\{\begin{aligned}&\Phi+a^2=(a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h), &&\Phi+b^2=-(a^2-b^2)\,\mathrm{cn}^2(g\varphi+h),\\ & &&\Phi+c^2=-(a^2-c^2)\,\mathrm{dn}^2(g\varphi+h),\end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclura, eu égard à la valeur précédente de Φ, comme dans le calcul précité,

$$\begin{aligned}(\Phi+a^2)(\Phi+b^2)(\Phi+c^2)&=(a^2-b^2)^2(a^2-c^2)\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h)\,\mathrm{cn}^2(g\varphi+h)\,\mathrm{dn}^2(g\varphi+h)\\ &=(a^2-c^2)\left[\frac{a^2-b^2}{2g}\,\frac{d.\mathrm{sn}^2(g\varphi+h)}{d\varphi}\right]^2=(a^2-c^2)\left(\frac{\Phi'}{2g}\right)^2;\end{aligned}$$

et dès lors, en multipliant par A, l'équation proposée, c'est-à-dire la première des trois équations (28), sera vérifiée identiquement à la seule condition de satisfaire à la relation

$$1=\mathrm{A}\,\frac{a^2-c^2}{4g^2},\qquad \text{d'où}\qquad g=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}}\sqrt{a^2-c^2}.$$

Par où l'on voit que les expressions ci-dessus (29), dans lesquelles $g, g', g'', k, k'\, k''$ sont par hypothèse les valeurs (30) et (31), représentent bien les intégrales générales des trois équations du cinquième ordre proposées (23), chacune avec les cinq constantes arbitraires distinctes qu'elle doit renfermer par définition.

dans laquelle on avait, par définition, $u = \sigma\theta + \tau$, se changera bien en même temps dans la première des expressions précédentes (29).

Détermination des constantes arbitraires surabondantes par la vérification a posteriori du groupe des équations du second ordre. — Les intégrales générales demandées étant donc désormais acquises, nous connaissons ainsi par le moyen des expressions (19) et (29), la forme *nécessaire* en φ, ψ, ϖ des fonctions inconnues P, Q, R, dans le Cas le plus général, et nous sommes assurés dès maintenant qu'il sera possible, en choisissant convenablement les constantes, de vérifier avec ces expressions les trois équations du groupe du second ordre (19) du Chapitre III. Il nous reste donc seulement, en l'état, à disposer des *dix-huit* constantes

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \alpha,\ \beta,\ \gamma, & \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}, & h,\ h',\ h'', \\ a,\ b,\ c, & a',\ b',\ c', & a'',\ b'',\ c'', \end{array}\right.$$

de manière à procurer effectivement cette vérification, recherche qui consistera évidemment dès lors en de simples identifications.

6° « *Les trois inconnues* P, Q, R, *prises ensemble, renfermeront dans leurs expressions dix constantes complètement arbitraires seulement.* » — A cet effet, nous introduirons, à titre auxiliaire, comme constantes distinctes, en même temps que ces dix-huit premières (32), les *treize* autres suivantes, savoir : d'abord les six quantités g, g', g'', k, k', k'', définies par les égalités ci-dessus (30); puis, en second lieu, les six autres l, m, n, p, q, r, définies semblablement par les six égalités

$$(33)\qquad \left\{\begin{array}{lll} -l = a^2 - b^2, & -m = b'^2 - c'^2, & -n = c''^2 - a''^2, \\ -p = b'^2 - c''^2, & -q = c''^2 - a^2 & -r = a^2 - b'^2, \end{array}\right.$$

et dont les trois dernières satisfont, par conséquent, à la condition

$$(34)\qquad p + q + r = 0;$$

et enfin, pour compléter le nombre total de *trente et une* constantes, une dernière quantité s, que nous nous réservons de définir également un peu plus loin, à l'aide d'une nouvelle relation, en fonction des précédentes déjà énumérées. Et dès lors la question reviendra évidemment à former, sans en omettre aucune, toutes les relations qui devront exister nécessairement, pour procurer la vérification demandée, entre ces trente et une constantes, en sus des relations déjà existantes ou restant à poser, et exprimant les définitions des treize constantes auxiliaires que nous venons de spécifier.

En même temps, nous adopterons dans ce calcul, comme variables indépendantes, à la place de φ, ψ, ϖ, les trois fonctions de ces variables

$$(35)\qquad u=\mathrm{sn}^2(g\varphi+h),\qquad v=\mathrm{sn}^2(g'\psi+h'),\qquad w=\mathrm{sn}^2(g''\varpi+h''),$$

et il arrivera alors qu'avec ces deux nouveaux systèmes, de constantes d'une part, et de variables de l'autre, l'écriture des équations proposées (19) du Chapitre III se trouvera simplifiée, au point de rendre l'identification beaucoup plus facile.

Introduisant donc les constantes (33) et les variables (35) dans les expressions (29), mises préalablement sous la première forme (148) du Chapitre II, nous aurons tout d'abord les nouvelles expressions

$$(35^{\text{bis}})\quad \begin{cases} \Phi=-a^2+(a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h)=-a^2-lu,\\ \Psi=-b'^2+(b'^2-c'^2)\,\mathrm{sn}^2(g'\psi+h')=-b'^2-mv,\\ \Pi=-c''^2+(c''^2-a''^2)\,\mathrm{sn}^2(g''\varpi+h'')=-c''^2-nw,\end{cases}$$

lesquelles, étant reportées à leur tour dans les expressions (19), et tenant compte des valeurs de définition (33) de p, q, r, transformeront ces expressions dans les suivantes :

$$(36)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}=\alpha(\Psi-\Pi)=\alpha(p+nw-mv),\\ \mathrm{Q}=\beta(\Pi-\Phi)=\beta(q+lu-nw),\\ \mathrm{R}=\gamma(\Phi-\Psi)=\gamma(r+mv-lu).\end{cases}$$

D'autre part, la première de ces expressions (35bis), étant différentiée une première fois, donnera semblablement avec ces nouvelles notations

$$(37) \qquad \Phi' = -l.\frac{du}{d\varphi} = -2lg \operatorname{sn}(g\varphi + h) \operatorname{cn}(g\varphi + h) \operatorname{dn}(g\varphi + h),$$
$$= -2lg \sqrt{u}\sqrt{1-u}\sqrt{1-k^2u},$$

ou, en élevant au carré,

$$(38) \qquad \Phi'^2 = 4l^2g^2u(1-u)(1-k^2u) = 4l^2g^2\left[u - (1+k^2)u^2 + k^2u^3\right];$$

puis, en différentiant à nouveau cette dernière expression,

$$2\Phi'\Phi'' = 4l^2g^2\left[1 - 2(1+k^2)u + 3k^2u^2\right]\frac{du}{d\varphi},$$

ou, ce qui est la même chose, en tenant compte de la première équation (37),

$$\Phi'' = -2lg^2\left[1 - 2(1+k^2)u + 3k^2u^2\right]$$

En rapprochant maintenant cette dernière expression de la précédente (38), toutes les formules que nous avons successivement établies obéissant à une loi évidente de permutation circulaire, on voit que nous aurons avec ces nouveaux éléments à la fois les six expressions

$$(39) \begin{cases} \Phi'^2 = 4l^2g^2.\left[u-(1+k^2)u^2+k^2u^3\right], & \Phi'' = -2lg^2.\left[1-2(1+k^2)u+3k^2u^2\right], \\ \Psi'^2 = 4m^2g'^2.\left[v-(1+k'^2)v^2+k'^2v^3\right], & \Psi'' = -2mg'^2.\left[1-2(1+k'^2)v+3k'^2v^2\right], \\ \Pi'^2 = 4n^2g''^2.\left[w-(1+k''^2)w^2+k''^2w^3\right], & \Pi'' = -2ng''^2.\left[1-2(1+k''^2)w+3k''^2w^2\right]; \end{cases}$$

et il n'y aura plus dès lors qu'à substituer ces valeurs, en même temps que les expressions (36), dans deux des équations proposées (19) du Chapitre III, supposées mises préalablement sous la forme (21) de celui-ci, et à égaler ensuite à zéro séparément les coefficients des différentes puissances de u, v, w, pour assurer ainsi par de simples identifications la vérification demandée.

A la vérité, cette opération serait encore pratiquement irréali-

sable, si l'on était tenu de l'accomplir, comme dans le calcul proposé par Lamé, intégralement et séparément pour tous les coefficients des différents termes qui entreront dans chaque équation identifiée (21) ; mais on va voir heureusement qu'il suffira d'accomplir cette opération pour un nombre *très restreint* de ces coefficients, et en choisissant ceux dont l'expression sera la plus simple et la plus facile à obtenir, pour être parfaitement assuré d'avoir réalisé complètement l'identification des trois équations, comme le proposait Lamé, sans fournir en même temps la possibilité de remplir le programme ainsi tracé (*).

En effet, ces trois équations (19) du Chapitre III, ou (21) de celui-ci, devant se transformer en identités lorsque l'on y substituera les valeurs (36) et (39), cette identité se maintiendra dès lors quelles que soient les valeurs particulières que l'on attribue aux variables u, v, w. Or, ces trois équations du type (21), que nous nous proposons d'identifier, étant les suivantes

$$(40)\quad \begin{cases} 2PQR\,(Q\Psi'' - R\Pi'') = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}\,P^3\Phi'^2 + (2\alpha R - \gamma P)\,Q^2\Psi'^2 + (2\alpha Q - \beta P)\,R^2\Pi'^2, \\[2ex] 2PQR\,(R\Pi'' - P\Phi'') = \dfrac{\gamma\alpha}{\beta}\,Q^3\Psi'^2 + (2\beta P - \alpha Q)\,R^2\Pi'^2 + (2\beta R - \gamma Q)\,P^2\Phi'^2, \\[2ex] 2PQR\,(P\Phi'' - Q\Psi'') = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\,R^3\Pi'^2 + (2\gamma Q - \beta R)\,P^2\Phi'^2 + (2\gamma P - \alpha R)\,Q^2\Psi'^2, \end{cases}$$

si nous y faisons tout d'abord $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, en spécifiant

(*) Au nombre des raisons qui assureront le succès de notre calcul, tandis que celui proposé par Lamé pour le même objet était littéralement impraticable (ainsi qu'il en convient d'ailleurs lui-même en renonçant à l'effectuer), il faut encore compter la précaution que nous avons eue jusqu'ici, et que nous aurons jusqu'au bout dans tout le cours de cette étude, de n'introduire, soit comme quantités variables ou constantes, soit comme équations, que des éléments analytiques satisfaisant à l'une ou à l'autre de ces deux conditions : ou bien de procéder par groupe de trois, s'échangeant les unes dans les autres à l'aide de permutations circulaires évidentes; ou bien de se reproduire identiquement elles-mêmes par le jeu des mêmes permutations circulaires que nous venons de dire : conditions que ne réalisent malheureusement ni les équations, ni les différents systèmes de constantes, de variables, ou de fonctions, sur lesquelles repose la théorie si remarquable et si féconde de Lamé.

à l'aide de l'indice 0 les valeurs correspondantes des différentes fonctions, comme les égalités ci-dessus (39) donneront évidemment $\Phi_0'^2 = 0$, $\Psi_0'^2 = 0$, $\Pi_0'^2 = 0$, il est clair que les deux premières de ces équations se réduiront simplement à

$$2P_0Q_0R_0(Q_0\Psi_0'' - R_0\Pi_0'') = 0, \qquad 2P_0Q_0R_0(R_0\Pi_0'' - P_0\Phi_0'') = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des valeurs (36) et (39) qui donneront de même

$$P_0 = \alpha p, \qquad Q_0 = 6q, \qquad R_0 = \gamma r,$$

$$\Phi_0'' = -2lg^2, \qquad \Psi_0'' = -2mg'^2, \qquad \Pi_0'' = -2ng''^2,$$

aux deux conditions

$$P_0\Phi_0'' = Q_0\Psi_0'' = R_0\Pi_0'',$$

ou bien

$$\alpha p . 2lg^2 = 6q . 2mg'^2 = \gamma r . 2ng''^2.$$

Nous tiendrons donc compte de ces deux conditions, et nous définirons en même temps la dernière constante auxiliaire s, dont nous avons annoncé un peu plus haut l'introduction, en posant, par une raison de symétrie qui s'offre naturellement à l'esprit,

(41) $$s = \alpha plg^2 = 6qmg'^2 = \gamma rng''^2,$$

égalités d'où nous tirerons alors :

(42) $$\alpha lg^2 = \frac{s}{p}, \qquad 6mg'^2 = \frac{s}{q}, \qquad \gamma ng''^2 = \frac{s}{r}.$$

Cela fait, prenant ensuite simplement $v = 0$ et $w = 0$ dans la première des équations (40), et convenant de spécifier semblablement par l'indice 1 les valeurs correspondantes des différentes fonctions, comme les mêmes expressions (39) donneront alors évidemment $\Phi_1'^2 = \Phi'^2$, $\Psi_1'^2 = 0$, $\Pi_1'^2 = 0$, la première équation (40) se réduira de même pour cette hypothèse à

(43) $$2P_1Q_1R_1(Q_1\Psi_1'' - R_1\Pi_1'') = \frac{6\gamma}{\alpha} P_1^3\Phi'^2.$$

Or, les expressions (36) et (39) donnant de leur côté, en tenant compte des égalités (42),

$$\begin{cases} P_1 = \alpha p, & Q_1 = 6(q + lu), \quad R_1 = \gamma(r - lu), \\ \Psi''_1 = -2mg'^2 = \dfrac{-2s}{6q}, & \Pi''_1 = -2ng''^2 = \dfrac{-2s}{\gamma r}, \end{cases}$$

d'où l'on conclura

$$Q_1\Psi''_1 - R_1\Pi''_1 = 6(q + lu).\frac{-2s}{6q} - \gamma(r - lu).\frac{-2s}{\gamma r} = -2s\left[1 + \frac{l}{q}u - \left(1 - \frac{l}{r}u\right)\right]$$

$$= -2s\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)lu = \frac{-2sl}{qr}(q + r)u,$$

l'équation en question (43) sera, avec ces valeurs,

$$2\alpha p.6(q + lu).\gamma(r - lu).\frac{-2sl}{qr}(q + r)u = \frac{6\gamma}{\alpha}.\alpha^2p^2.4l^2g^2u\left[1 - (1 + k^2)u + k^2u^2\right],$$

ou, en multipliant par qr, développant, réduisant, et supprimant les deux facteurs communs aux deux membres $4\alpha6\gamma plu$ et $s = \alpha plg^2$,

$$-\left[qr + (r - q)lu - l^2u^2\right](q + r) = pqr\left[1 - (1 + k^2)u + k^2u^2\right].$$

Il faudra donc, pour l'identification, que l'on ait à la fois les deux conditions

$$-qr(q + r) = pqr \qquad \text{ou} \qquad -(q + r) = p,$$

avec

$$-(r - q)l.(q + r) = -pqr(1 + k^2) \qquad \text{et} \qquad l^2.(q + r) = pqrk^2,$$

dont la première est dores et déjà satisfaite par hypothèse, puisqu'elle reproduit simplement la relation (34), et réduit dès lors les deux suivantes, lorsqu'on l'y introduit, à ces deux plus simples :

$$(44) \qquad l(q - r) = (1 + k^2)qr, \qquad l^2 = -k^2qr.$$

Il est bien clair à présent qu'en faisant de même $w = 0$ et $u = 0$ dans la seconde équation (40), on trouverait d'une façon analogue, en identifiant cette fois par rapport à v, les deux autres conditions

$$(45) \qquad m(r-p) = (1 + k'^2)\, rp, \qquad m^2 = -k'^2 rp;$$

et enfin, en prenant semblablement $u = 0$ et $v = 0$ dans la troisième équation (40), l'identification par rapport à w fournirait alors ces deux dernières conditions

$$(46) \qquad n(p-q) = (1 + k''^2)\, pq, \qquad n^2 = -k''^2 pq.$$

Munis de ce premier résultat, reprenons le même procédé de recherche, avec un système particulier de valeurs des variables u, v, w, qui soient différentes de zéro, mais choisies de façon à rendre le calcul des substitutions dans les équations proposées (40) aussi simple que possible.

A cet effet, récrivant les deux premières expressions (39) de la façon suivante

$$(47) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi'^2 &= 4lg^2.lu\left[1 - u(1 + k^2 - k^2u)\right], \\ \Phi'' &= -2lg^2\left[1 - 2u(1 + k^2 - k^2u) + k^2u^2\right], \end{aligned} \right.$$

nous choisirons pour u la valeur $u = u_2$, définie par l'équation

$$(48) \qquad 1 + k^2 - k^2u_2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad u_2 = \frac{1 + k^2}{k^2},$$

parce que l'on voit de suite que, pour cette valeur particulière de u, des deux expressions précédentes, celle de Φ'^2 se réduira à un seul terme, et celle de Φ'' à deux termes seulement au lieu de trois (*).

(*) Il est facile, en effet, d'évaluer à l'avance le nombre énorme de termes que l'on aurait à envisager dans cette substitution, et qu'il faudrait ainsi calculer d'abord séparément, puis réduire, et ordonner, pour un système de valeurs des variables u, v, w, supposées toutes trois différentes de zéro, mais arbitrairement choisies d'ailleurs. Car chacune des neuf expressions (36) et (39) ayant déjà trois termes, on voit que le nombre de termes à former serait séparément, pour le premier membre de chaque équation précitée, (40) de :

Pour calculer commodément les valeurs correspondantes de ces mêmes expressions, les deux conditions déjà acquises (44), nous donneront tout d'abord, en les divisant l'une par l'autre, pour la valeur de u que nous venons de spécifier (48),

$$u_2 = \frac{1 + k^2}{k^2} = \frac{r - q}{l} \qquad \text{d'où} \qquad lu_2 = r - q,$$

laquelle, en tenant compte de la première égalité (42) et de la seconde (44), réduira les deux valeurs précédentes (47) de Φ'^2 et Φ'' simplement à celles-ci

$$\Phi'^2 = \frac{4s}{\alpha p}(r - q), \qquad \Phi'' = \frac{-2s}{\alpha p}\left(1 + \frac{k^2}{l^2} l^2 u_2^2\right) = \frac{-2s}{\alpha p}\left[1 - \frac{(r - q^2)}{qr}\right].$$

Et par conséquent, si nous envisageons simultanément pour u, v, w, les trois valeurs analogues, fournies par les égalités

$$lu_2 = r - q, \qquad mv_2 = p - r, \qquad nw_2 = q - p,$$

et que, pour plus de clarté, nous spécifions encore par l'indice 2 les valeurs des différentes fonctions correspondantes à ce système particulier de valeurs des trois variables, nous trouverons donc, en premier lieu, d'après le résultat qui précède,

$$(49) \left\{ \begin{array}{lll} \Phi_2'^2 = \dfrac{4s}{\alpha p}(r - q), & \Psi_2'^2 = \dfrac{4s}{6q}(p - r), & \Pi_2'^2 = \dfrac{4s}{\gamma r}(q - p), \\ \Phi_2'' = \dfrac{-2s}{\alpha p}\left[1 - \dfrac{(r - q)^2}{qr}\right], & \Psi_2'' = \dfrac{-2s}{6q}\left[1 - \dfrac{(p - r)^2}{rp}\right], & \Pi_2'' = \dfrac{-2s}{\gamma r}\left[1 - \dfrac{(q - p)^2}{pq}\right], \end{array} \right.$$

$3^3 . 2 . 3^2 = 6 . 3^4 = 6 . 81$, et pour le second membre de : $10 . 3 + 2 . 2 . 3 . 6 . 3 = 2 . 3 (5 + 2 . 6 . 3) = 6 (5 + 36) = 6 . 41$, soit ensemble pour chaque équation de : $6 (81 + 41) = 6 . 122 = 732$.

Pour le système particulier de valeurs u_2, v_2, w_2, que nous choisissons, au contraire, les trois quantités P, Q, R n'ayant plus qu'un seul terme, et les dérivées premières et secondes (49), étant développées et réduites, que deux et trois termes seulement, le nombre des termes analogues à former et à écrire sera dans les mêmes circonstances simplement, pour le premier membre, de : $2 . 1 . 3 = 6$, et pour le second membre de : $1 . 2 + 2 . 1 . 2 = 6$, au total *douze* pour chaque équation, au lieu de 732 que nous avons compté tout à l'heure.

et en second lieu, par les formules (36), et en tenant compte de la relation (34), pour la première fonction P,

$$P_2 = \alpha\left[p + (q - p) - (p - r)\right] = \alpha(-p + q + r) = -2\alpha p,$$

c'est-à-dire par conséquent pour P, Q, R, les valeurs simples

$$(50) \qquad P_2 = -2\alpha p, \qquad Q_2 = -2\beta q, \qquad R_2 = -2\gamma r.$$

Avec ces dernières, calculons séparément les deux membres de l'une quelconque des équations (40), la première par exemple, pour ce même système de valeurs des trois variables.

A cet effet, les valeurs (50) et (49) donnant tout d'abord

$$Q_2\Psi_2'' = 4s\left[1 - \frac{(r-p)^2}{rp}\right], \qquad R_2\Pi_2'' = 4s\left[1 - \frac{(p-q)^2}{pq}\right];$$

nous obtiendrons donc, d'une part, pour ce premier membre,

$$2P_2Q_2R_2(Q_2\Psi_2'' - R_2\Pi_2'') = 2(-2)^3.\alpha p.\beta q.\gamma r.4s\left[-\frac{(r-p)^2}{rp} + \frac{(p-q)^2}{pq}\right]$$

$$= 2^6\alpha\beta\gamma s\left[q(r-p)^2 - r(p-q)^2\right] = 2^6\alpha\beta\gamma s\left[q(r^2 - 2rp + p^2) - r(p^2 - 2pq + q^2)\right]$$

$$= 2^6\alpha\beta\gamma s\left[(q-r)p^2 + qr^2 - rq^2\right] = 2^6\alpha\beta\gamma s(q-r)(p^2 - qr).$$

D'autre part, les mêmes valeurs (50) donnant tout aussi faci lement

$$\begin{cases} 2\alpha R_2 - \gamma P_2 = -2(2\alpha.\gamma r - \gamma.\alpha p) = -2\alpha\gamma(2r - p), \\ 2\alpha Q_2 - \beta P_2 = -2(2\alpha.\beta q - \beta.\alpha p) = -2\alpha\beta(2q - p), \end{cases}$$

nous trouverons successivement pour le second membre de la même équation

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}P_2^3\Phi_2'^2 + (2\alpha R_2 - \gamma P_2)Q_2^2\Psi_2'^2 + (2\alpha Q_2 - \beta P_2)R_2^2\Pi_2'^2$$

$$= \frac{\beta\gamma}{\alpha}(-2)^3\alpha^3p^3.\frac{4s}{\alpha p}(r - q) - 2\alpha\gamma(2r - p).2^2\beta^2q^2.\frac{4s}{\beta q}(p - r)$$

$$- 2\alpha\beta(2q - p).2^2\gamma^2r^2.\frac{4s}{\gamma r}(q - p)$$

$$= -2^5\alpha\beta\gamma\delta\left[p^2(r-q)+(2r-p).q(p-r)+(2q-p).r(q-p)\right]$$
$$= -2^5\alpha\beta\gamma\delta\left[p^2(r-q)+(2r-p)(qp-qr)+(2q-p)(rq-rp)\right]$$
$$= -2^5\alpha\beta\gamma\delta\left[p^2(r-q)+2pqr-qp^2-qr(2r-p)\right.$$
$$\left.+rq(2q-p)-2pqr+rp^2\right]$$
$$= -2^5\alpha\beta\gamma\delta\left[2p^2(r-q)-qr\{2r-p-(2q-p)\}\right]$$
$$= -2^5\alpha\beta\gamma\delta\left[2p^2(r-q)-qr.2(r-q)\right]=2^6\alpha\beta\gamma\delta(q-r)(p^2-qr),$$

résultat identique à celui déjà trouvé pour le premier membre : et il en eût été bien évidemment de même si, au lieu de la première équation (40), nous eussions considéré la seconde ou la troisième, vu qu'elles se déduisent les unes des autres par permutation circulaire, de même que toutes les formules dont nous avons fait usage pour ce calcul.

On voit donc ainsi que pour un système particulier de valeurs des variables u, v, w, non compris dans ceux dont la considération nous avait déjà fourni les neuf conditions (41), (44), (45), et (46), et qui n'a pas été choisi expressément en vue du présent résultat, chacune des équations (40) est encore vérifiée identiquement par le moyen de ces seules conditions. Il est dès lors extrêmement probable que ces neuf conditions, jointes à celle (34) qui existait déjà à l'avance, en vertu de leur définition, sont à elles seules nécessaires et suffisantes pour que ces mêmes équations (40) soient vérifiées, comme on le demande, pour toutes les valeurs possibles des variables u et v, par les expressions (36) et (39).

Tel est le fait analytique essentiel, dont il nous reste uniquement désormais à nous assurer d'une façon certaine, pour avoir alors entre les mains tous les éléments de la solution.

Cette vérification finale serait sans doute encore une fois une opération fort compliquée, peut-être même impossible pratiquement, en raison du trop grand nombre de termes qu'il faudrait envisager, si l'on était tenu de l'opérer sur les équations proposées elles-mêmes. Mais il est clair que l'on pourra tout aussi

bien y procéder sur les équations transformées dans lesquelles elles se changeront par une substitution linéaire des variables u, v, w, substitution que l'on pourra choisir à volonté, de façon à réduire encore autant que possible le nombre des coefficients à calculer : car l'identité, étant supposée réalisée avec ce système déterminé de variables, se maintiendra encore évidemment lorsqu'on l'abandonnera pour revenir aux variables primitives.

Introduisons donc, dans cette pensée, à la place des variables u, v, w, trois autres variables U, V, W, qui en soient de simples fonctions linéaires, c'est-à-dire définies par les formules

$$(51) \qquad lu = l'\mathrm{U} + l'', \qquad mv = m'\mathrm{V} + m'', \qquad nw = n'\mathrm{W} + n'',$$

et disposons tout d'abord des six coefficients de la substitution $l', m', n', l'', m'', n''$, de manière à simplifier autant que possible à la fois les expressions (36) et (39). Récrivant donc dans ce but, en premier lieu les deux premières (39), en tenant compte des conditions (41) et (44), ainsi qu'il suit

$$\left\{\begin{aligned} \Phi'^2 &= \frac{4\alpha plg^2}{\alpha p}.\,lu\left[1 - \frac{q-r}{qr}\,lu - \frac{l^2}{qr}u^2\right] = \frac{4s}{\alpha pqr}\left[qr.\,lu + (r-q)\,l^2u^2 - l^3u^3\right],\\ \Phi'' &= -\frac{2\alpha plg^2}{\alpha p}\left[1 - 2\,\frac{q-r}{qr}\,lu - 3\,\frac{l^2}{qr}u^2\right] = \frac{-2s}{\alpha pqr}\left[qr + 2(r-q)\,lu - 3l^2u^2\right],\end{aligned}\right.$$

puis les transformant par la substitution linéaire (51) dans les suivantes

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi'^2 &= \frac{4s}{\alpha pqr}\left[qr\,(l'\mathrm{U} + l'') + (r-q)\,(l'\mathrm{U} + l'')^2 - (l'\mathrm{U} + l'')^3\right]\\ &= \frac{4s}{\alpha pqr}\Big[l''\left\{qr + (r-q)\,l'' - l''^2\right\} + \left\{qr + 2\,(r-q)\,l'' - 3l''^2\right\}l'\mathrm{U}\\ &\qquad\qquad + (r - q - 3l'')\,l'^2\mathrm{U}^2 - l'^3\mathrm{U}^3\Big],\\ \Phi'' &= \frac{-2s}{\alpha pqr}\left[qr + 2\,(r-q)\,(l'\mathrm{U} + l'') - 3\,(l'\mathrm{U} + l'')^2\right]\\ &= \frac{-2s}{\alpha pqr}\left[qr + 2\,(r-q)\,l'' - 3l''^2 + 2\,(r - q - 3l'')\,l'\mathrm{U} - 3l'^2\mathrm{U}^2\right],\end{aligned}\right.$$

nous ferons, comme on voit, disparaître l'avant-dernier terme de chacune de ces deux expressions, en déterminant le coefficient l'' de la substitution (51) par la condition

$$(53)\qquad r-q-3l''=0,\qquad \text{d'où}\qquad l''=\frac{1}{3}(r-q);$$

auquel cas, d'abord les autres coefficients de ces mêmes expressions auront alors respectivement pour valeurs, eu égard à la relation (34),

$$\left\{\begin{aligned}
l''\{qr+(r-q)l''-l''^2\} &= \frac{r-q}{3}\left[qr+\frac{(r-q)^2}{3}-\left(\frac{r-q}{3}\right)^2\right]\\
&= \frac{r-q}{3^3}\left[3^2qr+3(r-q)^2-(r-q)^2\right]=\frac{r-q}{3^3}\left[9qr+2(r-q)^2\right]\\
&= \frac{r-q}{3^3}\left[qr+2(r+q)^2\right]=\frac{r-q}{3^3}\left[qr-(q+r)p+p^2\right]\\
&= \frac{r-q}{3^3}(q-p)(r-p)=\frac{1}{3^3}(q-r)(r-p)(p-q)=-\frac{1}{3^3}G,\\
qr+2(r-q)l''-3l''^2 &= qr+\frac{2}{3}(r-q)^2-\frac{1}{3}(r-q)^2=\frac{1}{3}\left[3qr+(r-q)^2\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[-qr+(r+q)^2\right]=\frac{1}{3}\left[-qr-p(r+q)\right]=-\frac{1}{3}(qr+rp+pq)=-\frac{1}{3}D,
\end{aligned}\right.$$

en convenant de poser pour ce calcul

$$(54)\qquad D=qr+rp+pq,\qquad G=-(q-r)(r-p)(p-q);$$

et, cela fait, par le moyen de ces dernières valeurs, les deux expressions ci-dessus (52) se réduiront dès lors aux suivantes :

$$(55)\quad\left\{\begin{aligned}
\Phi'^2 &= \frac{4s}{\alpha pqr}\left[-\frac{1}{3^3}G-\frac{1}{3}D.l'U-l'^3U^3\right]=\frac{-4s}{3^3\alpha pqr}\left[G+3D.3l'U+(3l')^3U^3\right],\\
\Phi'' &= \frac{-2s}{\alpha pqr}\left[-\frac{1}{3}D-3l'^2U^2\right]\qquad\qquad=\frac{2s}{3\alpha pqr}\left[D+(3l')^2U^2\right].
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, si l'on tient compte encore de la relation (34), les valeurs des trois coefficients l'', m'', n'', analogues à (33), savoir

$$(36)\qquad l''=\frac{1}{3}(r-q),\qquad m''=\frac{1}{3}(p-r),\qquad n''=\frac{1}{3}(q-p),$$

donnant alors pour leurs différences deux à deux

$$n''-m''=-p,\qquad l''-n''=-q,\qquad m''-l''=-r,$$

les expressions (36) se changeront de leur côté, par les substitutions (31), dans les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} P&=\alpha\left[p+n'W+n''-(m'V+m'')\right]=\alpha(n'W-m'V),\\ Q&=6\left[q+l'U+l''-(n'W+n'')\right]=6(l'U-n'W),\\ R&=\gamma\left[r+m'V+m''-(l'U+l'')\right]=\gamma(m'V-l'U).\end{aligned}\right.$$

Si donc, en vue de simplifier encore davantage l'écriture des expressions (55), nous prenons en outre, conjointement avec les valeurs précédentes (36) de l'', m'', n'', pour l', m', n', la valeur commune $l'=m'=n'=\frac{1}{3}$, l'on voit alors, qu'avec les nouvelles variables (31) ainsi définies, les neuf expressions (36) et (39), que nous avons à substituer, auront pris maintenant les valeurs beaucoup plus simples (*)

$$(57)\qquad\left\{\begin{aligned} \Phi'^2&=\frac{-4s}{3^3\alpha pqr}(G+3DU+U^3), & \Phi''&=\frac{2s}{3\alpha pqr}(D+U^2),\\ \Psi'^2&=\frac{-4s}{3^3 6pqr}(G+3DV+V^3), & \Psi''&=\frac{2s}{36pqr}(D+V^2),\\ \Pi'^2&=\frac{-4s}{3^3\gamma pqr}(G+3DW+W^3), & \Pi''&=\frac{2s}{3\gamma pqr}(D+W^2),\end{aligned}\right.$$

$$(58)\qquad P=\frac{\alpha}{3}(W-V)=\frac{\alpha}{3}L,\qquad Q=\frac{6}{3}(U-W)=\frac{6}{3}M,\qquad R=\frac{\gamma}{3}(V-U)=\frac{\gamma}{3}N,$$

(*) Nous avons dit, dans la note de la page 316 ci-dessus, qu'après la substitution dans les équations (40) des expressions (36) et (39), le nombre des termes en u, v, w qui s'offri-

en convenant encore une fois de désigner par L, M, N les trois différences

$$(59)\qquad L = W - V, \qquad M = U - W, \qquad N = V - U,$$

lesquelles vérifient évidemment les cinq relations

$$(60)\left\{\begin{array}{l} L + M + N = 0, \qquad LU + MV + NW = 0, \\ LMN = -(LU^2 + MV^2 + NW^2), \\ 2N - L = 3V - 2U - W, \qquad 2M - L = -(3W - 2U - V), \end{array}\right.$$

dont nous aurons à faire usage tout à l'heure.

Avec ces valeurs simplifiées (58) et (57), nous aurons maintenant pour les différents facteurs qui figurent dans la première équation (40), dont il s'agit de vérifier l'identification,

$$\left\{\begin{array}{l} PQR = \frac{\alpha6\gamma}{3^3} LMN, \qquad Q\Psi'' - R\Pi'' = \frac{2s}{3^2 pqr}\left[M(D + V^2) - N(D + W^2)\right], \\ 2\alpha R - \gamma P = \frac{\alpha\gamma}{3}(2N - L), \qquad 2\alpha Q - 6P = \frac{\alpha 6}{3}(2M - L). \end{array}\right.$$

raient ainsi, avant toute réduction, les variables restant arbitraires, serait égal pour chacune à 732. En supputant semblablement le nombre des termes analogues en U, V, W, fournis par la substitution des expressions (58) et (57) à la place des précédentes, on reconnaîtra sans peine, exactement de la même façon, en ayant égard aux relations suivantes (60), que ce nombre sera maintenant pour chaque équation, en faisant tout passer dans le premier membre,

$$6.2.4 + 4.3 + 2.3.3.3 = 6(8 + 2 + 9) = 6.19 = 114,$$

au lieu de 732, auxquels donnait naissance la substitution précédente.

Toutefois quelque importante que soit cette réduction dans le nombre total des termes que l'on aurait ainsi à former, puis à réduire et à ordonner, ce n'est point en réalité cette simplification qui assure le succès du calcul que nous allons entreprendre, car ce nombre demeurerait encore évidemment trop grand pour que l'opération devînt pratique, si les coefficients de ces différents termes restaient toujours comme auparavant des fonctions plus ou moins compliquées des 31 constantes considérées dans ce calcul; mais bien plutôt ce fait, que les nouveaux développements en question ne contiendront plus comme constantes que les deux seules quantité (54) D et G, par rapport auxquelles ils sont linéaires comme les expressions (57) elles-mêmes : ce qui permettra, en ordonnant ces développements par rapport à ces constantes, de n'avoir plus à considérer que des polynômes homogènes du 6e degré au plus en U, V, W, à coefficients exclusivement *numériques et entiers*, et d'ailleurs fort simples, et par conséquent infiniment plus faciles à calculer et à réduire.

En remettant donc ces différentes valeurs, ainsi que les dérivées premières (57), et la valeur (58) de P, dans l'équation en question, nous trouverons alors pour résultat

$$2\,\frac{\alpha\beta\gamma}{3^3}\,\mathrm{LMN}.\frac{2s}{3^2pqr}\left[\mathrm{M}\,(\mathrm{D}+\mathrm{V}^2)-\mathrm{N}\,(\mathrm{D}+\mathrm{W})^2\right]$$

$$=\frac{-4s}{3^3pqr}\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^3\mathrm{L}^3}{3^3}\cdot\frac{1}{\alpha}(\mathrm{G}+3\mathrm{DU}+\mathrm{U}^3)+\frac{\alpha\gamma}{3}(2\mathrm{N}-\mathrm{L}).\frac{\beta^2\mathrm{M}^2}{3^2}\cdot\frac{1}{\beta}(\mathrm{G}+3\mathrm{DV}+\mathrm{V}^3)\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha\beta}{3}(2\mathrm{M}-\mathrm{L}).\frac{\gamma^2\mathrm{N}^2}{3^2}(\mathrm{G}+3\mathrm{DW}+\mathrm{W}^3)\right],$$

ou, en faisant passer tous les termes dans le premier membre, supprimant le facteur $\frac{4s\alpha\beta\gamma}{3^6pqr}$, et désignant pour un instant par Δ le résultat ainsi obtenu,

$$\Delta=3\mathrm{LMN}\left[\mathrm{M}\,(\mathrm{D}+\mathrm{V}^2)-\mathrm{N}\,(\mathrm{D}+\mathrm{W}^2)\right]+\mathrm{L}^3\,(\mathrm{G}+3\mathrm{DU}+\mathrm{U}^3)$$
$$+\mathrm{M}^2\,(2\mathrm{N}-\mathrm{L})\,(\mathrm{G}+3\mathrm{DV}+\mathrm{V}^3)+\mathrm{N}^2\,(2\mathrm{M}-\mathrm{L})\,(\mathrm{G}+3\mathrm{DW}+\mathrm{W}^3),$$

expression qui devra dès lors, si nos prévisions sont bien exactes, être identiquement nulle.

Pour procéder à cette vérification, après avoir développé le second membre, au lieu de l'ordonner par rapport aux puissances de U, V, W, il sera plus commode de l'ordonner par rapport aux deux constantes G et D, qui y figurent seules, et par rapport auxquelles il est linéaire ; c'est-à-dire que nous écrirons cette même expression sous la forme

$$\Delta=\mathcal{A}\mathrm{G}+3\mathcal{B}\mathrm{D}+\mathcal{C},$$

les trois coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ne contenant plus dès lors dans leurs expressions que les seules quantités U, V, W, par rapport auxquelles elles seront homogènes, et respectivement des 3e, 4e, et 6e degrés. Et nous nous assurerons alors, sans trop de difficulté, à l'aide des valeurs de définition (59), et des relations (60) qui en découlent, que chacun de ces trois coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, est bien identiquement nul.

En effet, en premier lieu, pour le coefficient $\mathcal{A}$, dont l'expression de définition est, d'après ce que nous venons de dire,

$$\mathcal{A} = L^3 + M^2(2N - L) + N^2(2M - L),$$

la première relation (60) donnant immédiatement

$$(61) \qquad L = -(M + N),$$

il est clair que cette même expression $\mathcal{A}$ pourra être écrite successivement, en partant de celle qui précède,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= L(M + N)^2 + 2MN(M + N) - L(M^2 + N^2) \\ &= L(M^2 + 2MN + N^2) - 2MN.L - L(M^2 + N^2) = 0. \end{aligned}$$

En second lieu, pour le coefficient $\mathcal{B}$, remarquant tout d'abord que les valeurs de définition (59) et la seconde relation (60) donnent semblablement

$$(62) \qquad M - N = 2U - V - W, \qquad -LU = MV + NW,$$

et par suite, en tenant compte aussi de la précédente (61),

$$(62^{bis}) \left\{ \begin{aligned} UL^2 - VM^2 - WN^2 &= U(M^2 + 2MN + N^2) - VM^2 - WN^2 \\ &= (U - V)M^2 + (U - W)N^2 + 2UMN = -NM^2 + MN^2 + 2UMN \\ &= MN[-(M - N) + 2U] = MN[-(2U - V - W) + 2U] \\ &= MN(V + W), \end{aligned} \right.$$

l'expression du second coefficient $\mathcal{B}$, dont la valeur de définition est

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= LMN(M - N) + L^3U + M^2(2N - L)V + N^2(2M - L)W \\ &= LMN(M - N) + L(UL^2 - VM^2 - WN^2) + 2MN(MV + NW), \end{aligned}$$

équivaudra par conséquent, en vertu des trois relations (62) et (62bis) que nous venons d'établir, à celle-ci

$$\mathcal{B} = LMN(2U - V - W) + L.MN(V + W) - 2\,MN.LU = 0.$$

Enfin, pour le dernier coefficient $\mathcal{C}$, dont l'expression est la plus compliquée des trois, à savoir

$$\mathcal{C} = 3LMN(MV^2 - NW^2) + L^3U^3 + M^2(2N - L)V^3 + N^2(2M - L)W^3,$$

celle-là encore se transformera sans trop de peine, à l'aide des relations ci-dessus établies (60), ainsi qu'il suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = & -3(LU^2 + MV^2 + NW^2)(MV^2 - NW^2) + L^3U^3 + M^2(3V - 2U - W)V^3 \\
& \qquad - N^2(3W - 2U - V)W^3 \\
= & -3(LM.U^2V^2 + M^2.V^4 + MN.V^2W^2 - NL.W^2U^2 - MN.V^2W^2 - N^2W^4) \\
& + L^3.U^3 + 3M^2.V^4 - M^2.(2U + W)V^3 - 3N^2.W^4 + N^2.(2U + V)W^3;
\end{aligned}$$

ou encore, en réduisant, et remettant à la place de L, M, N leurs valeurs de définition (59),

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = & -3\left[(W - V)(U - W).U^2V^2 - (V - U)(W - V).W^2U^2\right] \\
& + (W - V)^3.U^3 - (U - W)^2.(2U + W)V^3 + (V - U)^2.(2U + V)W^3 \\
= & -3\left[(WU - UV - W^2 + VW).U^2V^2 - (VW - WU - V^2 + UV).W^2U^2\right] \\
& + (W^3 - 3VW^2 + 3WV^2 - V^3).U^3 \\
& - (U^2 + W^2 - 2UW)(2UV^3 + WV^3) + (V^2 + U^2 - 2VU)(2UW^3 + VW^3) \\
= & -3(U^3V^2W - U^3V^3 + U^2V^3W) + 3(U^3VW^2 - U^3W^3 + U^2VW^3) \\
& + (U^3W^3 - 3U^3VW^2 + 3U^3V^2W - U^3V^3) \\
& - (2U^3V^3 + 2UV^3W^2 - 4U^2V^3W + U^2V^3W + V^3W^3 - 2UV^3W^2) \\
& + (2UV^2W^3 + 2U^3W^3 - 4U^2VW^3 + V^3W^3 + U^2VW^3 - 2UV^2W^3) = 0,
\end{aligned}$$

tous les termes sans exception se détruisant deux à deux, ainsi qu'il est facile de le reconnaître.

Et l'on vérifierait exactement de même que les deux autres équations (40) se réduisent elles aussi à de simples identités, car il est clair que, par le même calcul, elles prendraient alors la forme

$$\mathcal{A}'G + 3\mathcal{B}'D + \mathcal{C}' = 0, \qquad \mathcal{A}''G + 3\mathcal{B}''D + \mathcal{C}'' = 0,$$

les deux groupes $(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}')$, $(\mathcal{A}'', \mathcal{B}'', \mathcal{C}'')$ se déduisant évi-

demment du groupe $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ par la simple permutation circulaire des trois lettres U, V, W, et, par conséquent, étant encore composés l'un et l'autre de trois expressions identiquement nulles.

Nos prévisions sont donc bien réalisées, et nous sommes certains à présent que les neuf relations entre les constantes (41), (44), (45), et (46), jointes à celle (34) qui existait antérieurement entre elles, comme conséquence de leur définition, sont *nécessaires* et suffisantes pour que les expressions (19) et (29) fournissent une solution du problème : ce qui revient à dire que cette même solution sera alors *la plus générale* possible, si les constantes qui y figurent ne sont astreintes qu'à *ces seules* conditions.

Formation de la solution définitive du problème spécial envisagé dans ce chapitre. — Il ne nous reste donc plus maintenant qu'à donner à la solution ainsi obtenue une forme telle, qu'elle ne renferme plus que des constantes indépendantes les unes des autres, et, par conséquent, individuellement arbitraires.

Si, dans ce but, l'on jette un coup d'œil en arrière sur l'ensemble de ce calcul, depuis le moment où nous avons déterminé les inconnues Φ, Ψ, Π, à l'aide des équations différentielles (28), jusqu'à celui où nous nous sommes proposé de reconnaître que les conditions déjà rencontrées par nous entre les constantes étaient suffisantes pour procurer une solution (p. 319), on reconnaîtra sans peine qu'entre les 31 constantes déjà énumérées qui figurent dans ce calcul, savoir les 18 (32), les 12

$$(63) \qquad g,\ g',\ g'',\qquad k,\ k',\ k'',\qquad l,\ m,\ n,\qquad p,\ q,\ r,$$

et enfin la constante s, nous avons établi successivement, tant comme définitions que comme résultats des calculs, 21 relations distinctes seulement, savoir les 3 (30), les 3 (31), les 6 (33) (*),

(*) La relation (34) ne doit plus maintenant entrer en ligne de compte, attendu qu'elle n'est pas distincte des équations (33) actuellement envisagées, dont elle est une simple conséquence algébrique.

les 3 (41), et les 6 (44), (45), et (46), en sorte que la solution obtenue par le moyen de ces conditions, qui est la plus générale possible, ainsi que nous venons de le dire, devra contenir dès lors dans son expression *dix* constantes individuellement arbitraires, et ne pourra en renfermer davantage. Il résulte de là que si, par un procédé quelconque, nous venons à rencontrer un système de ces 31 constantes qui vérifient à la fois les 21 relations précitées, et pas d'autres en sus, c'est-à-dire telles qu'après ces vérifications il en subsiste encore dix individuellement arbitraires, l'on pourra affirmer en toute certitude que ce système de constantes, étant introduit dans les expressions (19) et (29), fournira précisément la solution la plus générale du problème qu'il s'agissait de trouver.

Or, d'une part, si, conservant toujours les douze relations (30), (31), et (33), nous éliminons en conséquence par leur moyen, des neuf autres relations, les douze constantes (63) qu'elles avaient pour but de définir, il est bien facile de voir que les neuf relations transformées, ainsi obtenues entre les dix-neuf autre constantes, qui seront alors, en intervertissant leur ordre, et chassant les dénominateurs, au lieu de (44), (45), (46), et (41), celles-ci (*)

(*) Nous écrivons en premier lieu les équations de droite des trois couples d'équations (44), (45), et (46), puis les équations de gauche des mêmes couples, et enfin les trois équations (41). Cette disposition présente l'avantage de mettre tout naturellement sur la voie du système de solution (64), que nous indiquons pour l'ensemble des neuf équations en question.

En effet, comme la première ligne de ce système (64) fournit une solution qui s'offre, pour ainsi dire, d'elle-même à l'esprit, relativement au premier des trois groupes précités, l'on se trouve ainsi rationnellement conduit à essayer si cette même solution ne vérifierait pas également le second groupe; et comme on aperçoit sans peine qu'il en est bien ainsi, la seconde ligne du système (64) résulte dès lors du troisième groupe comme conséquence naturelle et immédiate.

Peut-être l'ensemble de ces circonstances aurait-il moins de chances d'être aperçu, en examinant ces diverses équations dans l'ordre indiqué par les numéros ou la disposition de celles dont elles proviennent, c'est-à-dire dans l'ordre même où nous avons successivement rencontré celles-ci au cours de notre théorie.

$$\left\{\begin{array}{l}
(a^2-b^2)^2=-\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}(c''^2-a^2)(a^2-b'^2),\\
(b'^2-c'^2)^2=-\dfrac{b'^2-c'^2}{b'^2-a'^2}(a^2-b'^2)(b'^2-c''^2),\\
(c''^2-a''^2)^2=-\dfrac{c''^2-a''^2}{c''^2-b''^2}(b'^2-c''^2)(c''^2-a^2),
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(a^2-b^2)[(a^2-b'^2)-(c''^2-a^2)]=-\dfrac{(a^2-c^2)+(a^2-b^2)}{a^2-c^2}(c''^2-a^2)(a^2-b'^2),\\
(b'^2-c'^2)[(b'^2-c''^2)-(a^2-b'^2)]=-\dfrac{(b'^2-a'^2)+(b'^2-c'^2)}{b'^2-a'^2}(a^2-b'^2)(b'^2-c''^2),\\
(c''^2-a''^2)[(c''^2-a^2)-(b'^2-c''^2)]=-\dfrac{(c''^2-b''^2)+(c''^2-a''^2)}{c''^2-b''^2}(b'^2-c''^2)(c''^2-a^2),
\end{array}\right.$$

$$s=\alpha(b'^2-c''^2)(a^2-b^2).\frac{A}{4}(a^2-c^2)=6(c''^2-a^2)(b'^2-c'^2).\frac{B}{4}(b'^2-a'^2),$$

$$=\gamma(a^2-b'^2)(c''^2-a''^2).\frac{C}{4}(c''^2-b''^2),$$

seront satisfaites simultanément en établissant à nouveau entre les mêmes constantes les neuf relations très simples

$$(64)\quad\left\{\begin{array}{l}
a=a'=a'',\qquad b=b'=b'',\qquad c=c'=c'',\\
\alpha A=6B=\gamma C=\dfrac{-4s}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}.
\end{array}\right.$$

D'autre part, en introduisant alors ces nouvelles hypothèses dans la solution obtenue, c'est-à-dire dans les expressions (19) et (29), où g, g', g'', k, k', k'' sont supposés représenter les valeurs (30) et (31), comme cette même solution consistera alors dans l'ensemble des formules suivantes

$$(65)\qquad P=\alpha(\Psi-\Pi),\qquad Q=6(\Pi-\Phi),\qquad R=\gamma(\Phi-\Psi),$$

$$(66)\quad\left\{\begin{array}{l}
\Phi=-a^2\,\mathrm{cn}^2(g\varphi+h)-b^2\,\mathrm{sn}^2(g\varphi+h),\\
\Psi=-b^2\,\mathrm{cn}^2(g'\psi+h')-c^2\,\mathrm{sn}^2(g'\psi+h'),\\
\Pi=-c^2\,\mathrm{cn}^2(g''\varpi+h'')-a^2\,\mathrm{sn}^2(g''\varpi+h''),
\end{array}\right.$$

(*)

$$
(67)\quad \begin{cases} g = \sqrt{\dfrac{s}{\alpha}}\dfrac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}, & k = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \\ g' = \sqrt{\dfrac{s}{6}}\dfrac{1}{\sqrt{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}}, & k' = \sqrt{\dfrac{b^2-c^2}{b^2-a^2}}, \\ g'' = \sqrt{\dfrac{s}{\gamma}}\dfrac{1}{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}, & k'' = \sqrt{\dfrac{c^2-a^2}{c^2-b^2}}, \end{cases}
$$

et qu'elle renfermera, comme on voit, *dix* constantes complètement arbitraires, savoir α, 6, γ, a^2, b^2, c^2, h, h', h'', et s, toutes les autres qui y figurent, c'est-à-dire g, g', g'', k, k', k'', étant exprimées en fonction de celles-là, on reconnaît par là, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure (p. 328), que cette solution que nous venons d'écrire constitue bien dès lors la solution la plus générale cherchée : c'est-à-dire les valeurs les plus générales des inconnues P, Q, R, qui satisfont à la fois aux trois conditions (8) ou (9) du Chapitre III, aux trois équations du premier ordre (13), et aux trois équations du second ordre (19), du même Chapitre.

7° « *Si l'on prend pour variables indépendantes les fonctions* Φ, Ψ, Π, *à la place de* φ, ψ, ϖ, *l'expression, pour le Cas le plus général, des trois invariants* Δ_1 *relatifs à ces nouvelles coordonnées, sera exactement la même, à un même facteur constant*

(*) Si l'on suppose, suivant l'usage, les trois constantes réelles (positives ou négatives) a^2, b^2, c^2 rangées par grandeur relative dans l'ordre : $a^2 > b^2 > c^2$, le module k' est alors imaginaire, et le module k'', bien que réel, est toutefois plus grand que l'unité. Cette circonstance n'empêche pas néanmoins, ainsi que nous le montrerons au début de notre Chapitre VI, à l'aide des deux groupes de formules classiques *des modules complémentaires*, et des *modules réciproques*, à la seule condition de disposer convenablement de la forme des constantes additives h' et h'', et du signe des constantes arbitraires réelles α, 6, γ, et s, que les trois expressions ci-dessus des fonctions Φ, Ψ, Π, et par suite aussi des inconnues P, Q, R, ne soient toutes réelles pour des valeurs réelles des coordonnées φ, ψ, ϖ, et ne puissent alors toutes s'exprimer assez simplement à l'aide de sinus d'amplitude de *forme canonique*, c'est-à-dire tous relatifs au même module k, réel et plus petit que l'unité dans l'hypothèse précitée.

près, que pour le Système Ellipsoïdal, ou des Coordonnées Elliptiques. » — Nous voici donc enfin parvenu au terme de la laborieuse recherche que nous avions assignée comme objet à ce Chapitre. Nous la résumerons en quelque sorte, et donnerons au résultat une forme concrète, plus simple à énoncer sinon plus facile à saisir, en l'exprimant par la proposition analytique que nous venons de formuler, et dont la démonstration occupera les deux dernières pages du dit Chapitre.

En effet, si nous convenons de désigner semblablement par H_1, K_1, J_1, les trois quantités analogues, dans le système des nouvelles coordonnées Φ, Ψ, Π, aux trois quantités H, K, J, définies par les formules (10) du Chapitre précédent, comme le même élément d'arc ds aura en même temps pour expression de son carré, dans les deux systèmes, les deux valeurs

$$\begin{aligned} ds^2 = H d\varphi^2 + K d\psi^2 + J d\varpi^2 &= H_1 d\Phi^2 + K_1 d\Psi^2 + J_1 d\Pi^2 \\ &= H_1 . \Phi'^2 d\varphi^2 + K_1 . \Psi'^2 d\psi^2 + J_1 . \Pi'^2 d\varpi^2, \end{aligned}$$

il est clair qu'il faudra, vu l'indépendance relative des différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi$, que l'on ait séparément

$$(68) \qquad H = H_1 \Phi'^2, \qquad K = K_1 \Psi'^2, \qquad J = J_1 \Pi'^2.$$

Or, d'une part, les valeurs (65), obtenues pour P, Q, R, donneront, par les formules (10) du Chapitre III précitées, pour H, K, J, les expressions

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \beta\gamma (\Pi - \Phi)(\Phi - \Psi), \qquad K = \gamma\alpha (\Phi - \Psi)(\Psi - \Pi), \\ J &\quad \alpha\beta (\Psi - \Pi)(\Pi - \Phi). \end{aligned} \right.$$

D'autre part, si l'on introduit dans les expressions (28) des dérivées Φ', Ψ', Π' les nouvelles conditions (64), et que l'on convienne de représenter désormais, pour abréger l'écriture, par G, la constante

$$(70) \qquad G = (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2),$$

et de nouveau, comme dans le Chapitre II (pp. 97-98), par $f(\Omega)$, quel que soit Ω, le polynôme du troisième degré

$$f(\Omega) = (\Omega + a^2)(\Omega + b^2)(\Omega + c^2), \tag{71}$$

lesdites expressions (28) deviendront alors simplement

$$\Phi'^2 = \frac{-4s}{G\alpha} f(\Phi), \qquad \Psi'^2 = \frac{-4s}{G\beta} f(\Psi), \qquad \Pi'^2 = \frac{-4s}{G\gamma} f(\Pi). \tag{72}$$

L'on pourra tirer, par conséquent, des relations précédentes (68), en tenant compte des expressions (69) et (72), pour les quantités H_1, K_1, J_1, les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} H_1 &= \Delta_1^{-2}\Phi = \frac{H}{\Phi'^2} = \frac{G\alpha\beta\gamma}{s}\,\frac{(\Phi-\Psi)(\Phi-\Pi)}{4f(\Phi)},\\ K_1 &= \Delta_1^{-2}\Psi = \frac{K}{\Psi'^2} = \frac{G\alpha\beta\gamma}{s}\,\frac{(\Psi-\Pi)(\Psi-\Phi)}{4f(\Psi)},\\ J_1 &= \Delta_1^{-2}\Pi = \frac{J}{\Pi'^2} = \frac{G\alpha\beta\gamma}{s}\,\frac{(\Pi-\Phi)(\Pi-\Psi)}{4f(\Pi)}; \end{aligned}\right. \tag{73}$$

et enfin, de ces dernières égalités elles-mêmes, en représentant par $\frac{1}{d^2}$ la constante $\frac{G\alpha\beta\gamma}{s}$, c'est-à-dire en posant

$$d^2 = \frac{s}{G\alpha\beta\gamma} = \frac{s}{\alpha\beta\gamma(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}, \tag{74}$$

l'on conclura définitivement, pour les invariants Δ_1 relatifs aux trois nouvelles coordonnées, les trois expressions

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta_1\Phi = 2d.\sqrt{\frac{f(\Phi)}{(\Phi-\Psi)(\Phi-\Pi)}}, \qquad \Delta_1\Psi = 2d.\sqrt{\frac{f(\Psi)}{(\Psi-\Pi)(\Psi-\Phi)}},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta_1\Pi = 2d.\sqrt{\frac{f(\Pi)}{(\Pi-\Phi)(\Pi-\Psi)}}, \end{aligned}\right. \tag{75}$$

qui ne renferment plus dès lors que les quatre constantes complètement arbitraires a, b, c, d, et qui se confondent, comme on

voit, avec les expressions particulières propres au Système Ellipsoïdal, en attribuant simplement au coefficient d la valeur $d = 1$.

Ce résultat, si net et si limité, que rien dans les données analytiques ne permettait de prévoir, fait déjà pressentir une étroite connexité entre le Cas le plus général et le Cas particulier du Système Ellipsoïdal. Toutefois, nous n'apercevons aucun moyen sûr de tirer de ce fait analytique si remarquable aucune conclusion précise et certaine, au sujet de la délimitation des familles de surfaces qui devront entrer dans la composition du système. C'est pourquoi il nous est nécessaire, tout comme si la susdite coïncidence ne se fût pas révélée, de rechercher dans le Chapitre suivant les équations les plus générales de ces familles de surfaces, ou, ce qui revient au même, les relations entre les coordonnées rectilignes d'une part, et curvilignes de l'autre, à l'aide de la méthode générale que nous avons indiquée pour cet objet, en posant le problème, dans notre Chapitre III.

CHAPITRE V.

Détermination, pour le cas le plus général, de l'expression des trois coordonnées rectilignes en fonction des coordonnées curvilignes.

Système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre auquel satisfont simultanément les trois coordonnées rectilignes, lorsque l'on tient compte des résultats précédemment acquis. — Étant venu, dans le Chapitre précédent, heureusement à bout des obstacles qui hérissaient la première moitié de la carrière que nous avons à parcourir, nous pouvons espérer maintenant, sans trop de présomption, conduire de même à bon port le Lecteur au terme définitif de la recherche, s'il veut bien nous accorder encore, pour la seconde moitié de la carrière, le même crédit de patience, toujours en considération de la difficulté du problème d'Analyse qu'il s'agit de résoudre.

Cette seconde partie de notre programme consiste, ainsi que nous l'avons dit en posant le problème dans le Chapitre III, à déterminer les trois coordonnées rectilignes x, y, z, en fonction des coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ, par la condition de satisfaire simultanément aux six équations du premier ordre non linéaires (20), dans lesquelles les quantités P, Q, R représenteront maintenant les trois expressions déterminées que nous venons d'obtenir comme résultat, à la fin du Chapitre précédent, c'est-à-dire celles fournies par les formules (65), (66), et (67) de ce Chapitre.

Cela posé, nous pourrons, comme on le verra, atteindre le but en question par deux voies pour ainsi dire inverses l'une de l'autre, et dont voici, en quelque sorte, pour chacune, le programme et les traits essentiels.

Pour la première, formant par la différentiation le système complet des équations aux dérivées partielles du second ordre

auxquelles devra satisfaire isolément chacune des trois fonctions inconnues x, y, z; puis, adoptant ces équations comme point de départ, en déduire par l'intégration, pour ces mêmes inconnues, des expressions de même forme, mais plus larges, que celles qui conviennent proprement à la question; et, enfin, ces expressions une fois obtenues, déterminer les arbitraires surabondantes qu'elles renfermeront ainsi par la condition de satisfaire aux équations proposées elles-mêmes. Pour la seconde, commencer, au contraire, par former l'intégrale la plus générale de chacune des trois équations du premier ordre (20) du Chapitre III qui ne renferment qu'une seule inconnue, c'est-à-dire des trois équations de gauche de ce groupe; puis, partant alors de l'expression ainsi obtenue pour chaque inconnue x, y, z, et s'aidant au besoin d'une partie des équations du second ordre déjà envisagées dans la première méthode, déterminer les arbitraires introduites par les trois intégrales générales que nous venons de dire, par la condition de satisfaire ensuite, avec les mêmes expressions de x, y, z, aux trois équations de droite du même système proposé (20).

La première de ces deux méthodes étant la plus courte et la plus directe, c'est celle-là seulement que nous développerons dans ce Chapitre, et, pour ne pas fatiguer le Lecteur, après l'avoir conduit au but, nous reporterons en appendice, dans les Notes II et III, la démonstration et l'application de la seconde méthode, qui devra nous amener, bien entendu, exactement au même résultat que la première.

Mais, avant de commencer l'exposition de cette première méthode, voyons tout d'abord, aussi bien en vue de l'une que de l'autre, ce que deviendra le système proposé (20) du Chapitre III, lorsque nous y introduirons les résultats acquis à la fin du Chapitre précédent, c'est-à-dire les valeurs (65) de P, Q, R, et dans ce but, commençons par effectuer dans ce système un changement linéaire des variables indépendantes, en prenant, à la place de φ, ψ, ϖ, les nouvelles variables

$$\varphi_1 = g\varphi + h, \qquad \psi_1 = g'\psi + h', \qquad \varpi_1 = g''\varpi + h'',$$

c'est-à-dire les arguments eux-mêmes des fonctions elliptiques qui figurent dans les expressions (66) de Φ, Ψ, Π.

A cet effet, remarquant, en premier lieu, qu'en convenant de désigner par u l'une quelconque des coordonnées rectilignes, les trois équations de gauche (20) du Chapitre III qui seront alors comprises sous le type unique

$$(76)\qquad P\left(\frac{u}{\varphi}\right)^2 + Q\left(\frac{u}{\psi}\right)^2 + R\left(\frac{u}{\varpi}\right)^2 = PQR, \quad (^*)$$

s'écriront de même, en ayant égard aux expressions précitées (65) de P, Q, R,

$$(77)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha(\Psi-\Pi).\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \beta(\Pi-\Phi).\left(\frac{du}{d\psi}\right)^2 + \gamma(\Phi-\Psi).\left(\frac{du}{d\varpi}\right)^2 \\ &\qquad = \alpha\beta\gamma(\Psi-\Pi)(\Pi-\Phi)(\Phi-\Psi); \end{aligned} \right.$$

puis, introduisant de nouveau les trois quantités l, m, n, déjà considérées dans notre Chapitre II, et que nous utiliserons encore dans le Chapitre VI ci-après, savoir celles définies par les égalités

$$(78)\qquad l^2 = a^2 - b^2, \qquad m^2 = b^2 - c^2, \qquad n^2 = c^2 - a^2,$$

qui permettront d'écrire les valeurs (67) des constantes g, g', g'', k, k', k'', sous la forme plus simple

$$(79)\qquad \left\{ \begin{aligned} &g = \frac{1}{lm}\sqrt{\frac{s}{\alpha}}, \qquad g' = \frac{1}{mn}\sqrt{\frac{s}{\beta}}, \qquad g'' = \frac{1}{nl}\sqrt{\frac{s}{\gamma}}, \\ &k = \sqrt{\frac{l^2}{-n^2}}, \qquad k' = \sqrt{\frac{m^2}{-l^2}}, \qquad k'' = \sqrt{\frac{n^2}{-m^2}}, \end{aligned} \right.$$

(*) En la traduisant à l'aide de la clef définie par notre note de la page 302 ci-dessus, cette équation reproduit le type (39) du § LXV des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes* (page 115), qui représente lui-même le type (29) du § L précédent de Lamé.

et, par suite, les trois dérivées de u ainsi qu'il suit

$$(80)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{d\varphi} = \dfrac{du}{d\varphi_1}\dfrac{d\varphi_1}{d\varphi} = \dfrac{du}{d\varphi_1} g = \dfrac{1}{lm}\sqrt{\dfrac{s}{\alpha}}\dfrac{du}{d\varphi_1}, \\ \dfrac{du}{d\psi} = \dfrac{1}{mn}\sqrt{\dfrac{s}{6}}\dfrac{du}{d\psi_1}, \qquad \dfrac{du}{d\varpi} = \dfrac{1}{nl}\sqrt{\dfrac{s}{\gamma}}\dfrac{du}{d\varpi_1}, \end{cases}$$

l'on voit qu'en substituant ces dernières valeurs, multipliant par le produit $l^2m^2n^2$, puis développant le second membre, l'équation ci-dessus (77) prendra alors la forme

$$s\left[(\Psi - \Pi).n^2\left(\frac{du}{d\varphi_1}\right)^2 + (\Pi - \Phi).l^2\left(\frac{du}{d\psi_1}\right)^2 + (\Phi - \Psi).m^2\left(\frac{du}{d\varpi_1}\right)^2\right]$$
$$= - l^2m^2n^2.\alpha6\gamma\left[(\Psi - \Pi)\Phi^2 + (\Pi - \Phi)\Psi^2 + (\Phi - \Psi)\Pi^2\right];$$

ou définitivement, en faisant passer tous les termes dans le premier membre, divisant par s, puis introduisant de nouveau la constante d^2 définie par la relation (74) du Chapitre précédent, et convenant enfin d'effacer à présent l'indice 1 qui spécifiait nos nouvelles variables:

$$(81)\quad \begin{cases} (\Psi - \Pi)\left[n^2\left(\dfrac{du}{d\varphi}\right)^2 + \dfrac{\Phi^2}{d^2}\right] + (\Pi - \Phi)\left[l^2\left(\dfrac{du}{d\psi}\right)^2 + \dfrac{\Psi^2}{d^2}\right] \\ \qquad + (\Phi - \Psi)\left[m^2\left(\dfrac{du}{d\varpi}\right)^2 + \dfrac{\Pi^2}{d^2}\right] = 0. \end{cases}$$

Semblablement, pour les trois équations de droite (20) du Chapitre III, leur type sera, si l'on désigne par u et v deux coordonnées rectilignes quelconques (supposées différentes),

$$P\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\varphi} + Q\frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\psi} + R\frac{du}{d\varpi}\frac{dv}{d\varpi} = 0,$$

et deviendra tout d'abord, en y remettant comme tout à l'heure les valeurs (65) de P, Q, R,

$$\alpha(\Psi - \Pi).\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\varphi} + \beta(\Pi - \Phi).\frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\psi} + \gamma(\Phi - \Psi).\frac{du}{d\varpi}\frac{dv}{d\varpi} = 0,$$

puis, en la transformant dans le nouveau système de variables par la substitution des dérivées (80), et multipliant de nouveau par le produit $l^2m^2n^2$,

$$s\left[(\Psi - \Pi).n^2\frac{du}{d\varphi_1}\frac{dv}{d\varphi_1} + (\Pi - \Phi).l^2\frac{du}{d\psi_1}\frac{dv}{d\psi_1} + (\Phi - \Psi).m^2\frac{du}{d\varpi_1}\frac{dv}{d\varpi_1}\right] = 0,$$

ou simplement, en supprimant le facteur constant s, et effaçant encore les accents,

$$(82)\qquad (\Psi - \Pi)n^2\frac{du}{d\varphi}\frac{dv}{d\varphi} + (\Pi - \Phi)l^2\frac{du}{d\psi}\frac{dv}{d\psi} + (\Phi - \Psi)m^2\frac{du}{d\varpi}\frac{dv}{d\varpi} = 0.$$

Le système des six équations du premier ordre (20) du Chapitre III, que nous avons à intégrer, est ainsi représenté maintenant par les deux types (81) et (82), dans lesquels Φ, Ψ, Π figurent actuellement, par suite du changement admis de variables, au lieu des expressions (66), les expressions plus simples

$$(83)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi = -a^2\mathrm{cn}^2\varphi - b^2\mathrm{sn}^2\varphi, & \Psi = -b^2\mathrm{cn}^2\psi - c^2\mathrm{sn}^2\psi, \\ & \Pi = -c^2\mathrm{cn}^2\varpi - a^2\mathrm{sn}^2\varpi, \end{array} \right.$$

et ne contiendra plus dès lors, par suite de ces dernières valeurs de Φ, Ψ, Π, les constantes primitives α, β, γ, mais seulement les constantes a^2, b^2, c^2, d^2, par l'intermédiaire des constantes l^2, m^2, n^2, et k, k', k'', définies en fonction de celles-ci par les égalités (78) et (79). Si donc l'on convient de prendre désormais pour con-

stantes arbitraires indépendantes g, g', g'', à la place de α, β, γ, celles-ci étant, dans ce cas, supposées déterminées en fonction de celles-là par les mêmes relations (79), on voit qu'alors, d'une part, le système que nous avons à intégrer (81) et (82) ne renfermera plus comme constantes explicites que les quatre constantes a^2, b^2, c^2, d^2, et, d'autre part, que nos nouvelles variables φ, ψ, ϖ, qui figurent dans les expressions (83), contenant implicitement, chacune par définition, deux constantes complètement arbitraires, savoir g et h, g' et h', g'' et h'', seront précisément désormais les paramètres thermométriques des trois familles coordonnées, entendus dans le sens général que nous avons donné à cette expression pour une famille quelconque de surfaces isothermes.

Indication générale de la méthode d'intégration et degré de limitation de la solution. — Ces préliminaires indispensables pour la position claire et nette de la question étant désormais entendus, voyons d'abord, avant tout calcul, à quelles conclusions elle devra nous conduire, au point de vue de la délimitation exacte de la solution cherchée.

A cet effet, examinant tout d'abord quel sera le nombre des équations aux dérivées partielles du second ordre, auxquelles devra satisfaire isolément chaque coordonnée rectiligne, équations qui constitueront, avons-nous dit, le point de départ de notre recherche, nous reconnaîtrons de suite que ce nombre est de six. Car, si nous avons en vue la coordonnée x, par exemple, les six équations proposées (81) et (82) étant différentiées à la fois en φ, ψ, ϖ, fourniront, en les comptant elles-mêmes, un total de $6 \times 4 = 24$ équations, entre lesquelles il suffira d'éliminer toutes les dérivées des deux inconnues y et z, soit neuf dérivées pour chacune, dix-huit pour les deux, les fonctions inconnues n'entrant pas elles-mêmes dans lesdites équations.

Cela fait, convenant de poser pour ce second problème,

$$(84) \qquad \frac{du}{d\varphi} = \mathrm{L}, \qquad \frac{du}{d\psi} = \mathrm{M}, \qquad \frac{du}{d\varpi} = \mathrm{N},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(85)\qquad du = \mathrm{L}d\varphi + \mathrm{M}d\psi + \mathrm{N}d\varpi,$$

et de dénoter, par un, deux, ou trois accents, les valeurs de L, M, N, ou de toutes autres quantités, spéciales à chacune des coordonnées x, y, z, supposons que nous introduisions dans ces six équations du second ordre, qui ne contiendront, évidemment, pas plus que les équations proposées d'où elles proviennent, la fonction u elle-même, à la place des trois dérivées premières, les trois quantités L, M, N, et à la place des six dérivées secondes, les quantités

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d^2u}{d\varphi^2}=\dfrac{d\mathrm{L}}{d\varphi}, & \dfrac{d^2u}{d\psi^2}=\dfrac{d\mathrm{M}}{d\psi}, & \dfrac{d^2u}{d\varpi^2}=\dfrac{d\mathrm{N}}{d\varpi}, \\ \dfrac{d^2u}{d\psi d\varpi}=\dfrac{d\mathrm{N}}{d\psi}=\dfrac{d\mathrm{M}}{d\varpi}, & \dfrac{d^2u}{d\varpi d\varphi}=\dfrac{d\mathrm{L}}{d\varpi}=\dfrac{d\mathrm{N}}{d\varphi}, & \dfrac{d^2u}{d\varphi d\psi}=\dfrac{d\mathrm{M}}{d\varphi}=\dfrac{d\mathrm{L}}{d\psi}. \end{array}\right.$$

Si, pour faire cette opération, nous avons la précaution de résoudre auparavant le système de ces six équations, par rapport aux six dérivées du second ordre de u, il est clair qu'alors les trois premières équations, c'est-à-dire celles qui fourniront les valeurs des trois dérivées quadratiques $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$, $\frac{d^2u}{d\psi^2}$, $\frac{d^2u}{d\varpi^2}$, ne donneront, après cette transformation, qu'une seule équation chacune, tandis que les trois autres équations, qui fourniront les valeurs des trois dérivées rectangles, seront susceptibles chacune de deux expressions différentes : d'où il suit évidemment que nous aurons obtenu par ce procédé neuf équations simultanées distinctes, fournissant pour les neuf dérivées premières des trois quantités L, M, N, les valeurs

$$(86)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\mathrm{L}}{d\varphi}=\mathrm{L}_1, & \dfrac{d\mathrm{L}}{d\psi}=\mathrm{L}_2, & \dfrac{d\mathrm{L}}{d\varpi}=\mathrm{L}_3, \\ \dfrac{d\mathrm{M}}{d\varphi}=\mathrm{M}_1, & \dfrac{d\mathrm{M}}{d\psi}=\mathrm{M}_2, & \dfrac{d\mathrm{M}}{d\varpi}=\mathrm{M}_3, \\ \dfrac{d\mathrm{N}}{d\varphi}=\mathrm{N}_1, & \dfrac{d\mathrm{N}}{d\psi}=\mathrm{N}_2, & \dfrac{d\mathrm{N}}{d\varpi}=\mathrm{N}_3, \end{array}\right.$$

avec les conditions

$$(86^{bis}) \qquad N_2 = M_3, \qquad L_3 = N_1, \qquad M_1 = L_2,$$

$L_1, L_2 \ldots, M_1 \ldots, N_3$, étant des fonctions déterminées de L, M, N, des variables indépendantes φ, ψ, ϖ, et des constantes a^2, b^2, c^2, d^2, existant à l'avance dans les équations proposées (81) et (82). Or, ce résultat équivaut manifestement à dire que ces mêmes inconnues L, M, N seront déterminées par la condition de vérifier le système des trois équations simultanées aux différentielles totales

$$(87) \qquad \begin{cases} dL = L_1 d\varphi + L_2 d\psi + L_3 d\varpi, \\ dM = M_1 d\varphi + M_2 d\psi + M_3 d\varpi, \\ dN = N_1 d\varphi + N_2 d\psi + N_3 d\varpi, \end{cases}$$

problème entièrement équivalent, comme l'on sait, à trouver une solution commune aux trois équations linéaires aux dérivées partielles simultanées (*)

$$(88) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{d\varphi} + L_1 \dfrac{d\omega}{dL} + M_1 \dfrac{d\omega}{dM} + N_1 \dfrac{d\omega}{dN} = 0, \\ \dfrac{d\omega}{d\psi} + L_2 \dfrac{d\omega}{dL} + M_2 \dfrac{d\omega}{dM} + N_2 \dfrac{d\omega}{dN} = 0, \\ \dfrac{d\omega}{d\varpi} + L_3 \dfrac{d\omega}{dL} + M_3 \dfrac{d\omega}{dM} + N_3 \dfrac{d\omega}{dN} = 0, \end{cases}$$

et résolu théoriquement dès lors (en le supposant possible dans le cas actuel) par les belles méthodes de Jacobi, Bour, et Mayer (**), relatives à cette seconde forme de la même question (***).

(*) Voir à ce sujet, si l'on veut, les Chapitres VI (pp. 206-220), et III (pp. 173-179) du Livre II de l'excellente et précieuse monographie publiée par M. P. MANSION sous ce titre : *Théorie des Équations aux Dérivées Partielles du Premier Ordre*, ou encore JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, tome III, §§ 59-70 (pp. 67-79), et §§ 260-265 (pp. 335-339).

(**) JACOBI, *Vorlesungen*, 33e leçon, pp. 257-263; BOUR, *Journal de l'École Polytechnique*, tome XXXIX; MAYER, *Mathematische Annalen*, tome V, pp. 448-470.

(***) Il est évident, à première vue, que le succès d'une pareille méthode est fondé tout entier sur la surabondance du système. Il est donc intéressant de se demander quelle

Pour qu'il existe des systèmes orthogonaux triplement isothermes en dehors de ceux déjà rencontrés dans le Chapitre III (ce qui n'est nullement évident ni démontré *a priori*), deux conditions successives seront donc nécessaires et suffisantes, savoir :

1° Que les systèmes précédents (88) ou (87) soient ce que l'on appelle *complets* ou *complètement intégrables* (*). En supposant cette première condition remplie, il arrivera dans ce cas :

a) qu'on pourra obtenir, pour les inconnues L, M, N, trois expressions déterminées renfermant trois constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, en sus de celles existant déjà dans les équations proposées (81) et (82), et que l'on peut représenter dès lors par

$$(89)\qquad L = f_1(\varphi,\psi,\varpi,C_1,C_2,C_3),\qquad M = f_2(\varphi,\psi,\varpi,C_1,C_2,C_3),\qquad N = f_3(\varphi,\psi,\varpi,C_1,C_2,C_3);$$

---

devra être pour le moins la mesure de cette surabondance, pour qu'elle soit applicable et puisse fournir la solution du problème analogue le plus général.

Soit donc donné, entre m fonctions inconnues et n variables indépendantes, un système de N équations aux dérivées partielles du premier ordre, contenant de même, avec les variables, seulement les dérivées des inconnues, à l'exclusion de ces inconnues elles-mêmes. Il est bien clair, comme dans le cas particulier que nous venons de traiter, qu'il suffira encore de posséder l'expression de toutes les dérivées secondes sans exception, en fonction des diverses quantités qui figurent dans le système donné, pour être en mesure de former, ainsi que nous l'avons fait, un système de m équations différentielles totales simultanées entre les dérivées premières de ces m inconnues, considérées comme inconnues auxiliaires. Il suffira donc de compter, d'une part, le nombre des équations fournies par une première différentiation du système donné, et, d'autre part, le nombre des dérivées secondes introduites de cette façon. Le premier est manifestement Nn; quant au second, pour chaque inconnue en particulier, on voit, en supputant encore séparément les dérivées quadratiques et rectangles, qu'il sera $n + \frac{n(n-1)}{2}$. Par conséquent, pour qu'il soit possible d'obtenir, ainsi que nous venons de le dire, l'expression des dérivées secondes des m inconnues sans exception, il faudra que l'on ait

$$Nn \geqq m\left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right),\qquad \text{ou}\qquad N \geqq m\left(1 + \frac{n-1}{2}\right),$$

condition qui, étant récrite sous cette autre forme

$$\frac{N-m}{m} \geqq \frac{n-1}{2},$$

indique ainsi, par une formule simple et lucide, la limite inférieure de la surabondance que devra réaliser le système donné, pour que le problème puisse être ramené de la sorte, d'abord à l'intégration d'un système d'équations différentielles totales, et, en supposant ce système complètement intégrable, ensuite à de simples quadratures.

(*) Eu égard à la forme particulière sous laquelle elles se présentent dans la question actuelle, ces équations (88) formeront alors ce que l'on appelle un *système de Jacobi*, (voir MANSION, *loc. cit.*, p. 180, au bas, ou encore JORDAN, *ibid.*, t. III, § 64 (p. 73), et § 261 (pp. 335 336).

b) qu'avec ces mêmes valeurs des quantités L, M, N, la différentielle (85) sera une différentielle exacte, puisque lesdites valeurs de L, M, N satisferont alors par hypothèse aux équations (86) et (86[bis]), qui sont complètement équivalentes au système en question (87). Par conséquent, en y remettant ces valeurs, cette différentielle fournira, par simple quadrature, l'expression de la coordonnée rectiligne u, à l'aide des mêmes constantes, et, en sus, d'une nouvelle, simplement additive, u_0.

2° Il faudra en outre qu'après avoir formé, à l'aide des expressions précédentes (89), les valeurs des neuf dérivées de x, y, z, savoir

$$(90)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dx}{d\varphi} = f_1(\varphi, \psi, \varpi, C'_1, C'_2, C'_3), & \dfrac{dx}{d\psi} = f_2(\varphi, \psi, \varpi, C'_1, C'_2, C'_3), & \dfrac{dx}{d\varpi} = f_3(\varphi, \psi, \varpi, C'_1, C'_2, C'_3), \\ \dfrac{dy}{d\varphi} = f_1(\varphi, \psi, \varpi, C''_1, C''_2, C''_3), & \dfrac{dy}{d\psi} = f_2(\varphi, \psi, \varpi, C''_1, C''_2, C''_3), & \dfrac{dy}{d\varpi} = f_3(\varphi, \psi, \varpi, C''_1, C''_2, C''_3), \\ \dfrac{dz}{d\varphi} = f_1(\varphi, \psi, \varpi, C'''_1, C'''_2, C'''_3), & \dfrac{dz}{d\psi} = f_2(\varphi, \psi, \varpi, C'''_1, C'''_2, C'''_3), & \dfrac{dz}{d\varpi} = f_3(\varphi, \psi, \varpi, C'''_1, C'''_2, C'''_3), \end{array}\right.$$

l'élimination, entre les neuf égalités que nous venons d'écrire, des neuf constantes arbitraires C, introduites par l'intégration (à trois reprises différentes) du système (87) que nous avons substitué au système proposé primitivement (81) et (82), reproduise ce même système composé de six équations, condition qui serait évidemment impossible si ces neuf constantes C étaient indépendantes les unes des autres, et qui ne pourra être remplie que si elles se réduisent à *trois* distinctes seulement, ou, en d'autres termes, que si ces neuf constantes sont liées entre elles par *six* relations : ce qui revient encore à dire, que si l'on remet dans les six équations proposées (81) et (82) (représentant, comme nous l'avons dit, avec le nouveau système des variables φ, ψ, ϖ, le système en question (20) du Chapitre III), à la place des neuf dérivées de u, les valeurs précédentes (90), ces mêmes relations devront se transformer par là en autant de relations distinctes, dans lesquelles ne pourront entrer que les neuf constantes C précitées, et les constantes figurant antérieurement dans lesdites

équations (81) et (82), mais à l'exclusion des variables φ, ψ, ϖ elles-mêmes.

Nous ne sommes donc nullement assuré à l'avance que le problème actuel comporte une solution, mais ce que nous pouvons affirmer avec certitude, c'est ce fait capital, que rien jusqu'ici n'avait permis de prévoir, à savoir que, s'il en est ainsi en réalité, la solution la plus générale du problème en son entier ne comportera aucune fonction arbitraire, mais encore (comme le premier problème partiel qui a fait l'objet du Chapitre précédent) seulement *dix* constantes arbitraires, qui seront, d'abord les quatre constantes antérieures a^2, b^2, c^2, d^2, puis trois nouvelles constantes simplement additives x_0, y_0, z_0, et enfin trois dernières à prendre, comme on voudra, au nombre, ou en fonction, des neuf constantes C liées entre elles par six relations, de manière qu'il en subsiste seulement trois de réellement arbitraires, ainsi que cela a lieu, par exemple, pour les neuf cosinus relatifs à tout système d'axes rectangulaires.

Si l'on admettait comme connu le Système Ellipsoïdal ou des Coordonnées Elliptiques, cette conclusion si simple et si précise suffirait à elle seule, sans qu'il soit besoin d'intégrer effectivement le système d'équations aux différentielles totales (87), pour fournir immédiatement avec certitude la solution la plus générale du problème envisagé dans ce Chapitre. Mais, nous étant proposé précisément dans ce Mémoire de *découvrir* en quelque sorte (si l'on veut bien nous passer cette métaphore, qui fera comprendre mieux que tout autre mot notre pensée), par un procédé d'investigation uniforme et rationnel, ainsi que nous l'avons déjà fait en partie dans notre Chapitre III, tous les systèmes triplement isothermes qui existent, il nous est dès lors interdit de considérer comme acquise aucune notion antérieure à ce sujet (*),

(*) Dans cet ordre d'idées, on pourrait, si l'on voulait, arriver logiquement à cette notion, par l'intégration d'*une* seule équation différentielle *ordinaire du premier ordre*, en suivant la voie que nous indiquons dans la Note II de l'Appendice. Nous montrons, en effet, dans cette Note que l'on parvient très aisément de cette façon à constituer directement de toutes pièces un système orthogonal, composé de trois familles isothermes du second ordre, toutes trois du type (116) du Chapitre II que nous avons reconnu être le plus

et, par conséquent, nous devons forcément, pour traiter le problème, suivre de point en point, pour l'appliquer dans toute sa teneur, la méthode dont nous venons d'indiquer les grandes lignes, en abordant maintenant sans hésitation les différents problèmes d'Analyse sur lesquels elle repose.

Système des équations aux dérivées partielles du second ordre, auxquelles satisfont isolément, dans le cas le plus général du système orthogonal, chacune des trois coordonnées rectilignes. — La méthode que nous venons d'indiquer à grands traits dans le paragraphe précédent s'appliquerait exactement de la même façon, ainsi qu'on le reconnait immédiatement, en adoptant pour point de départ, au lieu des équations (81) et (82), c'est-à-dire des équations (20) du Chapitre III spéciales au cas du système triplement isotherme, les équations (5) du même Chapitre relatives au cas le plus général du système orthogonal. Comme d'ailleurs, dans cette nouvelle hypothèse, les calculs ne seront ni plus longs, ni plus difficiles, mais plutôt plus simples comme écriture que dans l'hypothèse précédente, c'est sur ces dernières équations (5) elles-mêmes (dont les suivantes (20) ne sont que les transformées avec les quantités P, Q, R substituées comme inconnues aux invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$), que nous allons effectuer à présent les calculs indiqués tout à l'heure, de sorte que le système d'équations différentielles totales (87) auquel nous parviendrons ainsi fournira la solution de la question, aussi bien pour

---

général pour cet ordre de surfaces, mais distinctes, c'est-à-dire de variétés différentes, système dont les coefficients dépendront alors de quatre constantes ou paramètres arbitraires, a^2, b^2, c^2, d^2, en écrivant $\frac{1}{d^2}$ à la place de h dans l'équation (116). Or si l'on effectue un simple changement de coordonnées rectilignes dans les équations de ce système, ainsi que nous l'avons déjà fait pour passer du type (116) ou (127) à la forme (128), sous cette nouvelle forme les mêmes équations contiendront bien alors les *dix* constantes arbitraires exigées pour la solution la plus générale, dont trois simplement additives, x_0, y_0, z_0, ainsi que nous l'avons déjà constaté dans le Chapitre II, à propos des coefficients (129) de l'équation (128). Et dès lors le système en question, présentant sous cette forme tous les caractères de généralité que nous venons de reconnaître en propre à la solution la plus générale du problème, constituera évidemment de nouveau, tout comme pour l'autre question envisagée dans le Chapitre II, la solution la plus générale elle-même.

le cas le plus général du système orthogonal, que pour le cas particulier du système triplement isotherme, spécialement envisagé jusqu'ici dans ce travail.

A cet effet, rappelant de nouveau les valeurs que nous avons données, dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes*, sous le numéro (18) (page 19), pour les neuf cosinus directeurs des trois normales aux surfaces coordonnées, et constatant dès lors, encore une fois, que ces équations (5) ne sont autre chose que les six relations connues entre ces neuf cosinus, relations susceptibles, comme on sait, de deux formes distinctes complètement équivalentes, au lieu de prendre ces équations sous la forme (5) elle-même, nous les considérerons sous l'autre forme équivalente

$$\left\{\begin{array}{ll}\Delta_1^2\varphi\left(\frac{x}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\varphi\left(\frac{y}{\varphi}\right)^2+\Delta_1^2\varphi\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2=1, & \Delta_1\psi\Delta_1\varpi\left(\frac{x}{\psi}\frac{x}{\varpi}+\frac{y}{\psi}\frac{y}{\varpi}+\frac{z}{\psi}\frac{z}{\varpi}\right)=0,\\ \Delta_1^2\psi\left(\frac{x}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{y}{\psi}\right)^2+\Delta_1^2\psi\left(\frac{z}{\psi}\right)^2=1, & \Delta_1\varpi\Delta_1\varphi\left(\frac{x}{\varpi}\frac{x}{\varphi}+\frac{y}{\varpi}\frac{y}{\varphi}+\frac{z}{\varpi}\frac{z}{\varphi}\right)=0,\\ \Delta_1^2\varpi\left(\frac{x}{\varpi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{y}{\varpi}\right)^2+\Delta_1^2\varpi\left(\frac{z}{\varpi}\right)^2=1, & \Delta_1\varphi\Delta_1\psi\left(\frac{x}{\varphi}\frac{x}{\psi}+\frac{y}{\varphi}\frac{y}{\psi}+\frac{z}{\varphi}\frac{z}{\psi}\right)=0;\end{array}\right.$$

ou, ce qui sera la même chose, en négligeant dans les équations de droite les facteurs placés devant la parenthèse qui ne peuvent être supposés nuls, et multipliant, pour la même raison, les trois équations de gauche respectivement par les trois quantités $H=\Delta_1^{-2}\varphi$, $K=\Delta_1^{-2}\psi$, $J=\Delta_1^{-2}\varpi$, déjà envisagées à la fin du Chapitre précédent, puis renversant enfin les deux membres de ces dernières équations,

$$(91)\quad\left\{\begin{array}{ll}H=\left(\frac{x}{\varphi}\right)^2+\left(\frac{y}{\varphi}\right)^2+\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2, & \frac{x}{\psi}\frac{x}{\varpi}+\frac{y}{\psi}\frac{y}{\varpi}+\frac{z}{\psi}\frac{z}{\varpi}=0,\\ K=\left(\frac{x}{\psi}\right)^2+\left(\frac{y}{\psi}\right)^2+\left(\frac{z}{\psi}\right)^2, & \frac{x}{\varpi}\frac{x}{\varphi}+\frac{y}{\varpi}\frac{y}{\varphi}+\frac{z}{\varpi}\frac{z}{\varphi}=0,\\ J=\left(\frac{x}{\varpi}\right)^2+\left(\frac{y}{\varpi}\right)^2+\left(\frac{z}{\varpi}\right)^2, & \frac{x}{\varphi}\frac{x}{\psi}+\frac{y}{\varphi}\frac{y}{\psi}+\frac{z}{\varphi}\frac{z}{\psi}=0;\end{array}\right.$$

équations qui ne sont autres que les six relations (18) du Mémoire déjà cité tout à l'heure (page 17), formules déjà rap-

pelées dans le Chapitre Ier de celui-ci (voir la note de la page 30).

Partant donc de là, et considérant d'abord le groupe de gauche de ces dernières équations, nous différentierons la seconde par rapport à ϖ, et la troisième par rapport à ψ, ce qui nous donnera

$$(92)\qquad \frac{1}{2}\frac{K}{\varpi}=\frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\psi\varpi}+\frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\psi\varpi}+\frac{z}{\psi}\frac{z^2}{\psi\varpi},\qquad \frac{1}{2}\frac{J}{\psi}=\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\varpi\psi}+\frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\varpi\psi}+\frac{z}{\varpi}\frac{z^2}{\varpi\psi};$$

puis de même nous trouverons, en différentiant les trois équations de droite, respectivement par rapport à φ, ψ, ϖ,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\varpi\varphi}+\frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\varpi\varphi}+\frac{z}{\psi}\frac{z^2}{\varpi\varphi}+\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\psi\varphi}+\frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\psi\varphi}+\frac{z}{\varpi}\frac{z^2}{\psi\varphi}=0,\\
&\frac{x}{\varpi}\frac{x^2}{\varphi\psi}+\frac{y}{\varpi}\frac{y^2}{\varphi\psi}+\frac{z}{\varpi}\frac{z^2}{\varphi\psi}+\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\varpi\psi}+\frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\varpi\psi}+\frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\varpi\psi}=0,\\
&\frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\psi\varpi}+\frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\psi\varpi}+\frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\psi\varpi}+\frac{x}{\psi}\frac{x^2}{\varphi\varpi}+\frac{y}{\psi}\frac{y^2}{\varphi\varpi}+\frac{z}{\psi}\frac{z^2}{\varphi\varpi}=0;
\end{aligned}\right.$$

et, ajoutant alors les deux dernières de celles que nous venons d'écrire, en retranchant en même temps la première, et divisant par 2, nous obtiendrons celle-ci :

$$(93)\qquad \frac{x}{\varphi}\frac{x^2}{\psi\varpi}+\frac{y}{\varphi}\frac{y^2}{\psi\varpi}+\frac{z}{\varphi}\frac{z^2}{\psi\varpi}=0.$$

Or, si nous récrivons ici, pour plus de clarté, les valeurs des cosinus directeurs que nous venons de rappeler un peu plus haut, en y introduisant de même, à la place des invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, les trois quantités équivalentes par définition $H^{-\frac{1}{2}}$, $K^{-\frac{1}{2}}$, $J^{-\frac{1}{2}}$, savoir

$$(94)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\lambda\;=H^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{\varphi}, && \mu\;=H^{-\frac{1}{2}}\frac{y}{\varphi}, && \nu\;=H^{-\frac{1}{2}}\frac{z}{\varphi}.\\
&\lambda'=K^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{\psi}, && \mu'=K^{-\frac{1}{2}}\frac{y}{\psi}, && \nu'=K^{-\frac{1}{2}}\frac{z}{\psi},\\
&\lambda''=J^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{\varpi}, && \mu''=J^{-\frac{1}{2}}\frac{y}{\varpi}, && \nu''=J^{-\frac{1}{2}}\frac{z}{\varpi},
\end{aligned}\right.$$

on voit que les trois équations que nous venons de former, (93) et (92), étant multipliées respectivement par $H^{-\frac{1}{2}}$, $K^{-\frac{1}{2}}$, $J^{-\frac{1}{2}}$, pourront alors être écrites sous la forme

$$(95)\quad \begin{cases} \lambda\,\dfrac{x^2}{\psi\varpi}+\mu\,\dfrac{y^2}{\psi\varpi}+\nu\,\dfrac{z^2}{\psi\varpi}=0, \\[2mm] \lambda'\,\dfrac{x^2}{\psi\varpi}+\mu'\,\dfrac{y^2}{\psi\varpi}+\nu'\,\dfrac{z^2}{\psi\varpi}=\dfrac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}\dfrac{K}{\varpi}, \\[2mm] \lambda''\,\dfrac{x^2}{\psi\varpi}+\mu''\,\dfrac{y^2}{\psi\varpi}+\nu''\,\dfrac{z^2}{\psi\varpi}=\dfrac{1}{2}J^{-\frac{1}{2}}\dfrac{J}{\psi}. \end{cases}$$

Cela posé, pour former une équation du second ordre, à laquelle devra satisfaire isolément la coordonnée x, par exemple, nous multiplierons ces trois dernières équations respectivement par $\lambda, \lambda', \lambda''$, et nous les ajouterons, en tenant compte des relations précitées entre les cosinus de tout système d'axes rectangulaires, ce qui nous donnera l'équation

$$\frac{x^2}{\psi\varpi}=\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}\frac{K}{\varpi}.\lambda'+\frac{1}{2}J^{-\frac{1}{2}}\frac{J}{\psi}.\lambda'',$$

ou, en tenant compte des valeurs ci-dessus (94) des neuf cosinus (*),

$$(96)\qquad \frac{x^2}{\psi\varpi}=\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}\frac{K}{\varpi}.K^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{\psi}+\frac{1}{2}J^{-\frac{1}{2}}\frac{J}{\psi}.J^{-\frac{1}{2}}\frac{x}{\varpi}=\frac{1}{2}\frac{lK}{\varpi}\frac{x}{\psi}+\frac{1}{2}\frac{lJ}{\psi}\frac{x}{\varpi}.$$

(*) Nous venons de refaire ici, pour établir cette équation (96), la démonstration qu'a certainement eu l'intention de présenter Serret dans son *Cours de Calcul différentiel et intégral* (t. I, § 333, 1re édition, pp. 502-503). Mais il faut convenir que l'éminent Professeur, d'ordinaire si précis et si complet, a été dans la circonstance victime d'une étrange inadvertance, et que sa démonstration, telle qu'il la produit, n'établit nullement le résultat qu'il énonce, si on ne la rectifie et la complète, ainsi que nous venons de le faire, en ayant égard aux valeurs des neuf cosinus des normales aux trois surfaces coordonnées, et tenant compte des relations connues entre ces neuf cosinus. En effet, ayant établi tout d'abord, comme nous l'avons fait d'après lui, les trois équations (93) et (92), il se contente ensuite simplement de multiplier ces équations *elles-mêmes*, respectivement, d'abord par $\frac{x}{\varphi}$, $\frac{x}{\psi}$, $\frac{x}{\varpi}$, puis par $\frac{y}{\varphi}$, $\frac{y}{\psi}$, $\frac{y}{\varpi}$, puis enfin par $\frac{z}{\psi}$, $\frac{z}{\varphi}$, $\frac{z}{\varpi}$, et de les ajouter; et il énonce alors comme un fait que le résultat de ces trois opérations successives est à chaque fois une équation du type (96), tandis que ce résultat est en réalité tout autre, et ne semble réduc-

Ce seul résultat acquis, il nous suffira, pour obtenir immédiatement le premier système demandé, de remarquer encore une fois, comme nous l'avons déjà fait dans nos deux précédents Mémoires où il était question du système triple orthogonal (*), que l'identité du rôle joué dans cette théorie par les trois axes coordonnés entre eux, d'une part, et par les trois surfaces coordonnées entre elles, d'autre part, imposent aux formules générales de cette théorie, prises dans leur ensemble, une double symétrie nécessaire, et que, dès lors, ces formules sont *a priori* susceptibles d'un double mode de permutation circulaire, correspondant à chacun de ces deux points de vue différents. En effet, pour ce qui est en particulier des formules (91) et (94), aussi bien que pour les relations entre les neuf cosinus, qui sont les seules dont nous ayons fait usage dans la question actuelle pour arriver à l'équation précédente (96), on voit de suite que si l'on permute d'abord les trois surfaces coordonnées, ce qui équivaut à permuter à la fois dans ces formules les cinq groupes (φ, ψ, ϖ), (H, K, J), $(\lambda, \lambda', \lambda'')$, (μ, μ', μ''), (ν, ν', ν'') sans toucher au groupe (x, y, z), les trois équations de chaque colonne s'échangeront alors les unes dans les autres, et que si l'on permute ensuite de même les trois axes coordonnés, ce qui correspond, au contraire, à permuter les quatre groupes (x, y, z), (λ, μ, ν), (λ', μ', ν'), $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ sans toucher aux deux groupes (φ, ψ, ϖ) et (H, K, J), les trois termes semblables, dans chaque ligne séparément, s'échangeront les uns dans les autres, ce qui met en évi-

---

tible par aucune transformation avec ce même type qu'il s'agit précisément d'établir. C'est, en effet, seulement sur les mêmes équations *transformées* (95), et non sur les équations (93) et (92), qu'une série d'opérations analogue à celle indiquée par Serret peut conduire à un résultat analytique, non pas *identique*, mais simplement *équivalent*, en tenant compte des relations entre les neuf cosinus, aux trois équations de la forme (96), auxquelles il se proposait d'arriver.

(*) Nous nous sommes déjà servi de cette remarque, une première fois dans notre *Mémoire sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (pp. 79-80), pour établir les formules générales et théorèmes de Lamé, relatifs aux courbures principales de tout système orthogonal, et une seconde fois dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordon. Curvil.* (pp. 8-9), pour obtenir l'une des trois formes (dues à Guiraudet, et rapportées par Lamé des équations du mouvement d'un point en coordonnées curvilignes, dont nous avons ensuite déduit successivement les deux autres.

dence pour ces formules la double symétrie essentielle que nous venons de rappeler.

Effectuant donc, sur la formule unique (96) obtenue tout à l'heure, successivement les deux modes de permutation en question, en commençant par le second, celui-ci nous donnera d'abord simplement les trois équations représentées par le type unique

$$\frac{u^2}{\psi\varpi} = \frac{1}{2}\frac{lK}{\varpi}\frac{u}{\psi} + \frac{1}{2}\frac{lJ}{\psi}\frac{u}{\varpi},$$

u étant l'une quelconque des trois coordonnées rectilignes; puis de là, le premier mode de permutation nous fournira, pour la même coordonnée, les trois équations suivantes qui constituent le système indiqué seul par Lamé : (*)

$$(97)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{u^2}{\psi\varpi} &= \frac{1}{2}\frac{lK}{\varpi}\frac{u}{\psi} + \frac{1}{2}\frac{lJ}{\psi}\frac{u}{\varpi},\\ \frac{u^2}{\varpi\varphi} &= \frac{1}{2}\frac{lJ}{\varphi}\frac{u}{\varpi} + \frac{1}{2}\frac{lH}{\varpi}\frac{u}{\varphi},\\ \frac{u^2}{\varphi\psi} &= \frac{1}{2}\frac{lH}{\psi}\frac{u}{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{lK}{\varphi}\frac{u}{\psi}.\end{aligned}\right.$$

Ce premier groupe étant établi, il nous sera facile à présent d'obtenir également le second, car dans le système du premier ordre proposé (5) du Chapitre III, les trois équations de gauche ne renfermant chacune qu'une coordonnée rectiligne, et pouvant dès lors être représentées synthétiquement, comme plus haut en partant de la forme (20), par le type

$$(98)\qquad \Delta_1^2\varphi\left(\frac{u}{\varphi}\right)^2 + \Delta_1^2\psi\left(\frac{u}{\psi}\right)^2 + \Delta_1^2\varpi\left(\frac{u}{\varpi}\right)^2 = 1,$$

(*) Ce sont les équations (28) du § L des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes* (p. 89), en y tenant compte des définitions $H = \Delta_1^{-2}\varphi$, $K = \Delta_1^{-2}\psi$, $J = \Delta_1^{-2}\varpi$, et de la *clef*, donnée une fois pour toutes, pour ces traductions dans la note de la page 302 ci-dessus (Chap. IV).

il suffira, évidemment, de différentier cette dernière équation successivement par rapport aux trois variables φ, ψ, ϖ pour obtenir par là trois nouvelles équations du second ordre, ne contenant comme elle que la seule et même coordonnée u, et qui seront certainement distinctes des équations précédentes (97), du moment que celles-là n'ont été obtenues qu'en faisant intervenir dans le calcul à la fois les *six* relations entre les neuf cosinus $\lambda, \mu, \nu\ \lambda', \dots \nu''$, c'est-à-dire, en d'autres termes, à la fois les six équations (5) du Chapitre III, tandis que celles-ci proviendront uniquement, d'après ce que nous venons de dire, des trois seules figurées par le type précédent (98), c'est-à-dire des seules équations de gauche de ce même système proposé (5).

Récrivant donc, à cet effet, l'équation précédente (98), en y introduisant, pour la plus grande commodité des écritures, à la place des invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ eux-mêmes, les trois quantités H, K, J, ce qui la transformera dans la suivante

$$\mathrm{H}^{-1}\left(\frac{u}{\varphi}\right)^2 + \mathrm{K}^{-1}\left(\frac{u}{\psi}\right)^2 + \mathrm{J}^{-1}\left(\frac{u}{\varpi}\right)^2 = 1,$$

et la différentiant en φ, par exemple, nous obtiendrons par là cette nouvelle équation

$$\mathrm{H}^{-1}.2\frac{u}{\varphi}\frac{u^2}{\varphi^2} - \mathrm{H}^{-2}\frac{\mathrm{H}}{\varphi}\cdot\left(\frac{u}{\varphi}\right)^2 + \mathrm{K}^{-1}.2\frac{u}{\psi}\frac{u^2}{\psi\varphi} - \mathrm{K}^{-2}\frac{\mathrm{K}}{\varphi}\cdot\left(\frac{u}{\psi}\right)^2$$
$$+ \mathrm{J}^{-1}.2\frac{u}{\varpi}\frac{u^2}{\varpi\varphi} - \mathrm{J}^{-2}\frac{\mathrm{J}}{\varphi}\cdot\left(\frac{u}{\varpi}\right)^2 = 0,$$

qui pourra s'écrire également

$$\mathrm{H}^{-1}\frac{u}{\varphi}\left(2\frac{u^2}{\varphi^2} - \frac{l\mathrm{H}}{\varphi}\frac{u}{\varphi}\right) + \mathrm{K}^{-1}\frac{u}{\psi}\left(2\frac{u^2}{\psi\varphi} - \frac{l\mathrm{K}}{\varphi}\frac{u}{\psi}\right) + \mathrm{J}^{-1}\frac{u}{\varpi}\left(2\frac{u^2}{\varpi\varphi} - \frac{l\mathrm{J}}{\varphi}\frac{u}{\varpi}\right) = 0,$$

et deviendra dès lors, en y substituant, pour les trois dérivées rectangles de u, les expressions fournies par les équations précédemment acquises (97),

$$H^{-1}\frac{u}{\varphi}\left(2\frac{u^2}{\varphi^2}-\frac{lH}{\varphi}\frac{u}{\varphi}\right)+K^{-1}\frac{u}{\psi}\left(\frac{lH}{\psi}\frac{u}{\varphi}+\frac{lK}{\varphi}\frac{u}{\psi}-\frac{lK}{\varphi}\frac{u}{\psi}\right)$$
$$+J^{-1}\frac{u}{\varpi}\left(\frac{lJ}{\varphi}\frac{u}{\varpi}+\frac{lH}{\varpi}\frac{u}{\varphi}-\frac{lJ}{\varphi}\frac{u}{\varpi}\right)=0,$$

ou, en réduisant,

$$\frac{u}{\varphi}\left(H^{-1}.2\frac{u^2}{\varphi^2}-H^{-1}\frac{lH}{\varphi}.\frac{u}{\varphi}+K^{-1}\frac{lH}{\psi}.\frac{u}{\psi}+J^{-1}\frac{lH}{\varpi}.\frac{u}{\varpi}\right)=0,$$

et, par conséquent, en multipliant par H et divisant par $2\frac{u}{\varphi}$, nous obtiendrons définitivement la première des trois autres équations linéaires, analogues aux précédentes, mais que n'indiquent cependant ni Lamé, ni Betti : (*)

$$(99)\quad\begin{cases}\dfrac{u^2}{\varphi^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lH}{\varphi}.\dfrac{u}{\varphi}-\dfrac{H}{K}\dfrac{lH}{\psi}.\dfrac{u}{\psi}-\dfrac{H}{J}\dfrac{lH}{\varpi}.\dfrac{u}{\varpi}\right),\\[2ex]\dfrac{u^2}{\psi^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lK}{\psi}.\dfrac{u}{\psi}-\dfrac{K}{J}\dfrac{lK}{\varpi}.\dfrac{u}{\varpi}-\dfrac{K}{H}\dfrac{lK}{\varphi}.\dfrac{u}{\varphi}\right),\\[2ex]\dfrac{u^2}{\varpi^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lJ}{\varpi}.\dfrac{u}{\varpi}-\dfrac{J}{H}\dfrac{lJ}{\varphi}.\dfrac{u}{\varphi}-\dfrac{J}{K}\dfrac{lJ}{\psi}.\dfrac{u}{\psi}\right).\end{cases}$$

Le groupe ci-dessus (97) de Lamé et celui que nous venons d'obtenir représentent donc ensemble, pour le cas le plus général du système orthogonal, les six équations du second ordre auxquelles chacune des coordonnées rectilignes est astreinte à satisfaire, ainsi que nous l'avons vu plus haut.

Si l'on demandait les équations analogues propres spécialement au cas du système triplement isotherme, c'est-à-dire celles que nous envisagions expressément à la fin du paragraphe précédent, il n'y aurait évidemment, pour les obtenir, qu'à remplacer dans ces six équations les trois quantités H, K, J par leurs

(*) La dissymétrie des termes des seconds membres de ces équations n'a rien, dans le cas actuel, qui doive inquiéter ni surprendre, puisque dans chacune d'elles la variable indépendante correspondante au premier terme joue, relativement aux deux autres, un rôle manifestement exceptionnel.

valeurs (10) du Chapitre III, savoir $H = QR$, $K = RP$, $J = PQ$, puisque si l'on introduit d'abord, dans les équations (5) du Chapitre III, ces quantités H, K, J comme inconnues à la place des invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, c'est précisément en faisant ensuite la substitution que nous venons de dire, que ces équations (5) se transformeront alors dans les équations (20) du même Chapitre, que nous avions admises comme point de départ pour le calcul des équations en question.

Équations simultanées aux différentielles totales, pour le cas le plus général du système orthogonal, entre les trois dérivées premières d'une même coordonnée rectiligne. — Introduisons maintenant dans les six équations du second ordre (97) et (99), que nous venons d'obtenir comme résultat de la recherche précédente, les trois quantités L, M, N à la place des dérivées premières de u, savoir : $\frac{u}{\varphi}$, $\frac{u}{\psi}$, $\frac{u}{\varpi}$. Elles donneront naissances alors, ainsi que nous l'avons annoncé, aux neuf égalités :

$$(100)\quad \begin{cases} \dfrac{L}{\varphi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lH}{\varphi}\cdot L - \dfrac{H}{K}\dfrac{lH}{\psi}\cdot M - \dfrac{H}{J}\dfrac{lH}{\varpi}\cdot N\right), \\ \dfrac{M}{\psi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lK}{\psi}\cdot M - \dfrac{K}{J}\dfrac{lK}{\varpi}\cdot N - \dfrac{K}{H}\dfrac{lK}{\varphi}\cdot L\right), \\ \dfrac{N}{\varpi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lJ}{\varpi}\cdot N - \dfrac{J}{H}\dfrac{lJ}{\varphi}\cdot L - \dfrac{J}{K}\dfrac{lJ}{\psi}\cdot M\right), \end{cases}$$

$$(101)\quad \begin{cases} \dfrac{N}{\psi} = \dfrac{M}{\varpi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lK}{\varpi}\cdot M + \dfrac{lJ}{\psi}\cdot N\right), \\ \dfrac{L}{\varpi} = \dfrac{N}{\varphi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lJ}{\varphi}\cdot N + \dfrac{lH}{\varpi}\cdot L\right), \\ \dfrac{M}{\varphi} = \dfrac{L}{\psi} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lH}{\psi}\cdot L + \dfrac{lK}{\varphi}\cdot M\right). \end{cases}$$

De ce résultat il suit immédiatement, comme nous l'avons déjà expliqué, que ces trois inconnues L, M, N devront alors vérifier le système des trois équations aux différentielles totales :

$$
(102)\left\{
\begin{aligned}
dL &= \frac{1}{2}\left(\frac{lH}{\varphi}L - \frac{H}{K}\frac{lH}{\psi}M - \frac{H}{J}\frac{lH}{\varpi}N\right)d\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{lH}{\psi}L + \frac{lK}{\varphi}M\right)d\psi \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{lH}{\varpi}L + \frac{lJ}{\varphi}N\right)d\varpi, \\
dM &= \frac{1}{2}\left(\frac{lH}{\psi}L + \frac{lK}{\varphi}M\right)d\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{lK}{\psi}M - \frac{K}{J}\frac{lK}{\varpi}N - \frac{K}{H}\frac{lK}{\varphi}L\right)d\psi \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{lK}{\varpi}M + \frac{lJ}{\psi}N\right)d\varpi, \\
dN &= \frac{1}{2}\left(\frac{lH}{\varpi}L + \frac{lJ}{\varphi}N\right)d\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{lK}{\varpi}M + \frac{lJ}{\psi}N\right)d\psi \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{lJ}{\varpi}N - \frac{J}{H}\frac{lJ}{\varphi}L - \frac{J}{K}\frac{lJ}{\psi}M\right)d\varpi,
\end{aligned}
\right.
$$

dans lesquelles H, K, J représentent par hypothèse les expressions complètement déterminées en φ, ψ, ϖ, qui résulteraient de l'intégration des systèmes (3) et (4) du Chapitre III, supposées exprimées à l'aide de ces inconnues au lieu des invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$.

En supposant donc que ce dernier système (102) soit complètement intégrable, et que l'on en ait formé l'intégrale générale, laquelle consistera, s'il en est ainsi, dans trois expressions déterminées de la forme ci-dessus (89), dont on déduira ensuite immédiatement, par un simple jeu d'accentuation, pour les neuf dérivées L, M, N, des valeurs telles que celles figurées par le tableau (90) et correspondantes aux trois coordonnées x, y, z, il faudra, pour qu'il existe une solution, qu'en substituant alors ces valeurs dans le système proposé (5) du Chapitre III, les six équations obtenues de cette façon, savoir

$$
(103)\left\{
\begin{aligned}
&H^{-1}.L'^2 + K^{-1}.M'^2 + J^{-1}.N'^2 = 1, \quad H^{-1}.L''L''' + K^{-1}.M''M''' + J^{-1}.N''N''' = 0, \\
&H^{-1}.L''^2 + K^{-1}.M''^2 + J^{-1}.N''^2 = 1, \quad H^{-1}.L'''L' + K^{-1}.M'''M' + J^{-1}.N'''N' = 0, \\
&H^{-1}.L'''^2 + K^{-1}.M'''^2 + J^{-1}.N'''^2 = 1, \quad H^{-1}.L'L'' + K^{-1}.M'M'' + J^{-1}.N'N'' = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

puissent être satisfaites identiquement par le moyen des fonctions arbitraires qui entreront dans les expressions précitées de

H, K, J, auquel cas elles serviront dès lors à déterminer plus ou moins complètement lesdites fonctions arbitraires.

Or, d'une part, la forme même de ce système (102) ou, plus clairement encore, les six équations (101), montrant immédiatement qu'en le supposant intégrable la différentielle (85) le sera elle-même par simple quadrature, et, d'autre part, le problème d'Analyse, auquel seul se trouvera par conséquent ainsi ramenée la recherche du système orthogonal en général, étant de ceux que l'on sait résoudre et pour lesquels il existe plusieurs méthodes que nous avons rappelées, toute la difficulté dans la question est donc réduite désormais à la seule détermination en φ, ψ, ϖ des trois quantités H, K, J, ou, ce qui revient au même, des trois invariants $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, laquelle dépend, ainsi que nous l'avons vu au début du Chapitre III, d'un système de six équations aux dérivées partielles du second ordre entre ces trois inconnues (*).

(*) Ces trois inconnues $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ étant déterminées par les six équations du second ordre (3) et (4) de ce Chapitre III, si l'on se propose de ramener l'intégration de ces équations à la détermination d'une seule de ces inconnues, il faudra les différentier toutes simultanément un nombre m de fois, assez grand pour que le nombre total N des équations dont on aura par là la disposition surpasse d'une unité au moins le nombre total n des dérivées des deux autres inconnues, et de ces inconnues elles-mêmes. En agissant ainsi, comme cette opération introduira pour chaque inconnue toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $m+2$ inclus, on aura évidemment à la fois

$$N = 6\,\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}, \qquad n = 2\,\frac{(m+3)(m+4)(m+5)}{1.2.3},$$

et m sera dès lors le plus petit nombre entier positif pour lequel on aura $N > n$, ou, $N - n > 0$, c'est-à-dire, eu égard aux valeurs que nous venons d'écrire,

$$2(m+3)\left[3(m+1)(m+2) - (m+4)(m+5)\right] > 0,$$

ou bien

$$3(m^2+3m+2) - (m^2+9m+20) > 0,$$

c'est-à-dire

$$2m^2 - 14 > 0, \qquad \text{ou} \qquad m^2 > 7,$$

condition qui, exigeant que l'on prenne $m=3$, donnera par conséquent, pour les nombres N et n ci-dessus, les valeurs $N = 4.5.6 = 120$, $n = 2.7.8 = 112$, et pour leur différence $N - n = 120 - 112 = 8$. D'où il appert (autant du moins qu'il est possible de l'évaluer *a priori*) que le problème d'intégration ainsi traité consistera dès lors dans la détermination d'une seule inconnue par le moyen de *huit* équations simultanées aux dérivées partielles du *cinquième* ordre.

Pour obtenir les mêmes équations auxquelles nous venons d'arriver, exprimées à l'aide des trois inconnues P, Q, R, spéciales au cas du système triplement isotherme, il suffira, avons-nous dit, de nous rappeler les formules (10) et (8) de notre Chapitre III, savoir

$$H = QR, \quad K = RP, \quad J = PQ, \qquad \frac{P}{\rho} = 0, \quad \frac{Q}{\psi} = 0, \quad \frac{R}{\varpi} = 0,$$

desquelles nous tirerons successivement

(104) $$\frac{H}{K} = \frac{Q}{P}, \quad \frac{K}{J} = \frac{R}{Q}, \quad \frac{J}{H} = \frac{P}{R}, \qquad \frac{H}{J} = \frac{R}{P}, \quad \frac{K}{H} = \frac{P}{Q}, \quad \frac{J}{K} = \frac{Q}{R},$$

(105) $$\left\{\begin{array}{lll} lH = lQ + lR, & lK = lR + lP, & lJ = lP + lQ, \\ \frac{lH}{\psi} = \frac{lR}{\psi}, & \frac{lK}{\varpi} = \frac{lP}{\varpi}, & \frac{lJ}{\rho} = \frac{lQ}{\rho}, \\ \frac{lH}{\varpi} = \frac{lQ}{\varpi}, & \frac{lK}{\rho} = \frac{lR}{\rho}, & \frac{lJ}{\psi} = \frac{lP}{\psi}, \end{array}\right.$$

valeurs qui, étant remises à la fois dans les deux systèmes précédents (102) et (103), en multipliant toutefois chacune des équations du second groupe par le produit PQR, les transformeront alors respectivement dans les deux suivants :

(106) $$\left\{\begin{array}{l} dL = \frac{1}{2}\left(\frac{l.QR}{\rho}L - \frac{Q}{P}\frac{lR}{\psi}M - \frac{R}{P}\frac{lQ}{\varpi}N\right)d\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{lR}{\psi}L + \frac{lR}{\rho}M\right)d\psi \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{lQ}{\varpi}L + \frac{lQ}{\rho}N\right)d\varpi, \\ dM = \frac{1}{2}\left(\frac{lR}{\psi}L + \frac{lR}{\rho}M\right)d\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{l.RP}{\psi}M - \frac{R}{Q}\frac{lP}{\varpi}N - \frac{P}{Q}\frac{lR}{\rho}L\right)d\psi \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{lP}{\varpi}M + \frac{lP}{\psi}N\right)d\varpi, \\ dN = \frac{1}{2}\left(\frac{lQ}{\varpi}L + \frac{lQ}{\rho}N\right)d\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{lP}{\varpi}M + \frac{lP}{\psi}N\right)d\psi \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{l.PQ}{\varpi}N - \frac{P}{R}\frac{lQ}{\rho}L - \frac{Q}{R}\frac{lP}{\psi}M\right)d\varpi; \end{array}\right.$$

$$(107)\left\{\begin{array}{ll} PL'^2+QM'^2+RN'^2=PQR, & PL''L'''+QM''M'''+RN''M'''=0,\\ PL''^2+QM''^2+RN''^2=PQR, & PL'''L'+QM'''M'+RN'''N'=0,\\ PL'''^2+QM'''^2+RN'''^2=PQR, & PL'L''+QM'M''+RN'N''=0,\end{array}\right.$$

dans lesquels P, Q, R représenteront de nouveau, par hypothèse, les expressions complètement déterminées en φ, ψ, ϖ, successivement obtenues dans nos Chapitres III et IV, qui conviendront au cas général ou particulier que l'on se proposera de traiter.

Seulement, comme dans la plupart de ces cas, et notamment dans le cas le plus général de ce problème, lesdites expressions de P, Q, R ne renfermeront point de fonctions arbitraires, il arrivera, comme nous l'avons dit dans un paragraphe précédent (pp. 344-345), que le second de ces systèmes ne pourra être vérifié, quelles que soient les variables φ, ψ, ϖ, que si chacune des six équations qui le composent se réduit à de simples relations entre les neuf constantes arbitraires introduites par l'intégration du premier système (106), envisagé successivement pour les trois coordonnées x, y, z, relations dans lesquelles pourront entrer toutefois les constantes figurant antérieurement dans le système proposé lui-même, eu égard aux expressions précitées de P, Q, R.

Nous ferons emploi de ces deux derniers systèmes (106) et (107) eux-mêmes dans la Note IV de l'Appendice qui terminera ce Mémoire.

Si maintenant, en vue de nous servir des équations que nous venons d'établir pour traiter le cas le plus général du système isotherme, nous réalisions dans ces systèmes (102) ou (106) le changement linéaire de variables que nous avons opéré au début du présent Chapitre sur le système proposé lui-même (20) du Chapitre III, nous arriverions très aisément, à l'aide des formules (80) et (74), à constater, comme plus haut, que le système ainsi transformé ne contiendrait plus de nouveau les constantes α, β, γ, et s, mais seulement les quatre constantes a^2, b^2, c^2, d^2, dont dépendent seules les nouvelles expressions (83) de Φ, Ψ, Π, après ce changement de variables.

Toutefois, comme même après ce changement ces équations (102) ou (106) contiendront toujours les variables indépendantes engagées sous des fonctions elliptiques, dont la présence constituera très probablement une difficulté de plus pour l'intégration, nous nous débarrasserons de cette complication de pure forme par le moyen d'un second changement de variables, en prenant cette fois pour variables indépendantes, à la place des nouvelles coordonnées thermométriques φ, ψ, ϖ, les fonctions Φ, Ψ, Π elles-mêmes, définies par les égalités ci-dessus (83), ainsi que nous l'avons fait déjà dans le dernier numéro 7° de ce même Chapitre IV, parce que les expressions (72) des dérivées Φ', Ψ', Π', et (65) de P, Q, R, devenant alors algébriques par rapport à ces nouvelles variables, il est bien clair que le système (106), obtenu tout à l'heure à l'aide de simples différentiations et combinaisons algébriques, en partant du système proposé (20) du Chapitre III, ne renfermera plus lui-même les variables que sous forme simplement algébrique.

Pour obtenir le nouveau système qui résulterait ainsi de ces deux changements successifs de variables indépendantes, il ne sera pas nécessaire, d'ailleurs, de recommencer la même série d'opérations et de calculs ; il suffira d'observer, en premier lieu, qu'en posant alors par analogie

$$du = \mathfrak{L}\,d\Phi + \mathfrak{M}\,d\Psi + \mathfrak{N}\,d\Pi,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{du}{d\Phi} = \mathfrak{L}, \qquad \frac{du}{d\Psi} = \mathfrak{M}, \qquad \frac{du}{d\Pi} = \mathfrak{N},$$

les dérivées L, M, N, précédemment considérées (84), se transformeront alors dans les valeurs

$$(108)\quad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{u}{\varphi} = \frac{du}{d\Phi}\frac{d\Phi}{d\varphi} = \mathfrak{L}\Phi', \qquad M = \frac{u}{\psi} = \frac{du}{d\Psi}\frac{d\Psi}{d\psi} = \mathfrak{M}\Psi', \\ N &= \frac{u}{\varpi} = \frac{du}{d\Pi}\frac{d\Pi}{d\varpi} = \mathfrak{N}\Pi', \end{aligned} \right.$$

et que l'on aura semblablement pour les dérivées secondes, par exemple,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u^2}{\varphi^2} = \dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{u}{\varphi}\right) = \dfrac{d}{d\varphi}(\mathcal{L}\Phi') = \Phi'\dfrac{d\mathcal{L}}{d\varphi} + \mathcal{L}\Phi'' = \dfrac{d\mathcal{L}}{d\Phi}\Phi'^2 + \mathcal{L}\Phi'', \\ \dfrac{u^2}{\psi\varpi} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{u}{\varpi}\right) = \dfrac{d}{d\psi}(\mathfrak{N}\Pi') = \dfrac{d}{d\Psi}(\mathfrak{N}\Pi')\Psi' = \dfrac{d\mathfrak{N}}{d\Psi}\Psi'\Pi', \\ \dfrac{d}{d\varpi}\left(\dfrac{u}{\psi}\right) = \dfrac{d}{d\varpi}(\mathfrak{M}\Psi') = \dfrac{d}{d\Pi}(\mathfrak{M}\Psi')\Pi' = \dfrac{d\mathfrak{M}}{d\Pi}\Psi'\Pi', \end{array}\right. \end{array}\right.$$

et, par conséquent, en permutant, les neuf valeurs :

$$(109)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{u^2}{\varphi^2} = \dfrac{d\mathcal{L}}{d\Phi}\Phi'^2 + \mathcal{L}\Phi'', & \dfrac{u^2}{\psi^2} = \dfrac{d\mathfrak{M}}{d\Psi}\Psi'^2 + \mathfrak{M}\Psi'', & \dfrac{u^2}{\varpi^2} = \dfrac{d\mathfrak{N}}{d\Pi}\Pi'^2 + \mathfrak{N}\Pi''. \\ \dfrac{u^2}{\psi\varpi} = \dfrac{d\mathfrak{N}}{d\Psi}\Psi'\Pi' = \dfrac{d\mathfrak{M}}{d\Pi}\Psi'\Pi', & \dfrac{u^2}{\varpi\varphi} = \dfrac{d\mathcal{L}}{d\Pi}\Pi'\Phi' = \dfrac{d\mathfrak{N}}{d\Phi}\Pi'\Phi', & \dfrac{u^2}{\varphi\psi} = \dfrac{d\mathfrak{M}}{d\Phi}\Phi'\Psi' = \dfrac{d\mathcal{L}}{d\Psi}\Phi'\Psi' \end{array}\right.$$

Substituant dès lors ces valeurs (108) et (109) dans les équations (99) et (97), en y introduisant en même temps, à la place des quantités H, K, J, leurs valeurs (68), les premières équations de ces deux groupes (99) et (97) se transformeront alors respectivement dans les deux suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\mathcal{L}}{d\Phi}\Phi'^2 + \mathcal{L}\Phi'' = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{d}{d\Phi}(l.\mathrm{H}_1\Phi'^2)\Phi'.\mathcal{L}\Phi' - \dfrac{\mathrm{H}_1\Phi'^2}{\mathrm{K}_1\Psi'^2}\dfrac{d}{d\Psi}(l.\mathrm{H}_1\Phi'^2)\Psi'.\mathfrak{M}\Psi' \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{\mathrm{H}_1\Phi'^2}{\mathrm{J}_1\Pi'^2}\dfrac{d}{d\Pi}(l.\mathrm{H}_1\Phi'^2)\Pi'.\mathfrak{N}\Pi'\right], \\ \dfrac{d\mathfrak{N}}{d\Psi}\Psi'\Pi' = \dfrac{d\mathfrak{M}}{d\Pi}\Psi'\Pi' = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{d\Pi}(l.\mathrm{K}_1\Psi'^2)\Pi'.\mathfrak{M}\Psi' + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{d\Psi}(l.\mathrm{J}_1\Pi'^2)\Psi'.\mathfrak{N}\Pi', \end{array}\right.$$

c'est-à-dire plus simplement, en les divisant respectivement par Φ'^2 et $\Psi'\Pi'$,

$$(110)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\mathcal{L}}{d\Phi} + \dfrac{\Phi''}{\Phi'^2}\mathcal{L} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{d}{d\Phi}(l\mathrm{H}_1 + 2l\Phi').\mathcal{L} - \dfrac{\mathrm{H}_1}{\mathrm{K}_1}\dfrac{dl\mathrm{H}_1}{d\Psi}.\mathfrak{M} - \dfrac{\mathrm{H}_1}{\mathrm{J}_1}\dfrac{dl\mathrm{H}_1}{d\Pi}.\mathfrak{N}\right], \\ \dfrac{d\mathfrak{N}}{d\Psi} = \dfrac{d\mathfrak{M}}{d\Pi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dl\mathrm{K}_1}{d\Pi}\mathfrak{M} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dl\mathrm{J}_1}{d\Psi}\mathfrak{N}. \end{array}\right.$$

Or, d'une part, au second membre de la première de ces équations, le second terme en $\mathcal{L}$ détruit le terme correspondant du premier membre, car son coefficient a pour valeur

$$\frac{dl\Phi'}{d\Phi}=\frac{dl\Phi'}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\Phi}=\frac{\Phi''}{\Phi'}\cdot\frac{1}{\Phi'}=\frac{\Phi''}{\Phi'^2}.$$

D'autre part, H_1, K_1, J_1 représentant maintenant dans ces équations les expressions (73) du Chapitre précédent, c'est-à-dire, en les écrivant à l'aide de la constante d^2 définie par l'égalité suivante (74), celles-ci :

$$H_1=\frac{1}{4d^2}\frac{(\Phi-\Psi)(\Phi-\Pi)}{f(\Phi)},\quad K_1=\frac{1}{4d^2}\frac{(\Psi-\Pi)(\Psi-\Phi)}{f(\Psi)},\quad J_1=\frac{1}{4d^2}\frac{(\Pi-\Phi)(\Pi-\Psi)}{f(\Pi)},$$

dont on déduira par la différentiation

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dlH_1}{d\Phi}=\frac{1}{\Phi-\Psi}+\frac{1}{\Phi-\Pi}-\frac{f'(\Phi)}{f(\Phi)}=\frac{2\Phi-(\Psi+\Pi)}{(\Phi-\Psi)(\Phi-\Pi)}-\frac{f'(\Phi)}{f(\Phi)},\\&\frac{dlH_1}{d\Psi}=\frac{-1}{\Phi-\Psi},\quad\frac{dlH_1}{d\Pi}=\frac{1}{\Pi-\Phi},\quad\frac{dlK_1}{d\Pi}=\frac{-1}{\Psi-\Pi},\quad\frac{dlJ_1}{d\Psi}=\frac{1}{\Psi-\Pi},\end{aligned}\right.$$

ces mêmes équations (110) deviendront, en y remettant ces dernières valeurs,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{d\Phi}=\frac{1}{2}\Bigg[&\left(\frac{\Psi+\Pi-2\Phi}{(\Phi-\Psi)(\Pi-\Phi)}-\frac{f'(\Phi)}{f(\Phi)}\right)\mathcal{L}-\frac{\Pi-\Phi}{\Psi-\Pi}\frac{f(\Psi)}{f(\Phi)}\left(\frac{-1}{\Phi-\Psi}\right)\mathcal{M}\\&-\frac{\Phi-\Psi}{\Psi-\Pi}\frac{f(\Pi)}{f(\Phi)}\frac{1}{\Pi-\Phi}\mathcal{N}\Bigg].\\\frac{d\mathcal{N}}{d\Psi}=\frac{d\mathcal{M}}{d\Pi}&=\frac{1}{2}\frac{-1}{\Psi-\Pi}\mathcal{M}+\frac{1}{2}\frac{1}{\Psi-\Pi}\mathcal{N}.\end{aligned}\right.$$

Et, par conséquent, si nous convenons de représenter, pour abréger l'écriture, par Ω le produit

$$(111)\qquad \Omega=(\Psi-\Pi)(\Pi-\Phi)(\Phi-\Psi),$$

on voit par là que nous aurons définitivement, à l'aide de permutations circulaires évidentes, les neuf égalités, analogues aux précédentes (100) et (101), savoir :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}}{d\Phi} &= \frac{1}{2\Omega f(\Phi)}\Big[\big\{(\Psi-\Pi)(\Psi+\Pi-2\Phi)f(\Phi)-\Omega f'(\Phi)\big\}.\mathcal{L} \\
&\qquad + (\Pi-\Phi)^2 f(\Psi).\mathcal{M} - (\Phi-\Psi)^2 f(\Pi)\,\mathcal{N}\Big] \\
\frac{d\mathcal{M}}{d\Psi} &= \frac{1}{2\Omega f(\Psi)}\Big[\big\{(\Pi-\Phi)(\Pi+\Phi-2\Psi)f(\Psi)-\Omega f'(\Psi)\big\}.\mathcal{M} \\
&\qquad + (\Phi-\Psi)^2 f(\Pi).\mathcal{N} - (\Psi-\Pi)^2 f(\Phi).\mathcal{L}\Big] \\
\frac{d\mathcal{N}}{d\Pi} &= \frac{1}{2\Omega f(\Pi)}\Big[\big\{(\Phi-\Psi)(\Phi+\Psi-2\Pi)f(\Pi)-\Omega f'(\Pi)\big\}.\mathcal{N} \\
&\qquad + (\Psi-\Pi)^2 f(\Phi).\mathcal{L} - (\Pi-\Phi)^2 f(\Psi).\mathcal{M}\Big] \\
\frac{d\mathcal{N}}{d\Psi} = \frac{d\mathcal{M}}{d\Pi} &= \frac{\mathcal{N}-\mathcal{M}}{2(\Psi-\Pi)},\quad \frac{d\mathcal{L}}{d\Pi} = \frac{d\mathcal{N}}{d\Phi} = \frac{\mathcal{L}-\mathcal{N}}{2(\Pi-\Phi)},\quad \frac{d\mathcal{M}}{d\Phi} = \frac{d\mathcal{L}}{d\Psi} = \frac{\mathcal{M}-\mathcal{L}}{2(\Phi-\Psi)}.
\end{aligned}\right.$$

lesquelles permettent encore de former immédiatement, comme plus haut, le système des trois équations simultanées aux différentielles totales, auxquelles seront astreintes à satisfaire les trois nouvelles dérivées $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, lorsque l'on aura adopté les fonctions Φ, Ψ, Π pour variables indépendantes à la place de φ, ψ, ϖ.

Intégration générale de ce système d'équations aux différentielles totales.— Adoptant donc ce nouveau système de variables pour former effectivement ces équations et procéder ensuite à leur intégration, nous substituerons, comme simple notation, en vue seulement de la plus grande commodité de l'écriture, aux lettres majuscules Φ, Ψ, Π, les lettres cursives λ, μ, ν, en récrivant ici, par conséquent, les égalités de définition précitées (83) et (79) sous la forme

$$
(112)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda = \Phi(\varphi) = -a^2\mathrm{cn}^2\varphi - b^2\mathrm{sn}^2\varphi, && k = \sqrt{\frac{l^2}{-n^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\\
&\mu = \Psi(\psi) = -b^2\mathrm{cn}^2\psi - c^2\mathrm{sn}^2\psi, && k' = \sqrt{\frac{m^2}{-l^2}} = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}},\\
&\nu = \Pi(\varpi) = -c^2\mathrm{cn}^2\varpi - a^2\mathrm{sn}^2\varpi, && k'' = \sqrt{\frac{n^2}{-m^2}} = \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Alors si nous posons comme tout à l'heure, pour une coordonnée rectiligne quelconque u,

$$(113)\qquad du = \Lambda d\lambda + \mathrm{M} d\mu + \mathrm{N} d\nu,$$

ou

$$(114)\qquad \Lambda = \frac{du}{d\lambda},\qquad \mathrm{M} = \frac{du}{d\mu},\qquad \mathrm{N} = \frac{du}{d\nu},$$

et

$$(115)\qquad \Theta = (\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu),$$

Λ, M, N tenant ainsi la place de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, et Θ de Ω, les équations que nous venons d'établir tout à l'heure, étant récrites avec ces nouvelles notations, ainsi qu'il suit

$$
(116)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\Lambda}{d\lambda} &= \frac{1}{2\Theta f(\lambda)}\Big[\{(\mu-\nu)(\mu+\nu-2\lambda)f(\lambda) - \Theta f'(\lambda)\}.\Lambda\\
&\qquad + (\nu-\lambda)^2 f(\mu).\mathrm{M} - (\lambda-\mu)^2 f(\nu).\mathrm{N}\Big],\\
\frac{d\mathrm{M}}{d\mu} &= \frac{1}{2\Theta f(\mu)}\Big[\{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda-2\mu)f(\mu) - \Theta f'(\mu)\}.\mathrm{M}\\
&\qquad + (\lambda-\mu)^2 f(\nu).\mathrm{N} - (\mu-\nu)^2 f(\lambda).\Lambda\Big],\\
\frac{d\mathrm{N}}{d\nu} &= \frac{1}{2\Theta f(\nu)}\Big[\{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu-2\nu)f(\nu) - \Theta f'(\nu)\}.\mathrm{N}\\
&\qquad + (\mu-\nu)^2 f(\lambda).\Lambda - (\nu-\lambda)^2 f(\mu).\mathrm{M},\\
\frac{d\mathrm{N}}{d\mu} &= \frac{d\mathrm{M}}{d\nu} = \frac{\mathrm{N}-\mathrm{M}}{2(\mu-\nu)},\quad \frac{d\Lambda}{d\nu} = \frac{d\mathrm{N}}{d\lambda} = \frac{\Lambda-\mathrm{N}}{2(\nu-\lambda)},\quad \frac{d\mathrm{M}}{d\lambda} = \frac{d\Lambda}{d\mu} = \frac{\mathrm{M}-\Lambda}{2(\lambda-\mu)},
\end{aligned}
\right.
$$

fourniront immédiatement, pour le système d'équations aux différentielles totales qui devront déterminer nos inconnues Λ, M, N, les trois équations, linéaires par rapport à ces inconnues (*),

$$
(117)\quad
\begin{cases}
d\Lambda = \dfrac{1}{2\Theta f(\lambda)}\Big[\big\{(\mu-\nu)(\mu+\nu-2\lambda)f(\lambda)-\Theta f'(\lambda)\big\}\Lambda+(\nu-\lambda)^2 f(\mu)\,M \\
\qquad -(\lambda-\mu)^2 f(\nu) N\Big]\,d\lambda+\dfrac{1}{2(\lambda-\mu)}(M-\Lambda)\,d\mu+\dfrac{1}{2(\nu-\lambda)}(\Lambda-N)\,d\nu, \\
dM = \dfrac{1}{2(\lambda-\mu)}(M-\Lambda)\,d\lambda+\dfrac{1}{2\Theta f(\mu)}\Big[\big\{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda-2\mu)f(\mu)-\Theta f'(\mu)\big\}M \\
\qquad +(\lambda-\mu)^2 f(\nu)\,N-(\mu-\nu)^2 f(\lambda)\,\Lambda\Big]\,d\mu+\dfrac{1}{2(\mu-\nu)}(N-M)\,d\nu, \\
dN = \dfrac{1}{2(\nu-\lambda)}(\Lambda-N)\,d\lambda+\dfrac{1}{2(\mu-\nu)}(N-M)\,d\mu \\
\qquad +\dfrac{1}{2\Theta f(\nu)}\Big[\big\{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu-2\nu)f(\nu)-\Theta f'(\nu)\big\}N \\
\qquad +(\mu-\nu)^2 f(\lambda)\,\Lambda-(\nu-\lambda)^2 f(\mu)\,M\Big]\,d\nu;
\end{cases}
$$

et, en supposant ce système complètement intégrable, il résulte à première vue de sa forme même, ou, en termes plus clairs, de la dernière ligne des équations (116), que la différentielle (113) sera bien alors une différentielle exacte.

C'est donc de ce système qu'il s'agit actuellement de trouver la solution la plus générale.

Cette question offrirait sans doute, si l'on voulait se la proposer, un bel exemple d'application des savantes méthodes de Jacobi et Bour, ou de Mayer, déjà rappelées plus haut. Mais, malgré la puissance et la fécondité de ces profondes théories, les opérations qu'elles exigent sont malaisées à réaliser pour ce

(*) Il est à peine besoin de signaler encore une fois que ce système (117) ne se trouve pas dans Lamé, puisqu'il n'est que la traduction, sous une autre forme, des neuf équations précédentes (116), dont l'illustre Auteur ne donne pas les trois premières, comme nous l'avons dit, mais seulement celles de la dernière ligne qui reproduisent son type (34) du § LXIII des *Coord. Curvil.* (p. 112). (Voir la *clef* de la note de la page 302, Chapitre IV).

système particulier, parce qu'étant compliquées (*), multiples, et non symétriques, elles accumulent, dès lors, dans la même proportion, les difficultés de calcul et les chances d'erreur; c'est pourquoi il sera tout à la fois plus simple, plus rapide, et surtout plus sûr (**), de profiter de la symétrie extrêmement remarquable de ces mêmes équations pour en instituer un mode d'intégration, qui serait sans doute inapplicable dans la plupart des cas, mais qui suffira, comme on va le voir, dans le cas actuel, pour résoudre la question d'une façon sûre et commode.

Dans cette pensée, partant de ce fait que le système proposé des équations aux différentielles totales (117) est complètement équivalent, comme exprimant une seule et même chose, au système des neuf équations aux dérivées partielles précédentes (116), lesquelles, ne renfermant chacune que des dérivées relatives à une seule variable, sont assimilables, par groupe de trois, à des équations différentielles ordinaires simultanées, l'on voit ainsi tout d'abord que la question proposée revient en fait à trouver une intégrale générale commune aux trois systèmes d'équations différentielles ordinaires, savoir, en premier lieu,

$$(118)\left\{\begin{aligned} &\frac{d\Lambda}{d\lambda}=\frac{1}{2\Theta f(\lambda)}\Big[\big\{(\mu-\nu)(\mu+\nu-2\lambda)f(\lambda)-\Theta f'(\lambda)\big\}\Lambda+(\nu-\lambda)^2f(\mu)\mathrm{M}-(\lambda-\mu)^2f(\nu)\mathrm{N}\Big],\\ &\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}=\frac{1}{2(\lambda-\mu)}(\mathrm{M}-\Lambda),\qquad \frac{d\mathrm{N}}{d\lambda}=\frac{1}{2(\nu-\lambda)}(\Lambda-\mathrm{N}),\end{aligned}\right.$$

(*) Pour l'une comme pour l'autre de ces méthodes, en effet, il faudra nécessairement commencer par rechercher au moins une intégrale de l'un des systèmes ci-après (118), (119), ou (120), ou de l'un des systèmes analogues correspondant au système (117) supposé transformé à l'aide d'une certaine substitution du second degré des variables indépendantes φ, ψ, ϖ : problème difficile dans tous les cas, dont la remarquable symétrie de ce même système (117) va nous dispenser fort heureusement, comme on va le voir, de posséder la solution.

(**) Ces méthodes, d'ailleurs, n'ayant nulle part encore pénétré dans l'enseignement classique, leur emploi nous était par cela seul complètement interdit en raison du but essentiel que nous nous proposons dans cet ouvrage (de même que dans nos deux autres précédents, si souvent rappelés), qui est précisément de mettre à la portée des jeunes débutants dans la carrière scientifique, en possession des seules connaissances classiques, les belles et fécondes théories qui constituent l'œuvre admirable et trop peu connue de Lamé.

la variable indépendante étant λ dans ce premier système, et μ et ν y étant considérées comme des constantes; puis, en second lieu, le système

$$(119)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\Lambda}{d\mu}=\frac{1}{2(\lambda-\mu)}(\mathrm{M}-\Lambda),\\&\frac{d\mathrm{M}}{d\mu}=\frac{1}{2\Theta f(\mu)}\left[\{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda-2\mu)f(\mu)-\Theta f'(\mu)\}\mathrm{M}+(\lambda-\mu)^2f(\nu)\mathrm{N}-(\mu-\nu)^2f(\lambda)\Lambda\right],\\&\frac{d\mathrm{N}}{d\mu}=\frac{1}{2(\mu-\nu)}(\mathrm{N}-\mathrm{M}),\end{aligned}\right.$$

dans lequel la variable indépendante est μ, ν et λ devant être considérées comme des constantes; enfin ce dernier système

$$(120)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\Lambda}{d\nu}=\frac{1}{2(\nu-\lambda)}(\Lambda-\mathrm{N}),\qquad\frac{d\mathrm{M}}{d\nu}=\frac{1}{2(\mu-\nu)}(\mathrm{N}-\mathrm{M}),\\&\frac{d\mathrm{N}}{d\nu}=\frac{1}{2\Theta f(\nu)}\left[\{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu-2\nu)f(\nu)-\Theta f'(\nu)\}\mathrm{N}+(\mu-\nu)^2f(\lambda)\Lambda-(\nu-\lambda)^2f(\mu)\mathrm{M}\right].\end{aligned}\right.$$

dans lequel ν étant la variable indépendante, λ et μ devront être traitées à leur tour comme de simples constantes.

Or cette recherche directe d'une intégrale commune, qui en général présenterait les plus grandes difficultés et serait en fait, la plupart du temps, complètement impraticable, est, au contraire, dans le cas actuel, non seulement possible, mais relativement facile, comme on va le voir, en raison des deux circonstances suivantes :

1° En théorie générale, que, chacun de ces trois systèmes simultanés étant linéaire et homogène, il suffira pour avoir l'intégrale générale de l'un quelconque d'entre eux en particulier, de posséder simplement trois solutions particulières de celui-là, obtenues d'ailleurs par tel procédé que l'on voudra;

2° En fait, et dans l'espèce, que, pour rencontrer ainsi la forme en λ, μ, ν de trois solutions particulières communes aux trois systèmes, il suffira, comme on va le voir, de considérer dans chaque système les deux équations les plus simples, la vérifica-

tion de l'équation la plus compliquée, c'est-à-dire des trois premières équations (116), se réduisant ensuite à établir de simples relations entre les constantes qui entreront dans chacune de ces trois solutions particulières.

Posée en ces termes, la question que nous devons résoudre en premier lieu se réduit donc à celle-ci : trouver trois solutions particulières communes aux six équations

$$(121)\quad \left\{\begin{aligned} &2(\lambda-\mu)\frac{dM}{d\lambda}=M-\Lambda, && 2(\nu-\lambda)\frac{dN}{d\lambda}=\Lambda-N,\\ &2(\mu-\nu)\frac{dN}{d\mu}=N-M, && 2(\lambda-\mu)\frac{d\Lambda}{d\mu}=M-\Lambda,\\ &2(\nu-\lambda)\frac{d\Lambda}{d\nu}=\Lambda-N, && 2(\mu-\nu)\frac{dM}{d\nu}=N-M,\end{aligned}\right.$$

question dont il est facile à présent de venir à bout à l'aide de simples considérations de symétrie, en l'abordant de la façon suivante.

Considérant d'abord les deux équations de la première ligne empruntées au système (118), et dans lesquelles, par conséquent, μ et ν sont des constantes; nous les mettrons sous la forme

$$(122)\qquad 2(\lambda-\mu)\frac{dM}{d\lambda}-M=2(\lambda-\nu)\frac{dN}{d\lambda}-N=-\Lambda,$$

et nous essayerons tout d'abord de vérifier la première de ces deux dernières équations, c'est-à-dire celle fournie par l'élimination de l'inconnue Λ, entre les deux équations précitées.

A cet effet, nous récrirons cette équation elle-même ainsi qu'il suit, en introduisant, par addition et soustraction, dans chaque membre une constante indéterminée :

$$2\left[k_1+\lambda-(k_1+\mu)\right]\frac{dM}{d\lambda}-M=2\left[k_2+\lambda-(k_2+\nu)\right]\frac{dN}{d\lambda}-N.$$

Sous cette forme, l'on voit que cette même équation se trouvera

vérifiée, s'il est possible de satisfaire à la fois aux trois équations

$$(125)\quad \begin{cases} 2(k_1+\lambda)\dfrac{dM}{d\lambda}-M=0, \qquad 2(k_2+\lambda)\dfrac{dN}{d\lambda}-N=0, \\ 2(k_1+\mu)\dfrac{dM}{d\lambda}=2(k_2+\nu)\dfrac{dN}{d\lambda}. \end{cases}$$

Or, les deux premières de ces équations devenant, en séparant les variables,

$$\frac{dM}{M}=\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{k_1+\lambda}, \qquad \frac{dN}{N}=\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{k_2+\lambda},$$

donneront en intégrant

$$lM=\frac{1}{2}l(k_1+\lambda)+l\,\text{const}, \qquad lN=\frac{1}{2}l(k_2+\lambda)+l\,\text{const.},$$

ou

$$(124)\qquad M=\Phi_1(\mu,\nu)\sqrt{k_1+\lambda}, \qquad N=\Phi_2(\mu,\nu)\sqrt{k_2+\lambda},$$

d'où, par suite, en différentiant,

$$\frac{dM}{d\lambda}=\frac{\Phi_1(\mu,\nu)}{2\sqrt{k_1+\lambda}}, \qquad \frac{dN}{d\lambda}=\frac{\Phi_2(\mu,\nu)}{2\sqrt{k_2+\lambda}};$$

et alors, comme, en reportant ces valeurs dans la troisième équation (123), celle-ci deviendra

$$\frac{(k_1+\mu)\Phi_1(\mu,\nu)}{\sqrt{k_1+\lambda}}=\frac{(k_2+\nu)\Phi_2(\mu,\nu)}{\sqrt{k_2+\lambda}},$$

on voit qu'elle ne pourra être vérifiée, elle aussi, qu'à la condition de prendre à la fois

$$k_1=k_2=k, \qquad \text{et} \qquad (k+\mu)\Phi_1(\mu,\nu)=(k+\nu)\Phi_2(\mu,\nu)=\Phi(\mu,\nu),$$

d'où, par suite, pour Φ_1 et Φ_2 les valeurs

$$\Phi_1(\mu,\nu)=\frac{\Phi(\mu,\nu)}{k+\mu}, \qquad \text{et} \qquad \Phi_2(\mu,\nu)=\frac{\Phi(\mu,\nu)}{k+\nu}.$$

En reportant ces valeurs dans les expressions (124) et la seconde équation (122), on aura, dès lors, pour première expression des inconnues Λ, M, N vérifiant à la fois les deux équations (122), ou, ce qui est la même chose, les deux de la première ligne (121),

$$M=\frac{\Phi(\mu,\nu)}{k+\mu}\sqrt{k+\lambda}, \qquad N=\frac{\Phi(\mu,\nu)}{k+\nu}\sqrt{k+\lambda},$$

avec

$$-\Lambda=\frac{\Phi(\mu,\nu)}{k+\nu}\left[2(\lambda-\nu)\cdot\frac{1}{2\sqrt{k+\lambda}}-\sqrt{k+\lambda}\right]=\Phi(\mu,\nu)\frac{(\lambda-\nu)-(k+\lambda)}{(k+\nu)\sqrt{k+\lambda}},$$

ou simplement:

$$\Lambda=\frac{\Phi(\mu,\nu)}{k+\nu}\,\frac{k+\nu}{\sqrt{k+\lambda}}=\frac{\Phi(\mu,\nu)}{\sqrt{k+\lambda}}.$$

Ce premier résultat obtenu, si l'on remarque, au sujet des six équations proposées (121), que les trois équations de chaque colonne se déduisent les unes des autres en permutant à la fois les deux groupes (λ,μ,ν) et (Λ, M, N), on conclura de là que le même procédé de tâtonnement rationnel, successivement appliqué à chacun des trois systèmes de deux équations formés par chaque ligne de ce tableau (121), fournira respectivement pour ces trois systèmes les trois solutions particulières consistant chacune dans les trois expressions inscrites semblablement dans une même ligne du tableau suivant

$$(125)\quad\left\{\begin{array}{lll}\Lambda=\dfrac{\Phi(\mu,\nu)}{\sqrt{k+\lambda}}, & M=\dfrac{\Phi(\mu,\nu)}{k+\mu}\sqrt{k+\lambda}, & N=\dfrac{\Phi(\mu,\nu)}{k+\nu}\sqrt{k+\lambda},\\[2ex] M=\dfrac{\Psi(\nu,\lambda)}{\sqrt{k+\mu}}, & N=\dfrac{\Phi(\nu,\lambda)}{k+\nu}\sqrt{k+\mu}, & \Lambda=\dfrac{\Psi(\nu,\lambda)}{k+\lambda}\sqrt{k+\mu},\\[2ex] N=\dfrac{\Pi(\lambda,\mu)}{\sqrt{k+\nu}}, & \Lambda=\dfrac{\Pi(\lambda,\mu)}{k+\lambda}\sqrt{k+\nu}, & M=\dfrac{\Pi(\lambda,\mu)}{k+\mu}\sqrt{k+\nu}.\end{array}\right.$$

On obtiendra, dès lors, une solution commune aux trois systèmes correspondant aux trois lignes du tableau (121), en identifiant séparément les trois valeurs qui figurent dans celui que nous venons d'écrire (125), d'abord pour A, puis pour M et enfin pour N. La première de ces identifications donnera en particulier

$$\frac{\Phi(\mu,\nu)}{\sqrt{k+\lambda}} = \frac{\Psi(\nu,\lambda)}{k+\lambda}\sqrt{k+\mu} = \frac{\Pi(\lambda,\mu)}{k+\lambda}\sqrt{k+\nu},$$

ou, sous forme plus symétrique, en multipliant par $\sqrt{k+\lambda}$, et divisant par $\sqrt{k+\mu}\sqrt{k+\nu}$,

$$\frac{\Phi(\mu,\nu)}{\sqrt{k+\mu}\sqrt{k+\nu}} = \frac{\Psi(\nu,\lambda)}{\sqrt{k+\nu}\sqrt{k+\lambda}} = \frac{\Pi(\lambda,\mu)}{\sqrt{k+\lambda}\sqrt{k+\mu}} = \mathrm{D},$$

la valeur commune D de ces rapports ne pouvant être qu'une constante, puisque cette valeur ne peut dépendre, ni de λ d'après la première expression, ni de μ d'après la seconde, ni enfin de ν d'après la troisième.

Tirant donc de ces trois dernières égalités, pour les fonctions arbitraires Φ, Ψ, Π, les valeurs

$$\Phi(\mu,\nu) = \mathrm{D}\sqrt{(k+\mu)(k+\nu)}, \qquad \Psi(\nu,\lambda) = \mathrm{D}\sqrt{(k+\nu)(k+\lambda)},$$
$$\Pi(\lambda,\mu) = \mathrm{D}\sqrt{(k+\lambda)(k+\mu)},$$

et les reportant dans l'une quelconque des trois lignes du tableau (125), nous aurons donc obtenu ainsi, pour solution commune aux six équations proposées (121), les trois expressions

$$(126)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{D}\sqrt{\dfrac{(k+\mu)(k+\nu)}{k+\lambda}}, \qquad \mathrm{M} = \mathrm{D}\sqrt{\dfrac{(k+\nu)(k+\lambda)}{k+\mu}}, \\ \mathrm{N} = \mathrm{D}\sqrt{\dfrac{(k+\lambda)(k+\mu)}{k+\nu}}. \end{cases}$$

La question est donc réduite à chercher maintenant s'il est possible de disposer, de trois façons différentes, de la seule indéminée k, de manière à satisfaire à la fois aux trois équations restantes (118), (119) et (120), c'est-à-dire aux trois premières équations plus compliquées (116), car il est visible qu'en introduisant ces valeurs dans ces dernières équations, l'autre indéterminée D disparaîtra par suite de l'homogénéité.

A cet effet, déduisant d'abord par la différentiation de la première des expressions (126)

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\mathrm{D}\frac{\sqrt{(k+\mu)(k+\nu)}}{(k+\lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

puis reportant cette dernière valeur, ainsi que les trois expressions (126), dans la première de ces équations (116), et faisant passer tous les termes dans le second membre, nous trouverons

$$(127)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{D}\frac{\sqrt{(k+\mu)(k+\nu)}}{(k+\lambda)\sqrt{k+\lambda}}+\frac{\mathrm{D}}{2\Theta f(\lambda)}\Big[\big\{(\mu-\nu)(\mu+\nu-2\lambda)f(\lambda)-\Theta f'(\lambda)\big\}.\frac{\sqrt{(k+\mu)(k+\nu)}}{\sqrt{k+\lambda}}\\&\qquad+(\nu-\lambda)^2f(\mu).\frac{\sqrt{(k+\nu)(k+\lambda)}}{\sqrt{k+\mu}}-(\lambda-\mu)^2f(\nu).\frac{\sqrt{(k+\lambda)(k+\mu)}}{\sqrt{k+\nu}}\Big]=0;\end{aligned}\right.$$

et alors, en multipliant par $\frac{2\Theta}{\mathrm{D}}f(\lambda).(k+\lambda)\sqrt{(k+\lambda)(k+\mu)(k+\nu)}$, et ayant égard, en outre, à la valeur de définition (115) de Θ, qui peut s'écrire

$$\Theta = -(\mu-\nu).(\lambda-\nu)(\lambda-\mu) = -(\mu-\nu)\big\{\lambda^2-(\mu+\nu)\lambda+\mu\nu\big\},$$

nous obtiendrons ainsi l'équation

$$(128)\left\{\begin{aligned}&-(\mu-\nu)\big\{\lambda^2-(\mu+\nu)\lambda+\mu\nu\big\}f(\lambda).(k+\mu)(k+\nu)\\&+(\mu-\nu)\big[(\mu+\nu-2\lambda)f(\lambda)+\big\{\lambda^2-(\mu+\nu)\lambda+\mu\nu\big\}f'(\lambda)\big].(k+\lambda)(k+\mu)(k+\nu)\\&+(\nu-\lambda)^2f(\mu).(k+\nu)(k+\lambda)^2-(\lambda-\mu)^2f(\nu).(k+\mu)(k+\lambda)^2=0,\end{aligned}\right.$$

qu'il s'agit, par conséquent, de rendre identique.

Dans ce but, nous poserons, en vue d'abréger les écritures, et pour ce calcul seulement,

$$A = a^2 + b^2 + c^2, \qquad B = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2, \qquad C = a^2b^2c^2,$$

en sorte, qu'avec ces notations, les expressions de la fonction f, définie par l'équation (71), et de sa dérivée, seront pour une variable quelconque ρ :

$$(129) \qquad f(\rho) = \rho^3 + A\rho^2 + B\rho + C, \qquad f'(\rho) = 3\rho^2 + 2A\rho + B.$$

Cela posé, si après avoir remis ces valeurs dans l'équation en question (128), on la suppose ensuite ordonnée par rapport à λ, il est deux termes en particulier dont on pourra assez facilement calculer les coefficients, à savoir le premier et le dernier, qui seront respectivement de degré 5 et 0 en λ : car le premier de ces termes, qui proviendra uniquement des deux premières lignes de l'équation seulement, s'obtiendra évidemment en y réduisant chaque facteur simplement au seul de ses termes de degré le plus élevé en λ, et le dernier terme en réduisant, au contraire, tous les facteurs à leur seul terme indépendant de λ, c'est-à-dire en faisant simplement $\lambda = 0$ dans chaque facteur en particulier. Or, on obtiendra de cette façon pour le terme en λ^5

$$-(\mu-\nu)\lambda^2.\lambda^3(k+\mu)(k+\nu) + (\mu-\nu)\left[(-2\lambda)\lambda^3 + \lambda^2.3\lambda^2\right].\lambda(k+\mu)(k+\nu)$$
$$= (\mu-\nu)(k+\mu)(k+\nu)\left[-\lambda^5 + (-2\lambda^4 + 3\lambda^4).\lambda\right] = 0,$$

expression qui dores et déjà est donc identiquement nulle, ainsi qu'il est demandé ; puis, en second lieu, pour le terme indépendant de λ, en ayant égard aux expressions (129),

$$(130) \left\{ \begin{aligned} &-(\mu-\nu).\mu\nu.f(0)(k+\mu)(k+\nu) + (\mu-\nu)\left[(\mu+\nu)f(0) + \mu\nu f'(0)\right]k(k+\mu)(k+\nu) \\ &\qquad + \nu^2 f(\mu).(k+\nu)k^2 - \mu^2 f(\nu).(k+\mu)k^2 \\ &= (\mu-\nu)(k+\mu)(k+\nu)\left[-\mu\nu C + \{(\mu+\nu)C + \mu\nu B\}k\right] \\ &\qquad + \{\nu^2 f(\mu) - \mu^2 f(\nu)\}k^3 + \{\nu^3 f(\mu) - \mu^3 f(\nu)\}k^2. \end{aligned} \right.$$

Or, comme des mêmes expressions (129) on déduira successivement, en premier lieu,

$$f(\mu)\nu^2 = \mu^3\nu^2 + A\mu^2\nu^2 + B\mu\nu^2 + C\nu^2,$$
$$f(\nu)\mu^2 = \nu^3\mu^2 + A\nu^2\mu^2 + B\nu\mu^2 + C\mu^2,$$

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned} f(\mu)\nu^2 - f(\nu)\mu^2 &= \mu^2\nu^2(\mu - \nu) + B\mu\nu(\nu - \mu) + C(\nu^2 - \mu^2) \\ &= (\mu - \nu)\left[\mu^2\nu^2 - B\mu\nu - C(\mu + \nu)\right], \end{aligned}\right.$$

et de même, en second lieu,

$$f(\mu)\nu^3 = \mu^3\nu^3 + A\mu^2\nu^3 + B\mu\nu^3 + C\nu^3,$$
$$f(\nu)\mu^3 = \nu^3\mu^3 + A\nu^2\mu^3 + B\nu\mu^3 + C\mu^3,$$

$$(132)\quad \left\{\begin{aligned} f(\mu)\nu^3 - f(\nu)\mu^3 &= A\mu^2\nu^2(\nu - \mu) + B\mu\nu(\nu^2 - \mu^2) + C(\nu^3 - \mu^3) \\ &= (\nu - \mu)\left[A\mu^2\nu^2 + B\mu\nu(\nu + \mu) + C(\nu^2 + \mu\nu + \mu^2)\right], \end{aligned}\right.$$

l'expression ci-dessus (130) qu'il s'agit de calculer deviendra, en remettant dans sa seconde forme ces deux valeurs (131) et (132), puis développant, et ordonnant les différents facteurs par rapport à k,

$$\begin{aligned} &(\mu - \nu)\left[k^2 + (\mu + \nu)k + \mu\nu\right]\left[-\mu\nu C + \{(\mu + \nu)C + \mu\nu B\}k\right] \\ &+ (\mu - \nu)\left[\mu^2\nu^2 - B\mu\nu - C(\mu + \nu)\right]k^3 + (\nu - \mu)\left[A\mu^2\nu^2 + B\mu\nu(\nu + \mu) + C(\nu^2 + \mu\nu + \mu^2)\right]k^2 \\ &= (\mu - \nu)\Big[\{(\mu + \nu)C + \mu\nu B\}k^3 + \{(\mu + \nu)^2 C + (\mu + \nu)\mu\nu B - \mu\nu C\}k^2 \\ &\qquad + \{\mu\nu(\mu + \nu)C + \mu^2\nu^2 B - (\mu + \nu)\mu\nu C\}k - \mu^2\nu^2 C \\ &\qquad + \{\mu^2\nu^2 \quad B\mu\nu - C(\mu + \nu)\}k^3 - \{A\mu^2\nu^2 + B\mu\nu(\mu + \nu) + C(\mu^2 + \mu\nu + \nu^2)\}k^2\Big] \\ &= (\mu - \nu)\left[\mu^2\nu^2 k^3 + \{(\mu + \nu)^2 C - A\mu^2\nu^2 - C(\mu^2 + 2\mu\nu + \nu^2)\}k^2 + \mu^2\nu^2 Bk - \mu^2\nu^2 C\right] \\ &\qquad = (\mu - \nu)\mu^2\nu^2(k^3 - Ak^2 + Bk - C) = -(\mu - \nu)\mu^2\nu^2 . f(-k). \end{aligned}$$

Et dès lors, s'il est possible de vérifier également cette première équation (116) avec des expressions de la forme (126), cela ne pourra être réalisé qu'en prenant pour $-k$ l'une des trois racines de l'équation $f(\rho) = 0$, racines qui sont, d'après la définition (71), $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, c'est-à-dire, par conséquent, en prenant pour k l'une des trois constantes données a^2, b^2, c^2.

On pourrait se proposer de reconnaître, en calculant ainsi successivement les coefficients des quatre autres termes en λ, λ^2, λ^3, et λ^4 de la même équation, que c'est toujours cette même condition qui procurerait l'annulation de chacun de ces coefficients, et, par suite, qu'elle sera suffisante pour la vérification de chacune des trois équations proposées (116), puisque cette condition n'est pas modifiée par la permutation circulaire qui échange les unes dans les autres ces trois mêmes équations. Mais le calcul serait ainsi, comme on peut aisément le prévoir, extrêmement long et laborieux, et nous parviendrons beaucoup plus rapidement au même but, maintenant que nous savons déjà que cette condition est nécessaire pour la vérification des trois équations précitées (116), en nous assurant, *a posteriori*, qu'elle est en même temps suffisante pour le même objet, par l'introduction directe de cette condition dans la même équation (127) que nous venons de considérer.

En effet, multiplions cette même équation (127) par le produit $\frac{2}{D}\,\frac{f(\lambda)}{\sqrt{(k+\lambda)(k+\mu)(k+\nu)}}$, elle deviendra

$$\frac{f(\lambda)}{(k+\lambda)^2}+\frac{1}{\Theta}\left[\left\{(\mu-\nu)(\mu+\nu-2\lambda)\frac{f(\lambda)}{k+\lambda}-\frac{\Theta f'(\lambda)}{k+\lambda}\right\}\right.$$
$$\left.+(\nu-\lambda)^2\frac{f(\mu)}{k+\mu}-(\lambda-\mu)^2\frac{f(\nu)}{k+\nu}\right]=0,$$

puis faisons-y, par exemple, $k=a^2$, et désignons par Δ ce que devient le premier membre dans cette hypothèse, expression qu'il s'agira, par conséquent, de démontrer être identiquement nulle.

Si l'on a égard à la définition (71) de la fonction f, il est clair que cette même expression Δ pourra s'écrire

(133) $$\Delta=\frac{f(\lambda)}{(a^2+\lambda)^2}-\frac{f'(\lambda)}{a^2+\lambda}+\frac{S}{\Theta}$$

en faisant, pour abréger,

(134) $$\left\{\begin{aligned}S=(\mu-\nu)(\mu+\nu-2\lambda).(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)+(\nu-\lambda)^2.(b^2+\mu)(c^2+\mu)\\ -(\lambda-\mu)^2.(b^2+\nu)(c^2+\nu).\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on effectue d'abord, dans chaque terme de cette dernière expression $\mathcal{S}$, seulement le produit des deux derniers facteurs, et qu'on l'ordonne ensuite par rapport aux constantes (*), il est clair qu'elle pourra alors être écrite sous la forme

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}b^2c^2 + \mathcal{B}(b^2 + c^2) + \mathcal{C},$$

les valeurs des trois coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant respectivement les suivantes

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (\mu - \nu)(\mu + \nu - 2\lambda) + (\nu - \lambda)^2 - (\lambda - \mu)^2 \\ &= \mu^2 - \nu^2 - 2\lambda(\mu - \nu) + (\nu^2 - 2\nu\lambda + \lambda^2) - (\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= (\mu - \nu)(\mu + \nu - 2\lambda).\lambda + (\nu^2 - 2\nu\lambda + \lambda^2).\mu - (\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2).\nu \\ &= (\mu - \nu)\{(\mu + \nu)\lambda - 2\lambda^2\} + \nu^2\mu - \mu^2\nu + \lambda^2(\mu - \nu) \\ &= (\mu - \nu)\{(\mu + \nu)\lambda - \lambda^2 - \mu\nu\} = -(\mu - \nu).(\lambda - \nu)(\lambda - \mu) = \Theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= (\mu - \nu)(\mu + \nu - 2\lambda).\lambda^2 + (\nu^2 - 2\nu\lambda + \lambda^2).\mu^2 - (\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2).\nu^2 \\ &= (\mu^2 - \nu^2)\lambda^2 - 2(\mu - \nu)\lambda^3 - 2(\lambda\nu\mu^2 - \lambda\mu\nu^2) + \lambda^2(\mu^2 - \nu^2) \\ &= 2(\mu^2 - \nu^2)\lambda^2 - 2(\mu - \nu)\lambda^3 - 2\lambda\mu\nu(\mu - \nu) \\ &= 2\lambda(\mu - \nu)\{(\mu + \nu)\lambda - \lambda^2 - \mu\nu\} = -2\lambda(\mu - \nu).(\lambda - \nu)(\lambda - \mu) = 2\lambda\Theta;\end{aligned}$$

et, par conséquent, la valeur ci-dessus (134) de l'expression $\mathcal{S}$ sera simplement

$$\mathcal{S} = \Theta(b^2 + c^2) + 2\lambda\Theta, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathcal{S}}{\Theta} = b^2 + c^2 + 2\lambda.$$

D'autre part, comme l'on aperçoit de suite que l'on a également

$$\begin{aligned}\frac{f(\lambda)}{(a^2+\lambda)^2} - \frac{f'(\lambda)}{a^2+\lambda} &= -\frac{(a^2+\lambda)f'(\lambda) - f(\lambda)}{(a^2+\lambda)^2} = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{f(\lambda)}{a^2+\lambda}\right) \\ = -\frac{d}{d\lambda}\big[(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\big] &= -\frac{d}{d\lambda}\big[b^2c^2 + (b^2+c^2)\lambda + \lambda^2\big] = -(b^2+c^2+2\lambda),\end{aligned}$$

(*) Un procédé semblable nous a déjà réussi dans le Chapitre précédent, on s'en souvient, à propos d'une question toute pareille, mais plus compliquée encore que celle-ci (pp. 324-326).

il est donc démontré par là que l'expression proposée (133) de Δ est bien identiquement nulle, ainsi que nous voulions nous en assurer. Et il est clair qu'il en serait encore de même en prenant successivement pour k les deux autres valeurs $k=b^2$, et $k=c^2$, puisque les calculs correspondants se déduiraient de ceux que nous venons d'effectuer en permutant simplement les trois lettres a^2, b^2, c^2.

Il est donc ainsi prouvé qu'en attribuant, dans les expressions (126), à k successivement ces trois valeurs a^2, b^2, c^2, et la constante D restant d'ailleurs arbitraire, l'on aura ainsi à chaque fois une solution particulière distincte commune aux neuf équations (116) ou, ce qui est la même chose, aux trois systèmes linéaires et homogènes (118), (119) et (120), d'où l'on pourra conclure immédiatement, dès lors, une intégrale générale commune à ces trois systèmes, c'est-à-dire précisément celle du système d'équations différentielles totales (117) que nous nous proposions de trouver.

Toutefois, avant d'écrire cette intégrale générale ainsi formée, ce dernier système (117) n'étant lui-même en réalité qu'un intermédiaire dans la question, puisque les véritables équations du problème sont actuellement les équations (20) ou (5) du Chapitre III supposées transformées en λ, μ, ν, c'est-à-dire alors les six équations

$$(134^{\text{bis}})\left\{\begin{aligned}
&\Delta_1^2\lambda.\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2+\Delta_1^2\mu.\left(\frac{x}{\mu}\right)^2+\Delta_1^2\nu.\left(\frac{x}{\nu}\right)^2=1, &&\Delta_1^2\lambda.\frac{y}{\lambda}\frac{z}{\lambda}+\Delta_1^2\mu.\frac{y}{\mu}\frac{z}{\mu}+\Delta_1^2\nu.\frac{y}{\nu}\frac{z}{\nu}=0,\\
&\Delta_1^2\lambda\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2+\Delta_1^2\mu.\left(\frac{y}{\mu}\right)^2+\Delta_1^2\nu.\left(\frac{y}{\nu}\right)^2=1, &&\Delta_1^2\lambda.\frac{z}{\lambda}\frac{x}{\lambda}+\Delta_1^2\mu.\frac{z}{\mu}\frac{x}{\mu}+\Delta_1^2\nu.\frac{z}{\nu}\frac{x}{\nu}=0,\\
&\Delta_1^2\lambda.\left(\frac{z}{\lambda}\right)^2+\Delta_1^2\mu.\left(\frac{z}{\mu}\right)^2+\Delta_1^2\nu.\left(\frac{z}{\nu}\right)^2=1, &&\Delta_1^2\lambda.\frac{x}{\lambda}\frac{y}{\lambda}+\Delta_1^2\mu.\frac{x}{\mu}\frac{y}{\mu}+\Delta_1^2\nu.\frac{x}{\nu}\frac{y}{\nu}=0.
\end{aligned}\right.$$

il y a lieu de se demander maintenant, sans modifier ni restreindre en quoi que ce soit l'intégrale générale que nous venons d'indiquer, si les trois solutions particulières trouvées tout à l'heure, et que nous désignerons par (Λ_1, M_1, N_1), (Λ_2, M_2, N_2), (Λ_3, M_3, N_3), pourront, étant attribuées chacune à une coordon-

née rectiligne différente, et en disposant convenablement de la constante indéterminée D qui y figure, être considérées chacune comme une solution particulière du problème lui-même défini par les équations précédentes (134bis), ou, en d'autres termes, si l'on pourra faire en sorte qu'elles satisfassent, non pas seulement au système précité (117), mais encore aux six équations reproduisant ces mêmes équations (134bis) dans le mode de notation convenu, savoir

$$(135)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Delta_1^2\lambda . A_1^2 + \Delta_1^2\mu . M_1^2 + \Delta_1^2\nu . N_1^2 = 1, & \Delta_1^2\lambda . A_2A_3 + \Delta_1^2\mu . M_2M_3 + \Delta_1^2\nu . N_2N_3 = 0, \\ \Delta_1^2\lambda\ A_2^2 + \Delta_1^2\mu . M_2^2 + \Delta_1^2\nu . N_2^2 = 1, & \Delta_1^2\lambda . A_3A_1 + \Delta_1^2\mu . M_3M_1 + \Delta_1^2\nu . N_3N_1 = 0, \\ \Delta_1^2\lambda . A_3^2 + \Delta_1^2\mu . M_3^2 + \Delta_1^2\nu . N_3^2 = 1, & \Delta_1^2\lambda . A_1A_2 + \Delta_1^2\mu . M_1M_2 + \Delta_1^2\nu . N_1N_2 = 0, \end{array}\right.$$

parce que l'on conçoit que, si cette circonstance se réalise, l'interprétation des conditions qui nous restent encore à satisfaire relativement aux constantes devra être rendue par là plus claire et plus facile.

A cet effet, récrivant le type de solution trouvé ci-dessus (126) sous la forme abrégée

$$(135^{bis})\qquad A = D\frac{\sqrt{F(k)}}{k+\lambda}, \qquad M = D\frac{\sqrt{F(k)}}{k+\mu}, \qquad N = D\frac{\sqrt{F(k)}}{k+\nu},$$

en convenant de faire dans ce calcul, pour plus de commodité,

$$\begin{aligned} F(k) &= (k+\lambda)(k+\mu)(k+\nu) \\ &= k^3 + (\lambda+\mu+\nu)k^2 + (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)k + \lambda\mu\nu, \end{aligned}$$

puis attribuant à k, dans cette dernière formule (135bis), successivement les valeurs a^2, b^2, c^2, nous formerons ainsi les trois solutions particulières en question

$$(136)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_1 = D_1\dfrac{\sqrt{F(a^2)}}{a^2+\lambda}, & M_1 = D_1\dfrac{\sqrt{F(a^2)}}{a^2+\mu}, & N_1 = D_1\dfrac{\sqrt{F(a^2)}}{a^2+\nu}, \\ A_2 = D_2\dfrac{\sqrt{F(b^2)}}{b^2+\lambda}, & M_2 = D_2\dfrac{\sqrt{F(b^2)}}{b^2+\mu}, & N_2 = D_2\dfrac{\sqrt{F(b^2)}}{b^2+\nu}, \\ A_3 = D_3\dfrac{\sqrt{F(c^2)}}{c^2+\lambda}, & M_3 = D_3\dfrac{\sqrt{F(c^2)}}{c^2+\mu}, & N_3 = D_3\dfrac{\sqrt{F(c^2)}}{c^2+\nu}, \end{array}\right.$$

et alors, remettant ces valeurs tout d'abord dans le groupe de droite des équations précédentes (135), en même temps que celle des invariants $\Delta_1\lambda$, $\Delta_1\mu$, $\Delta_1\nu$ qui seront fournies par les expressions (75) dans lesquelles on aura écrit λ, μ, ν à la place de Φ, Ψ, Π, ce qui donnera pour leurs carrés les valeurs

$$(136^{\text{bis}})\quad \Delta_1^2\lambda = 4d^2.\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)},\quad \Delta_1^2\mu = 4d^2.\frac{f(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)},\quad \Delta_1^2\nu = 4d^2.\frac{f(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)},$$

en particulier, le premier membre de la première équation de ce groupe deviendra successivement

$$4d^2.D_2D_3F(b^2)F(c^2)\left[\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{1}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}+\frac{f(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\frac{1}{(b^2+\mu)(c^2+\mu)}\right.$$
$$\left.+\frac{f(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}\frac{1}{(b^2+\nu)(c^2+\nu)}\right]$$
$$=-\frac{4d^2.D_2D_3F(b^2)F(c^2)}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}\left[(\mu-\nu)(a^2+\lambda)+(\nu-\lambda)(a^2+\mu)+(\lambda-\mu)(a^2+\nu)\right]=0,$$

par où l'on voit déjà que le groupe de droite (135) est satisfait, quelles que soient les constantes D, par les solutions envisagées (136).

Quant au groupe de gauche, les trois équations qui le composent étant comprises sous le type unique

$$(137)\qquad \Delta_1^2\lambda.A^2+\Delta_1^2\mu.M^2+\Delta_1^2\nu.N^2=1,$$

il ne reste donc plus qu'à s'assurer si l'on pourra, pour chacune des trois solutions en question (136), disposer de la constante D, de manière à satisfaire à cette seule équation (137), laquelle, en faisant passer tous les termes dans le second membre, et multipliant ensuite par le produit $\frac{\Theta}{4d^2}=\frac{1}{4d^2}(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)$, pourra s'écrire alors, eu égard aux valeurs (136bis),

$$(138)\qquad (\mu-\nu)f(\lambda).A^2+(\nu-\lambda)f(\mu)\,M^2+(\lambda-\mu)f(\nu).N^2+\frac{\Theta}{4d^2}=0.$$

Or, si l'on reporte les valeurs (135bis) dans l'équation que nous venons d'écrire, en la divisant par $D^2F(k)$, elle deviendra

$$(139)\qquad (\mu-\nu)\frac{f(\lambda)}{(k+\lambda)^2}+(\nu-\lambda)\frac{f(\mu)}{(k+\mu)^2}+(\lambda-\mu)\frac{f(\nu)}{(k+\nu)^2}+\frac{1}{4D^2d^2}\frac{\Theta}{F(k)}=0.$$

Cela fait, si l'on décompose en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{1}{F(k)}$, les racines du dénominateur étant simples et égales respectivement à $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, la formule classique relative à ce cas donnera dans l'espèce

$$\frac{1}{F(k)}=\frac{1}{F'(-\lambda)}\frac{1}{k+\lambda}+\frac{1}{F'(-\mu)}\frac{1}{k+\mu}+\frac{1}{F'(-\nu)}\frac{1}{k+\nu}$$

$$=\frac{1}{(-\lambda+\mu)(-\lambda+\nu)}\frac{1}{k+\lambda}+\frac{1}{(-\mu+\nu)(-\mu+\lambda)}\frac{1}{k+\mu}+\frac{1}{(-\nu+\lambda)(-\nu+\mu)}\frac{1}{k+\nu},$$

d'où l'on conclura, par conséquent, en multipliant par Θ,

$$\frac{\Theta}{F(k)}=-\left[(\mu-\nu)\frac{1}{k+\lambda}+(\nu-\lambda)\frac{1}{k+\mu}+(\lambda-\mu)\frac{1}{k+\nu}\right],$$

et, par suite, en reportant cette même valeur dans l'équation envisagée (139), et rapprochant les termes semblables, celle-ci pourra s'écrire de nouveau

$$(140)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\mu-\nu)\left[\frac{f(\lambda)}{(k+\lambda)^2}-\frac{1}{4D^2d^2}\frac{1}{k+\lambda}\right]+(\nu-\lambda)\left[\frac{f(\mu)}{(k+\mu)^2}-\frac{1}{4D^2d^2}\frac{1}{k+\mu}\right]\\&\qquad+(\lambda-\mu)\left[\frac{f(\nu)}{(k+\nu)^2}-\frac{1}{4D^2d^2}\frac{1}{k+\nu}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, la constante k des expressions (126) ou (135bis) étant, par hypothèse, pour les solutions considérées (136), l'une des trois quantités a^2, b^2, c^2, l'on calculera très aisément les trois facteurs semblables entre crochets de cette équation (140), en

remarquant que, pour la première solution, par exemple, c'est-à-dire pour $k = a^2$, la simple division algébrique donnera, quel que soit ρ,

(141) $$\frac{f(\rho)}{(a^2+\rho)^2} = \frac{(b^2+\rho)(c^2+\rho)}{a^2+\rho} = \frac{\rho^2+(b^2+c^2)\rho+b^2c^2}{\rho+a^2} = \rho + S_1 + \frac{G_1}{\rho+a^2},$$

en désignant par S_1 et G_1 les deux constantes

(142) $$S_1 = b^2 + c^2 - a^2, \qquad G_1 = b^2c^2 - (b^2+c^2)a^2 + a^4 = (a^2-b^2)(a^2-c^2),$$

d'où l'on déduira, par suite,

$$\frac{f(\rho)}{(a^2+\rho)^2} - \frac{1}{4D^2d^2}\frac{1}{a^2+\rho} = \rho + S_1 + \left(G_1 - \frac{1}{4D^2d^2}\right)\frac{1}{a^2+\rho}.$$

Dès lors, on voit, en faisant successivement $\rho = \lambda, \mu, \nu$ dans cette dernière formule, et reportant à chaque fois la valeur obtenue dans l'équation (140), que, pour la première solution, elle se réduira alors simplement à

$$\left(G_1 - \frac{1}{4D^2d^2}\right)\left(\frac{\mu-\nu}{a^2+\lambda} + \frac{\nu-\lambda}{a^2+\mu} + \frac{\lambda-\mu}{a^2+\nu}\right) = 0,$$

et sera par conséquent satisfaite identiquement, à la condition que l'on prenne (*)

$$G_1 - \frac{1}{4D^2d^2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad D^2 = \frac{1}{4G_1d^2}, \qquad \text{et} \qquad D = \frac{G_1^{-\frac{1}{2}}}{2d};$$

(*) Cette condition, qui est manifestement suffisante, est en même temps nécessaire, attendu que le second facteur de cette équation ne peut être supposé nul, quelles que soient λ, μ, ν; car en le réduisant à un seul dénominateur, dont la valeur sera évidemment $F(a^2)$, F étant le symbole employé tout à l'heure, on trouvera successivement pour celle du numérateur

$$\begin{aligned}&(\mu-\nu).(a^2+\mu)(a^2+\nu)+(\nu-\lambda).(a^2+\nu)(a^2+\lambda)+(\lambda-\mu).(a^2+\lambda)(a^2+\mu)\\ &= (\mu-\nu).\{a^4+(\mu+\nu)a^2+\mu\nu\}+(\nu-\lambda).\{a^4+(\nu+\lambda)a^2+\nu\lambda\}\\ &\qquad +(\lambda-\mu).\{a^4+(\lambda-\mu).a^2+\lambda\mu\}\\ &= (\mu-\nu)\mu\nu+(\nu-\lambda)\nu\lambda+(\lambda-\mu)\lambda\mu\\ &= (\mu-\nu)\lambda^2+(\nu-\lambda)\mu^2+(\lambda-\mu)\nu^2 = -(\lambda-\mu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu).\end{aligned}$$

et l'on obtiendrait bien évidemment la valeur analogue de la constante D pour les deux autres solutions particulières en question, en permutant à deux reprises les trois constantes a^2, b^2, c^2.

Si donc nous convenons de poser à la fois, par analogie avec la valeur (142),

$$(145)\qquad G_1=(a^2-b^2)(a^2-c^2),\qquad G_2=(b^2-c^2)(b^2-a^2),\qquad G_3=(c^2-a^2)(c^2-b^2),$$

il résulte du calcul que nous venons d'effectuer que les trois systèmes de valeurs de A, M, N inscrits dans chacune des lignes du tableau suivant

$$(144)\left\{\begin{array}{lll}
A_1=\dfrac{G_1^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{a^2+\lambda}}, & M_1=\dfrac{G_1^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(a^2+\nu)(a^2+\lambda)}{a^2+\mu}}, & N_1=\dfrac{G_1^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{a^2+\nu}},\\
A_2=\dfrac{G_2^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{b^2+\lambda}}, & M_2=\dfrac{G_2^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(b^2+\nu)(b^2+\lambda)}{b^2+\mu}}, & N_2=\dfrac{G_2^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{b^2+\nu}},\\
A_3=\dfrac{G_3^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{c^2+\lambda}}, & M_3=\dfrac{G_3^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(c^2+\nu)(c^2+\lambda)}{c^2+\mu}}, & N_3=\dfrac{G_3^{-\frac{1}{2}}}{2d}\sqrt{\dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{c^2+\nu}},
\end{array}\right.$$

si on les attribue respectivement aux trois coordonnées différentes x, y, z, seront alors trois solutions particulières, non plus seulement du système intermédiaire aux différentielles totales (117), mais encore des équations réelles du problème, savoir celles (20) ou (5) du Chapitre III elles-mêmes (*).

Cette observation faite, si nous désignons par A_1, A_2, A_3 trois constantes arbitraires, il est clair, comme nous l'avons dit déjà,

---

(*) C'est cette double propriété qui assurera seule le succès du calcul qui nous reste encore à développer dans le paragraphe suivant, en vue de satisfaire à la seconde condition formulée dans l'exposé sommaire de notre méthode, et qui nous fournira comme résultat la signification géométrique des constantes arbitraires qui subsisteront définitivement dans la solution.

Nous présentons d'ailleurs un peu plus loin une seconde démonstration de cette proposition dans la note de la page 386 ci-après.

que l'intégrale générale commune aux neuf équations (116), c'est-à-dire celle du système (117) qui nous était demandée, pourra être représentée par les trois expressions :

$$(145)\qquad \Lambda = A_1\Lambda_1 + A_2\Lambda_2 + A_3\Lambda_3,\quad M = A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3,\quad N = A_1N_1 + A_2N_2 + A_3N_3.$$

Enfin, muni de ce résultat, on reconnaîtrait aisément, comme nous le ferons un peu plus loin, qu'avec ces valeurs de Λ, M, N l'expression de la différentielle (113) est bien, comme cela doit être, une différentielle exacte, ce qui montre, par conséquent, la possibilité d'obtenir désormais (en supposant la seconde condition relative aux constantes A également remplie) l'expression de chaque coordonnée rectiligne à l'aide de simples quadratures.

Détermination des constantes arbitraires surabondantes par la vérification a posteriori des équations du premier ordre proposées.— La possession de l'intégrale générale ci-dessus (145) ne suffit pas toutefois, ainsi que nous l'avons expliqué dans l'exposé général de notre méthode, pour procurer dores et déjà la certitude qu'il existe une solution du problème de la forme (145) dans le cas général envisagé (*), et, en admettant qu'il en soit ainsi, pour fournir, à l'aide de la seule opération que nous venons de dire, la solution complète et définitive de la question proposée. Il reste encore, en effet, pour cela, à satisfaire, avons-nous dit, à une condition supplémentaire qui fournira, si elle se trouve remplie, six relations entre les constantes arbitraires introduites par l'intégration du système d'équations différentielles totales que nous venons d'effectuer (page 344, 2°, ou encore pages 355 et 358).

(*) Rien ne prouve *a priori*, en effet, que les équations proposées (134 *bis*) [ou (5) du Chapitre III] soient compatibles, c'est-à-dire qu'il soit possible de trouver trois fonctions x, y, z, des variables λ, μ, ν, ou φ, ψ, ϖ, satisfaisant à la fois à ces six équations; et les raisonnements, ainsi que les calculs, développés jusqu'ici prouvent seulement la *nécessité* de la forme de solution (145), c'est-à-dire, en termes explicites, que, *s'il existe* réellement trois fonctions remplissant cette condition, elles seront toutes trois comprises dans le type (145), pour des valeurs convenables des constantes d'intégration A, et rien de plus.

D'ailleurs, on aperçoit de suite que la raison d'être de cette seconde condition correspond, dans le cas actuel, à la même circonstance qui a déjà plusieurs fois arrêté notre attention et exigé de nouveaux développements, à propos de différentes questions successivement envisagées dans le Chapitre précédent : à savoir, qu'en supposant qu'il existe une solution du problème, le système d'équations différentielles totales, qui nous a conduits à ces dernières expressions, ne représentant pas les équations du problème elles-mêmes, mais seulement des conséquences différentielles de celles-là, la solution précitée (145) se trouve de nouveau plus large que celle du problème proposé, ou, en d'autres termes, renferme en l'état un nombre de constantes arbitraires plus grand que celui qui convient en réalité à la question. Il y a donc lieu, comme à plusieurs reprises dans le Chapitre IV, de déterminer celles des constantes arbitraires qui se trouventainsi actuellement en excès, par la condition de satisfaire aux équations proposées elles-mêmes (134bis) ci-dessus [ou (5) du Chapitre III, transformées dans le système des variables indépendantes λ, μ, ν], ou à tout autre système complètement équivalent.

A cet effet, les équations en question étant prises de nouveau sous la forme (91), sous laquelle nous les avons déjà considérées au début de ce Chapitre, c'est-à-dire avec nos variables actuelles λ, μ, ν, sous celle-ci

$$(146)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{H})=\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{z}{\lambda}\right)^2, &&\frac{x}{\mu}\frac{x}{\nu}+\frac{y}{\mu}\frac{y}{\nu}+\frac{z}{\mu}\frac{z}{\nu}=0,\\ &(\mathrm{K})=\left(x\right)^2+\left(\frac{y}{\mu}\right)^2+\left(\frac{z}{\mu}\right)^2, &&\frac{x}{\nu}\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\nu}\frac{y}{\lambda}+\frac{z}{\nu}\frac{z}{\lambda}=0,\\ &(\mathrm{J})=\left(\frac{x}{\nu}\right)^2+\left(\frac{y}{\nu}\right)^2+\left(\frac{z}{\nu}\right)^2, &&\frac{x}{\lambda}\frac{x}{\mu}+\frac{y}{\lambda}\frac{y}{\mu}+\frac{z}{\lambda}\frac{z}{\mu}=0,\end{aligned}\right.$$

les symboles (H), (K), (J) désignant alors les inverses des expressions ci-dessus (136bis), c'est-à-dire les suivantes

$$(147)\quad (\mathrm{H})=\frac{1}{4d^2}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)},\quad (\mathrm{K})=\frac{1}{4d^2}\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{f(\mu)},\quad (\mathrm{J})=\frac{1}{4d^2}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{f(\nu)},$$

d'après le mode de notation convenu dans l'exposé sommaire de notre méthode, les trois solutions déduites successivement de la même formule (145) pour les trois coordonnées rectilignes devront, par conséquent, vérifier, quelles que soient λ, μ, ν, les six équations

$$(148)\quad \left\{\begin{array}{ll} A'^2 + A''^2 + A'''^2 = (H), & M'N' + M''N'' + M'''N''' = 0, \\ M'^2 + M''^2 + M'''^2 = (K), & N'A' + N''A'' + N'''A''' = 0, \\ N'^2 + N''^2 + N'''^2 = (J), & A'M' + A''M'' + A'''M''' = 0. \end{array}\right.$$

Pour exprimer cette dernière condition, déduisant tout d'abord du type synthétique (145) les trois solutions relatives à chaque coordonnée x, y, z,

$$(149)\left\{\begin{array}{lll} A' = A'_1 A_1 + A'_2 A_2 + A'_3 A_3, & M' = A'_1 M_1 + A'_2 M_2 + A'_3 M_3, & N' = A'_1 N_1 + A'_2 N_2 + A'_3 N_3, \\ A'' = A''_1 A_1 + A''_2 A_2 + A''_3 A_3, & M'' = A''_1 M_1 + A''_2 M_2 + A''_3 M_3, & N'' = A''_1 N_1 + A''_2 N_2 + A''_3 N_3, \\ A''' = A'''_1 A_1 + A'''_2 A_2 + A'''_3 A_3, & M''' = A'''_1 M_1 + A'''_2 M_2 + A'''_3 M_3, & N''' = A'''_1 N_1 + A'''_2 N_2 + A'''_3 N_3, \end{array}\right.$$

puis observant que dans chacun des deux groupes, soit de gauche, soit de droite, des équations en question (148), le premier membre de chaque équation est composé de trois termes analogues relatifs chacun à une coordonnée différente, nous remarquerons que les expressions générales (145) donneront, comme expression synthétique, pour les valeurs respectives des termes figurant dans les deux premières équations (148),

$$\left\{\begin{array}{l} A^2 = (A_1 A_1 + A_2 A_2 + A_3 A_3)^2 \\ \quad = A_1^2 . A_1^2 + A_2^2 . A_2^2 + A_3^2 . A_3^2 + 2 A_2 A_3 . A_2 A_3 + 2 A_3 A_1 . A_3 A_1 + 2 A_1 A_2 . A_1 A_2, \\ MN = (A_1 M_1 + A_2 M_2 + A_3 M_3)(A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3) \\ \quad = A_1^2 . M_1 N_1 + A_2^2 . M_2 N_2 + A_3^2 . M_3 N_3 \\ \qquad + A_2 A_3 . (M_2 N_3 + M_3 N_2) + A_3 A_1 . (M_3 N_1 + M_1 N_3) + A_1 A_2 . (M_1 N_2 + M_2 N_1); \end{array}\right.$$

et il n'y aura plus dès lors qu'à prendre ces dernières valeurs, successivement pour les trois coordonnées rectilignes, c'est-à-dire à les récrire trois fois avec une accentuation différente, et à faire

la somme des termes ainsi obtenus, pour composer de toutes pièces les premiers membres des deux équations de la première ligne du système (148), d'où l'on déduira ensuite évidemment, par la permutation des trois surfaces coordonnées, c'est-à-dire par la seule permutation des trois lettres A, M, N, sans toucher alors ni aux indices, ni aux accents, les équations des deux autres lignes du même système.

Effectuant donc l'opération que nous venons de dire pour les deux équations de la première ligne, en retranchant en même temps des deux membres de l'équation de gauche la somme $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, et des deux membres de celle de droite la somme $M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3$, dont nous calculerons tout à l'heure les valeurs, puis faisant alors, pour abréger les écritures,

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_1'^2 + A_1''^2 + A_1'''^2 - 1 = \mathcal{A}_1, & A_2'A_3' + A_2''A_3'' + A_2'''A_3''' = \mathfrak{A}_1, \\ A_2'^2 + A_2''^2 + A_2'''^2 - 1 = \mathcal{A}_2, & A_3'A_1' + A_3''A_1'' + A_3'''A_1''' = \mathfrak{A}_2, \\ A_3'^2 + A_3''^2 + A_3'''^2 - 1 = \mathcal{A}_3, & A_1'A_2' + A_1''A_2'' + A_1'''A_2''' = \mathfrak{A}_3, \end{array} \right.$$

nous obtiendrons ainsi, pour résultat de la substitution des valeurs (149) dans les deux premières équations (148),

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_1 . A_1^2 + \mathcal{A}_2 . A_2^2 + \mathcal{A}_3 \, A_3^2 + 2\mathfrak{A}_1 . A_2A_3 + 2\mathfrak{A}_2 . A_3A_1 + 2\mathfrak{A}_3 . A_1A_2 \\ \qquad = (H) - (A_1^2 + A_2^2 + A_3)^2, \\ \mathcal{A}_1 . M_1N_1 + \mathcal{A}_2 . M_2N_2 + \mathcal{A}_3 . M_3N_3 \\ \qquad + \mathfrak{A}_1 (M_2N_3 + M_3N_2) + \mathfrak{A}_2 (M_3N_1 + M_1N_3) + \mathfrak{A}_3 (M_1N_2 + M_2N_1) \\ \qquad = -(M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3). \end{array} \right.$$

Or, on aperçoit de suite que les seconds membres de ces deux dernières équations sont l'un et l'autre identiquement nuls ; car, ainsi que nous l'avons fait remarquer à la fin du paragraphe précédent, les trois solutions particulières fournies par le tableau (144) vérifient, d'après la manière dont elles ont été choisies, les six équations du problème elles-mêmes, équations que nous pourrons prendre de nouveau sous la forme déjà considérée tout à

l'heure (146), ce qui revient à dire que nous sommes assurés que l'on aura identiquement, les indices tenant alors lieu des accents dans les premiers membres des six équations (148) (*),

$$(152)\quad \begin{cases} A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = (H), & M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3 = 0, \\ M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = (K), & N_1A_1 + N_2A_2 + N_3A_3 = 0, \\ N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = (J), & A_1M_1 + A_2M_2 + A_3M_3 = 0. \end{cases}$$

(*) Bien que nous ayons déjà établi plus haut cette proposition, sous la forme équivalente des équations (135), voici encore comment on pourrait aussi bien démontrer directement l'existence des six relations (152).

L'identité établie ci-dessus par les formules (141) et (142), dans lesquelles on aura remplacé ρ, a^2, b^2, c^2 respectivement par k, λ, μ, ν, devenant alors celle-ci

$$(\alpha)\quad \frac{(k+\mu)(k+\nu)}{k+\lambda} = k+\Sigma_1+\frac{\Gamma_1}{k+\lambda}, \qquad \Sigma_1 = \mu+\nu-\lambda, \qquad \Gamma_1 = (\lambda-\mu)(\lambda-\nu),$$

si l'on fait attention, qu'en introduisant de nouveau la constante G définie par l'égalité (70), dont la valeur peut être écrite tout aussi bien

$$(\beta)\quad \begin{cases} G = (b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2) = -(b^2-c^2).(a^2-c^2)(a^2-b^2) = -(b^2-c^2)\{a^4-(b^2+c^2)a^2+b^2c^2\} \\ = -(b^2-c^2)a^4+(b^4-c^4)a^2-b^2c^2(b^2-c^2) = -[(b^2-c^2)a^4+(c^2-a^2)b^4+(a^2-b^2)c^4], \end{cases}$$

les valeurs des trois constantes (143) pourront être présentées également sous la forme

$$(\gamma)\quad G_1 = \frac{-G}{b^2-c^2}, \qquad G_2 = \frac{-G}{c^2-a^2}, \qquad G_3 = \frac{-G}{a^2-b^2},$$

on voit alors que les expressions (144) donneront, en simplifiant et réduisant au même dénominateur,

$$(\delta)\quad \begin{cases} A_1^2+A_2^2+A_3^2 = \frac{-1}{4Gd^2}\left[(b^2-c^2)\left(a^2+\Sigma_1+\frac{\Gamma_1}{a^2+\lambda}\right)+(c^2-a^2)\left(b^2+\Sigma_1+\frac{\Gamma_1}{b^2+\lambda}\right)\right. \\ \left. \qquad +(a^2-b^2)\left(c^2+\Sigma_1+\frac{\Gamma_1}{c^2+\lambda}\right)\right] = \frac{-1}{4Gd^2}\frac{\Gamma_1}{f(\lambda)}.\Omega, \end{cases}$$

Ω désignant, pour abréger, la quantité

$$\Omega = (b^2-c^2).(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)+(c^2-a^2).(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)+(a^2-b^2).(a^2+\lambda)(b^2+\lambda),$$

expression que l'on transformera successivement de la façon suivante

$$\Omega = (b^2-c^2)\{b^2c^2+(b^2+c^2)\lambda+\lambda^2\}+(c^2-a^2)\{c^2a^2+(c^2+a^2)\lambda+\lambda^2\}+(a^2-b^2)\{a^2b^2+(a^2+b^2)\lambda+\lambda^2\}$$
$$= (b^2-c^2)b^2c^2+(c^2-a^2)c^2a^2+(a^2-b^2)a^2b^2 = (b^2-c^2)a^4+(c^2-a^2)b^4+(a^2-b^2)c^4 = -G,$$

En conséquence, les deux équations obtenues tout à l'heure (151) fourniront, par la permutation des trois seules lettres A, M, N, ainsi que nous l'avons expliqué, les six relations, linéaires et homogènes par rapport aux six quantités constantes $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{M}$, qui devront être vérifiées identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les variables λ, μ, ν, savoir :

$$\left\{\begin{aligned}
&A_1^2\,\mathcal{A}_1 + A_2^2.\mathcal{A}_2 + A_3^2.\mathcal{A}_3 + 2A_2A_3.\mathfrak{M}_1 + 2A_3A_1.\mathfrak{M}_2 + 2A_1A_2.\mathfrak{M}_3 = 0,\\
&M_1^2.\mathcal{A}_1 + M_2^2\,\mathcal{A}_2 + M_3^2.\mathcal{A}_3 + 2M_2M_3.\mathfrak{M}_1 + 2M_3M_1.\mathfrak{M}_2 + 2M_1M_2.\mathfrak{M}_3 = 0,\\
&N_1^2\,\mathcal{A}_1 + N_2^2.\mathcal{A}_2 + N_3^2\,\mathcal{A}_3 + 2N_2N_3.\mathfrak{M}_1 + 2N_3N_1.\mathfrak{M}_2 + 2N_1N_2.\mathfrak{M}_3 = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&M_1N_1.\mathcal{A}_1 + M_2N_2.\mathcal{A}_2 + M_3N_3.\mathcal{A}_3\\
&\qquad + (M_2N_3 + M_3N_2).\mathfrak{M}_1 + (M_3N_1 + M_1N_3).\mathfrak{M}_2 + (M_1N_2 + M_2N_1).\mathfrak{M}_3 = 0,\\
&N_1A_1.\mathcal{A}_1 + N_2A_2.\mathcal{A}_2 + N_3A_3.\mathcal{A}_3\\
&\qquad + (N_2A_3 + N_3A_2).\mathfrak{M}_1 + (N_3A_1 + N_1A_3).\mathfrak{M}_2 + (N_1A_2 + N_2A_1).\mathfrak{M}_3 = 0,\\
&A_1M_1.\mathcal{A}_1 + A_2M_2.\mathcal{A}_2 + A_3M_3.\mathcal{A}_3\\
&\qquad + (A_2M_3 + A_3M_2).\mathfrak{M}_1 + (A_3M_1 + A_1M_3).\mathfrak{M}_2 + (A_1M_2 + A_2M_1).\mathfrak{M}_3 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Et, dès lors, il est manifeste que la vérification demandée sera réalisée à la condition de prendre à la fois

$$\mathcal{A}_1 = 0,\quad \mathcal{A}_2 = 0,\quad \mathcal{A}_3 = 0,\quad \mathfrak{M}_1 = 0,\quad \mathfrak{M}_2 = 0,\quad \mathfrak{M}_3 = 0,$$

---

eu égard à la dernière valeur (6) de G que nous venons d'indiquer; et alors la première somme en question, pour laquelle nous venons d'obtenir l'expression (δ), deviendra

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \frac{1}{4d^2}\,\frac{F_1}{f(\lambda)} = \frac{1}{4d^2}\,\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)} = (H),$$

en ayant égard successivement aux valeurs ci-dessus (α) et (148).

D'autre part, les mêmes valeurs (144) et (γ) donneront semblablement pour la seconde somme qui nous intéresse

$$M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3 = \frac{1}{4d^2}\left[\frac{1}{G_1}(a^2+\lambda) + \frac{1}{G_2}(b^2+\lambda) + \frac{1}{G_3}(c^2+\lambda)\right]$$

$$= \frac{-1}{4Gd^2}\left[(b^2-c^2)(a^2+\lambda) + (c^2-a^2)(b^2+\lambda) + (a^2-b^2)(c^2+\lambda)\right] = 0.$$

Et les deux premières des six relations en question (152) se trouvant ainsi démontrées, les quatre autres s'établiraient évidemment de même en permutant simplement les deux groupes (λ, μ, ν) et (A, M, N), sans toucher aux indices, ni à (a^2, b^2, c^2).

c'est-à-dire, en se reportant aux définitions (150) des mêmes quantités, d'établir entre les neuf constantes d'intégration A qui figurent dans l'intégrale générale (145), les six relations

$$(153)\quad \left\{ \begin{aligned} & A_1'^2 + A_1''^2 + A_1'''^2 = 1, && A_2'A_3' + A_2''A_3'' + A_2'''A_3''' = 0, \\ & A_2'^2 + A_2''^2 + A_2'''^2 = 1, && A_3'A_1' + A_3''A_1'' + A_3'''A_1''' = 0, \\ & A_3'^2 + A_3''^2 + A_3'''^2 = 1, && A_1'A_2' + A_1''A_2'' + A_1'''A_2''' = 0, \end{aligned} \right.$$

lesquelles montrent alors que ces mêmes constantes peuvent être interprétées comme les neuf cosinus d'un système d'axes rectangulaires, arbitrairement choisi par rapport aux axes actuels des coordonnées x, y, z.

Formation définitive de la solution. Définition géométrique des surfaces qui composeront le système orthogonal. — L'expression définitive des dérivées de u, que nous avons représentées par Λ, M, N, étant désormais acquise par les résultats qui précèdent, il est bien clair qu'il suffira maintenant, pour achever la solution du problème total, d'une simple quadrature effectuée à trois reprises différentes sur la différentielle (113), considérée successivement pour les trois coordonnées rectilignes ; ce qui se fera, d'après les notations dont nous sommes convenus et la forme (145) des expressions de Λ, M, N, en modifiant simplement à chaque fois l'accentuation des constantes d'intégration A qui figurent dans ces expressions. Effectuant donc ces quadratures, si pour en écrire plus aisément les résultats, nous convenons de poser en terminant

$$(154)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{G_1^{-\frac{1}{2}}}{d} \sqrt{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}, \\ Y &= \frac{G_2^{-\frac{1}{2}}}{d} \sqrt{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}, \\ Z &= \frac{G_3^{-\frac{1}{2}}}{d} \sqrt{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}, \end{aligned} \right.$$

comme, avec ces notations, les neuf expressions (144) pourront alors s'écrire sous, forme abrégée,

$$(154^{bis})\quad \left\{\begin{array}{lll} \Lambda_1=\frac{dX}{d\lambda}, & M_1=\frac{dX}{d\mu}, & N_1=\frac{dX}{d\nu}, \\ \Lambda_2=\frac{dY}{d\lambda}, & M_2=\frac{dY}{d\mu}, & N_2=\frac{dY}{d\nu}, \\ \Lambda_3=\frac{dZ}{d\lambda}, & M_3=\frac{dZ}{d\mu}, & N_3=\frac{dZ}{d\nu}, \end{array}\right.$$

nous obtiendrons, par conséquent, en tenant compte des valeurs (145), pour expression de la différentielle (113) de u,

$$\begin{aligned} du = \Lambda d\lambda + Md\mu + Nd\nu &= A_1(\Lambda_1 d\lambda + M_1 d\mu + N_1 d\nu) \\ &+ A_2(\Lambda_2 d\lambda + M_2 d\mu + N_2 d\nu) + A_3(\Lambda_3 d\lambda + M_3 d\mu + N_3 d\nu) \\ &= A_1 dX + A_2 dY + A_3 dZ, \end{aligned}$$

et par conséquent, en intégrant, pour celle de la coordonnée rectiligne u elle-même,

$$u = u_0 + A_1X + A_2Y + A_3Z;$$

résultat qui contient à lui seul, d'après notre mode de notation, les trois suivants, lesquels fournissent en dernière analyse, conjointement avec les égalités de définition (154) et les relations (153) entre les constantes, la solution du problème tout entier :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + A_1'X + A_2'Y + A_3'Z, \\ y = y_0 + A_1''X + A_2''Y + A_3''Z, \\ z = z_0 + A_1'''X + A_2'''Y + A_3'''Z. \end{array}\right.$$

Ces trois dernières équations n'exprimant plus, eu égard aux relations (153), qu'une simple transformation de coordonnées rectilignes, on peut donc dire que la solution complète et définitive du problème, envisagé sous son aspect le plus général, est

fournie essentiellement par les trois équations (154), dont le système pourra être présenté, soit sous la forme (154) elle-même, en y remplaçant seulement les constantes G_1, G_2, G_3, par leurs valeurs de définition (143), savoir

$$(155)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{1}{d}\frac{\sqrt{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\\ Y &= \frac{1}{d}\frac{\sqrt{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}}{\sqrt{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}},\\ Z &= \frac{1}{d}\frac{\sqrt{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}}{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}};\end{aligned}\right.$$

soit sous la forme équivalente obtenue en éliminant successivement entre elles, d'abord μ et ν, puis ν et λ, et enfin λ et μ, opérations qui mettront dès lors en évidence les équations de chacune des familles de surfaces qui composeront le système.

Pour obtenir la première de ces surfaces, par exemple, il suffira, après avoir élevé au carré les équations précédentes (155), de les diviser respectivement par les facteurs $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$, $c^2+\lambda$, ce qui, en introduisant de nouveau la valeur (70) de la constante G, et développant les seconds membres, les transformera dans les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{X^2}{a^2+\lambda} &= \frac{b^2-c^2}{-Gd^2}\left[a^4+(\mu+\nu)a^2+\mu\nu\right],\\ \frac{Y^2}{b^2+\lambda} &= \frac{c^2-a^2}{-Gd^2}\left[b^4+(\mu+\nu)b^2+\mu\nu\right],\\ \frac{Z^2}{c^2+\lambda} &= \frac{a^2-b^2}{-Gd^2}\left[c^4+(\mu+\nu)c^2+\mu\nu\right],\end{aligned}\right.$$

puis de les ajouter, en ayant égard à la dernière valeur (6) de G, indiquée dans la note de la page 386 précédente, ce qui donnera

la première des trois équations

$$(156)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{X^2}{a^2+\lambda}+\frac{Y^2}{b^2+\lambda}+\frac{Z^2}{c^2+\lambda}=\frac{1}{d^2},\\ &\frac{X^2}{a^2+\mu}+\frac{Y^2}{b^2+\mu}+\frac{Z^2}{c^2+\mu}=\frac{1}{d^2},\\ &\frac{X^2}{a^2+\nu}+\frac{Y^2}{b^2+\nu}+\frac{Z^2}{c^2+\nu}=\frac{1}{d^2},\end{aligned}\right.$$

les deux autres devant résulter évidemment d'un calcul tout semblable.

Chacune de ces équations étant du type (116) de notre Chapitre II, on voit que les trois familles de surfaces qui composent le système appartiennent toutes trois à la catégorie des surfaces homofocales du second ordre, qui représentent pour cet ordre, ainsi que nous l'avons vu, le type le plus général des familles isothermes, lequel ne comprend, en laissant de côté les cas limites, que des surfaces appartenant à l'une des trois variétés, ellipsoïde, ou hyperboloïde, à une ou à deux nappes. La nécessité que chacune des familles représentées par ces trois équations (156) soit effectivement distincte, ou, ce qui revient au même, que les trois surfaces se coupent en un point unique, impose la condition que chacune de ces trois surfaces appartienne à une variété différente. Si donc on convient, par exemple, d'appeler λ le paramètre des hyperboloïdes à deux nappes, μ celui des hyperboloïdes à une nappe, et ν celui des ellipsoïdes, et que l'on suppose les trois constantes a^2, b^2, c^2 classées par ordre de grandeur, conformément à l'usage, dans l'ordre suivant : $a^2 > b^2 > c^2$, il faudra, par suite, l'un au moins des termes de chaque premier membre devant être positif pour que la surface envisagée soit réelle, que l'on ait à la fois les trois inégalités

$$(157)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2+\lambda>0, \qquad b^2+\lambda<0, \qquad c^2+\lambda<0,\\ &a^2+\mu>0, \qquad b^2+\mu>0, \qquad c^2+\mu<0,\\ &a^2+\nu>0, \qquad b^2+\nu>0, \qquad c^2+\nu>0,\end{aligned}\right.$$

lesquelles entraînent comme conséquences celles-ci, qui fixent les limites entre lesquelles seront renfermées les variations de chaque coordonnée

$$(158) \qquad -a^2 < \lambda < -b^2 < \mu < -c^2 < \nu,$$

et qui sont dès lors, ainsi qu'on peut aisément le vérifier, nécessaires et suffisantes pour la réalité des expressions (155) de X, Y, Z, qui constituent au fond la solution que nous venons d'obtenir.

Ce sont exactement les conditions que Jacobi pose de prime abord pour la définition de son système des Coordonnées Elliptiques (*).

Ces inégalités nous apprennent en outre que ces mêmes expressions de X, Y, Z ne pourront s'annuler qu'en supposant que l'une des trois coordonnées λ, μ, ν atteigne l'une de ses limites, en sorte que les trois plans coordonnés XYZ pourront être considérés tous trois comme faisant partie du système orthogonal, chacun pour une valeur limite d'une ou deux coordonnées.

Le système (156) ou (155), auquel nous sommes parvenus définitivement, comme représentant la solution la plus générale du problème proposé, ne diffère donc du Système des Coordonnées Elliptiques de Jacobi et Lamé que par la présence, au second membre des équations (156), ou comme coefficient des expressions (155), de l'arbitraire d, dont l'introduction n'augmente en rien par le fait le degré de généralité des équations sous lesquelles les illustres Auteurs précités ont présenté ce même Système Ellipsoïdal; car si l'on commence par le supposer, avec Jacobi, égal à l'unité, il suffira évidemment d'y écrire simplement $\frac{a^2}{d^2}$, $\frac{b^2}{d^2}$, $\frac{c^2}{d^2}$, $\frac{\lambda}{d^2}$, $\frac{\mu}{d^2}$, $\frac{\nu}{d^2}$, à la place de a^2, b^2, c^2, λ, μ, ν, pour le faire ensuite réapparaître dans les mêmes équations, et

(*) VORLESUNGEN, 26e Leçon, page 198; ou si l'on préfère un texte français, voir LAURENT, *Traité de Mécanique Rationnelle*, Tome II, IVe Partie, Chap. II, XII (1re Édition, p. 121).

pour retrouver ainsi la même forme d'équations (156), telle qu'elle est ressortie en dernière analyse de nos calculs. Mais nous avons à peine besoin de faire observer que si nous pouvons actuellement, le problème étant complètement résolu, admettre cette simplification de pure forme, dont nous apercevons nettement l'indifférence quant au fond des résultats, nous n'eussions pu, dans le cours de la recherche, par exemple à la fin du Chapitre précédent, à l'occasion des expressions (75), attribuer arbitrairement à cette constante d la valeur particulière $d = 1$, sans risquer d'introduire du même coup dans la solution à intervenir une restriction essentielle, dont il ne nous eût pas été possible alors d'apprécier l'importance ni de mesurer l'étendue.

Examen critique du procédé qui conduit Lamé au même résultat. — Ayant ainsi encore une fois, dans ce Chapitre, résolu complètement, croyons-nous, et de la façon la plus générale, le problème que nous nous y étions posé, on nous permettra bien, sans doute, de nouveau, d'indiquer en quelques mots le procédé à l'aide duquel Lamé prétend établir cette même solution, aussi bien dans ses différents travaux reproduits par les *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes* (*) que dans son grand Mémoire (**) postérieur sur le même objet, afin que, par la comparaison des deux méthodes, le Lecteur puisse encore apprécier en connaissance de cause l'utilité et l'intérêt de celle que nous lui avons présentée dans ce Chapitre, ainsi que nous l'avons déjà fait pour la question résolue dans le Chapitre précédent.

La méthode adoptée en pratique par Lamé pour le même objet diffère de celle que nous venons de proposer par deux traits essentiels, qui, ayant pour effet, l'un d'étendre arbitrairement la question, et l'autre ensuite de la restreindre non moins arbitrairement, laisseraient en fin de compte une incertitude

(*) Coord. Curv., §§ LXIII-LXIX (pp. 111-121).

(**) Journal de mathématiques pures et appliquées (Liouville). Tome VIII. *Mémoire sur les Surfaces Orthogonales et Isothermes*, §§ XV-XVI (pp. 427-430).

absolue sur la validité même de la solution rencontrée (*) si cette solution ne faisait pas ultérieurement l'objet d'une vérification directe relativement aux équations du premier ordre primitivement données, qui sont seules, à proprement parler, les équations du problème. Mais cette vérification *a posteriori* n'étant pas opérée alors, comme nous l'avons fait à plusieurs reprises, tant dans ce Chapitre que dans le précédent, sur une forme de solution que l'on ait reconnu préalablement être la forme *nécessaire* de cette solution, n'établit dès lors cette validité que relativement à la forme envisagée spécialement, laquelle présente ainsi finalement toutes les apparences d'une solution très particulière.

Ces deux points sont les suivants :

1° Lamé, adoptant comme point de départ, ainsi que nous l'avons fait, les équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles doit satisfaire l'une quelconque des coordonnées rectilignes, n'en considère que *trois* seulement sur *six*, à savoir le premier groupe (97) (**), et néglige arbitrairement le second groupe (99), modification du problème proposé qui comporte évidemment une solution plus étendue que celle qui convient en réalité à la question.

2° Pour intégrer ce système de trois équations linéaires, Lamé emploie « le procédé général adopté en Physique Mathématique (***) » consistant « à composer la fonction intégrale d'une suite de termes simples, vérifiant tous et séparément les équations à intégrer; et quand il s'agit d'une fonction de point, chaque terme simple est le produit de quatre facteurs, le premier étant une constante arbitraire, les trois autres ne variant chacun

(*) Il est bien clair, en effet, qu'étant donné un champ quelconque Ω, si l'on commence par l'étendre arbitrairement, puis que l'on prenne ensuite dans la nouvelle aire une portion restreinte ω arbitrairement choisie, il est fort possible que cette aire ω n'appartienne pas en fin de compte au champ primitivement donné Ω.

(**) C'est-à-dire les équations (28) du § L des *Coord. Curv.* (p. 89), paragraphe qui porte comme rubrique « *Équations en* u », et dans lequel il n'est fait aucune mention, non plus que dans aucun autre antérieur ou subséquent, de notre second groupe (99).

(***) Depuis Daniel Bernouilli, qui l'imagina et le produisit le premier à l'occasion du problème des Cordes Vibrantes.

qu'avec l'une des coordonnées » (*). Et ayant ainsi obtenu, sous la forme d'une suite infinie de termes semblables, une intégrale générale commune aux trois équations du second ordre (159), Lamé prétend ensuite en déduire, à l'aide de considérations accessoires, la solution la plus générale de la question elle-même, sans s'être assuré, ou avoir fait en sorte, au préalable, que cette même somme vérifie bien également les véritables équations du problème, c'est-à-dire les équations du premier ordre non linéaires (134bis) ci-dessus.

Voici au reste, pour qu'il ne subsiste aucune incertitude dans l'esprit du Lecteur, ce que devient, traduit dans nos notations, le calcul très ingénieux et très élégant par lequel Lamé obtient la solution qu'il présente comme la plus générale, mais à laquelle ce même calcul est bien loin, si l'on y réfléchit un peu, d'imprimer précisément ce caractère.

Transformant ces trois équations (97), ainsi que nous l'avons fait à son exemple (pages 359-363), en prenant pour variables indépendantes, à la place des coordonnées thermométriques φ, ψ, ϖ, les trois fonctions $\lambda = \Phi(\varphi)$, $\mu = \Psi(\psi)$, $\nu = \Pi(\varpi)$, définies en fonction des précédentes par les égalités (112), et multipliant alors ces trois équations respectivement par les facteurs $\frac{\mu-\nu}{\mu'\nu'}$, $\frac{\nu-\lambda}{\nu'\lambda'}$, $\frac{\lambda-\mu}{\lambda'\mu'}$, Lamé les transforme ainsi dans les trois autres plus simples

$$(159)\quad \left\{\begin{aligned} &2(\mu-\nu)\frac{d^2u}{d\mu d\nu}+\frac{du}{d\mu}-\frac{du}{d\nu}=0,\\ &2(\nu-\lambda)\frac{d^2u}{d\nu d\lambda}+\frac{du}{d\nu}-\frac{du}{d\lambda}=0,\\ &2(\lambda-\mu)\frac{d^2u}{d\lambda d\mu}+\frac{du}{d\lambda}-\frac{du}{d\mu}=0,\end{aligned}\right.$$

qui, en tenant compte de la définition de nos quantités A, M, N, sont précisément celles de la dernière ligne de notre système (116).

(*) Coord. Curv., § LXIII (page 112, dernier alinéa de texte).

Cela fait, il se propose de les vérifier par une série de la forme

$$(160)\qquad u = \sum_i U_i = \sum_i \Lambda_i M_i N_i, \qquad (*)$$

Λ_i, M_i, N_i étant respectivement fonctions de la seule variable correspondante λ, μ, ν, et cela en assurant, par un choix convenable de ces fonctions, la vérification des équations proposées pour chaque terme de la série individuellement. La condition nécessaire et suffisante pour obtenir ce résultat, relativement au terme de rang i, consistera dès lors dans les trois équations suivantes, fournies immédiatement par la substitution de ce terme à la place de u dans les équations précédentes, et la suppression dans chacune d'un facteur, commun à tous les termes, qui sera respectivement Λ_i, ou M_i, ou N_i,

$$(161)\qquad \begin{cases} 2(\mu-\nu)\, M_i'N_i' + N_iM_i' - M_iN_i' = 0, \\ 2(\nu-\lambda)\, N_i'\Lambda_i' + \Lambda_iN_i' - N_i\Lambda_i' = 0, \\ 2(\lambda-\mu)\, \Lambda_i'M_i' + M_i\Lambda_i' - \Lambda_iM_i' = 0, \end{cases}$$

lesquelles, au point de vue purement algébrique, c'est-à-dire en regardant chacune des lettres qui y figurent comme représentant des quantités abstraites indépendantes, se réduisent manifestement à deux seulement, car il est visible que l'on obtiendra un résultat identiquement nul en les ajoutant après les avoir respectivement multipliées par Λ_i', M_i', N_i'. Mais si, d'autre part, les divisant respectivement par $M_i'N_i'$, $N_i'\Lambda_i'$, $\Lambda'M_i'$, on a égard, au contraire, à la signification concrète de ces mêmes lettres dans la question, on reconnaît sans peine alors qu'elles équivalent bien en fait aux trois équations distinctes suivantes

$$2\lambda - \frac{\Lambda_i}{\Lambda_i'} = 2\mu - \frac{M_i}{M_i'} = 2\nu - \frac{N_i}{N_i'} = 2g_i, \qquad (**)$$

(*) Lamé, à la vérité, écrit de plus en évidence, pour chaque terme de la série, un coefficient constant spécial G_i, mais cette addition est sans intérêt, chacune des fonctions Λ_i M_i, N_i devant introduire, comme on va le voir, un coefficient propre analogue, dont le produit dans chaque terme constituera précisément cette constante G_i de Lamé.

(**) Ce sont les équations (36) du § LXIII précité des Coord. Curv. (page 113).

g_i désignant une simple constante; car, lorsqu'on aura mis ces mêmes équations (161) sous la forme des deux premières que nous venons d'écrire, chacun des trois membres ne dépendant plus alors que d'une seule variable, différente pour chacun, il est bien clair que leur valeur commune ne saurait être qu'une constante.

Les trois fonctions cherchées Λ_i, M_i, N_i seront donc ainsi déterminées par les trois équations différentielles du premier ordre

$$(162) \qquad 2(\lambda - g_i)\Lambda_i' = \Lambda_i, \qquad 2(\mu - g_i)M_i' = M_i, \qquad 2(\nu - g_i)N_i' = N_i,$$

dont la première, par exemple, étant multipliée par Λ_i, donnera successivement

$$(\lambda - g_i)(\Lambda_i^2)' = \Lambda_i^2, \qquad \frac{(\lambda - g_i)(\Lambda_i^2)' - \Lambda_i^2}{(\lambda - g_i)^2} = 0,$$

et, en intégrant,

$$\frac{\Lambda_i^2}{\lambda - g_i} = A_i^2, \qquad \text{ou} \qquad \Lambda_i = A_i\sqrt{\lambda - g_i};$$

et, comme les deux autres équations (162) donneront évidemment de la même façon

$$M_i = B_i\sqrt{\mu - g_i}, \qquad N_i = C_i\sqrt{\nu - g_i},$$

il est clair, qu'en désignant alors par G_i la constante $G_i = A_iB_iC_i$, le terme simple de la série (160), remplissant la condition de vérifier individuellement les trois équations proposées (159), sera nécessairement de la forme

$$U_i = G_i\sqrt{(\lambda - g_i)(\mu - g_i)(\nu - g_i)}.$$

Partant donc de ce résultat, et spécifiant encore par des accents les valeurs des constantes propres à chaque coordonnée rectiligne en particulier, Lamé présente alors, comme solution la

plus générale du problème, le système des trois expressions sous forme de séries illimitées

(*)

$$(163)\quad \begin{cases} x = \sum_i G_i' \sqrt{(\lambda - g_i')(\mu - g_i')(\nu - g_i')}, \\ y = \sum_i G_i'' \sqrt{(\lambda - g_i'')(\mu - g_i'')(\nu - g_i'')}, \\ z = \sum_i G_i''' \sqrt{(\lambda - g_i''')(\mu - g_i''')(\nu - g_i''')}. \end{cases}$$

tout comme s'il s'agissait d'un phénomène vibratoire de Lumière, d'Acoustique, ou d'Élasticité.

Or, pour peu que l'on y regarde d'un peu plus près, on trouvera sans doute comme nous que, si l'on peut aisément admettre dans le cas des phénomènes physiques que nous venons de dire, ou plus généralement de tous ceux qui sont régis par la loi dite *des Petits Mouvements*, que la solution la plus générale puisse être atteinte de cette façon, parce que, dans cette catégorie de problèmes, *toutes* les équations, sans exception, sont linéaires et homogènes, par rapport aux inconnues et à leurs dérivées ; dans la question actuelle, au contraire, non seulement il n'est pas certain *a priori*, mais il n'est même pas présumable, jusqu'à preuve du contraire, que la solution la plus générale puisse être obtenue par un semblable procédé, attendu que les équations linéaires (159), dont se préoccupe exclusivement Lamé, ne sont alors que des équations subsidiaires en quelque sorte, et que les véritables équations du problème sont ici les équations du premier ordre (134bis), qui, n'étant plus linéaires comme les précédentes, n'admettent pas dès lors le même mode général de solution, équations auxquelles d'ailleurs les expressions (163) n'ont pas été *a posteriori* astreintes à satisfaire.

Lors donc, qu'ayant admis indûment de prime abord pour la solution la plus générale la forme (160) ou (163), Lamé établit ensuite immédiatement après, par une ingénieuse interprétation des trois facteurs variables qui composent le terme général de

(*) Ce sont les équations du type (37) (*ibid.*, page 113, au bas) de Lamé.

chaque série, que les trois constantes g'_i, g''_i, g'''_i ne pourront avoir dans chaque série qu'une seule et même valeur dans tous les termes, ce qui réduit dès lors chaque série séparément à *un seul terme variable* multiplié par le facteur constant $\sum_i G_i = G$, et impose ainsi à la solution, au lieu de la forme complexe et purement théorique (163) (*), la forme simple et éminemment pratique

$$(164) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = G' \sqrt{(\lambda - g')(\mu - g')(\nu - g')}, \\ y = G'' \sqrt{(\lambda - g'')(\mu - g'')(\nu - g'')}, \\ z = G''' \sqrt{(\lambda - g''')(\mu - g''')(\nu - g''')}, \end{array} \right.$$

qui est celle du système des Coordonnées Elliptiques, il ne fait ainsi en réalité qu'arriver par une voie fort détournée (**) à une conclusion que semblait imposer *a priori* la nature *non linéaire* des équations du problème ; mais il est bien évident que cette heureuse simplification de la forme primitive (163) ou (160), nécessaire et suffisante pour en déduire une solution, ne saurait conférer au résultat final du calcul un caractère de généralité qui n'appartenait pas à la forme originaire dont il aura été tiré ; et dès lors aucune raison valable, à notre avis, dans la théorie de Lamé que nous venons de retracer, n'autorise à penser que la belle et précieuse conception du Système Ellipsoïdal, à laquelle il est ainsi conduit, représente à elle seule toute la solution du problème proposé, envisagé sous son aspect le plus général.

(*) Les équations (163), en effet, au cas où l'on eût pu compter avec raison (ce qui n'est pas vrai selon nous) obtenir la solution la plus générale sous cette forme, n'eussent constitué en réalité qu'une réponse illusoire à la question, n'apprenant rien de ce que l'on a le plus d'intérêt à connaître, à savoir les équations exactes des trois familles qui composeront le système, car il est clair qu'elles ne se prêteraient pas à l'élimination successive de deux des coordonnées λ, μ, ν, qui seule pourra fournir les équations des familles de surfaces en question.

(**) Nous ne croyons pas utile de relater semblablement ici la série de ces déductions, basées sur la considération des courbures principales du système, c'est-à-dire sur nos formules (12) du Chap. III, et qui font l'objet des §§ LXI, LXII et LXIV (pp. 109-111 et 114), parce qu'elles n'intéressent en rien le fond de la critique que nous venons de formuler à l'égard de la démonstration de Lamé.

Quelle que soit donc la gloire légitimement acquise à l'inventeur pour une aussi remarquable découverte (*), l'exposé très loyal que nous venons de faire de la méthode d'investigation de Lamé et de son procédé de démonstration, aura convaincu sans peine le Lecteur que sa théorie sur cet important sujet ne pouvait être acceptée comme définitive, et qu'au point de vue de l'Enseignement tout au moins, il était indispensable de la reprendre en entier, pour en assurer solidement tous les détails, tout en respectant scrupuleusement l'idée générale, les grandes lignes de la méthode, et la position originaire de la question, telles qu'on les trouve formulées dans la lumineuse esquisse de l'illustre Auteur. C'est pourquoi nous espérons que l'on voudra bien nous pardonner, en faveur de la complète rigueur et de l'absolue certitude des résultats, la longueur, parfois assez laborieuse, des considérations et des calculs développés dans cet Ouvrage, longueur et peine que l'on sera peut-être moins tenté de regretter, si l'on songe encore une fois à l'importance, aussi bien au point de vue théorique que pratique, pour toutes les branches d'application de l'Analyse, de ce problème du système orthogonal triplement isotherme, ainsi que nous l'avons déjà fait ressortir dans l'Introduction et le premier Chapitre de ce travail.

(*) Il paraît certain, en effet, que JACOBI et LAMÉ ont en réalité découvert, chacun de leur côté, et sans avoir connaissance du travail de l'autre sur ce sujet, ce Système Ellipsoïdal ou des Coordonnées Elliptiques. Car d'une part JACOBI, dans la vingt-septième des *Vorlesungen* (pp. 208-209), reproche en termes assez aigres à CHASLES de n'avoir point, dans l'*Aperçu Historique*, fait mention de sa *priorité* relativement aux propriétés des surfaces homofocales du second ordre (ohne meine *Priorität* zu erwähnen), et à la fin de l'alinéa suivant n'attribue à LAMÉ qu'une *intéressante application* de cette théorie à la Physique Mathématique.

D'autre part, LAMÉ, dans les *Leçons sur les Coord. Curv.*, s'attribue formellement et à deux reprises la même découverte, car il dit, dans le Discours Préliminaire (p. XVII, avant-dernier alinéa) : « J'exposerai la méthode qui *m'a réellement conduit* aux coordonnées elliptiques », et répète la même affirmation dans les mêmes termes, au § LXVIII (page 120, dernier alinéa). Pour quiconque a eu l'honneur, comme nous, d'approcher l'illustre Géomètre, et de connaître la loyauté, confinant à la candeur, de cette belle figure de savant, une déclaration aussi catégorique ne saurait faire l'objet d'un doute, et crée l'obligation en toute justice de lui faire partager avec JACOBI la gloire de l'invention si féconde du Système des Coordonnées Elliptiques.

CHAPITRE VI.

Formules nouvelles pour l'emploi des Coordonnées Thermométriques. — Exemples d'application pour le calcul des intégrales triples, et vérification des résultats ainsi obtenus à l'aide de déterminations connues en Mécanique.

Caractère spécial et but de ce dernier chapitre. Avantage des coordonnées thermométriques par rapport aux coordonnées elliptiques. — Les théories et les calculs, développés jusqu'ici dans cet Ouvrage, ne visaient pas comme but, ainsi qu'on l'a vu, la production d'aucun résultat formel, dont la possession ne fût déjà depuis longtemps acquise à la Science, mais simplement la consolidation, à l'aide de méthodes plus sûres, et conformes désormais aux exigences rigoureuses et aux procédés habituels de l'Enseignement actuel, des importants résultats formulés il y a un demi-siècle par Lamé, à l'aide de calculs dont la complication et l'extrême aridité (*) n'offrent à l'esprit du Lecteur, il faut bien le dire, ni une certitude entière, ni une satisfaction suffisante pour le récompenser de sa fatigue.

Il n'en sera pas de même de ce dernier Chapitre, dans lequel nous nous proposons, au contraire, en guise de couronnement de cette longue et laborieuse Étude, d'apporter à l'un des principaux résultats de Lamé, une forme nouvelle qu'il lui eût très probablement donnée, s'il avait trouvé l'Analyse des fonctions dans l'état d'avancement où elle est parvenue aujourd'hui, et d'où résulteront, pour ses formules ainsi transformées, un rôle pratique et un champ d'application qui étaient certainement, dans

(*) « La dimostrazione che ha dato di questo teorema il suo scriptore (Lamé) è molto « complicata, ... » dit Betti au début du travail, mentionné dans notre Introduction, sur le même sujet. (*Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme e ortogonali.* Annali di Matematica pura ed applicata. Serie II^a, Tomo VIII°, pp. 138-145.)

sa pensée, le but définitif de ses efforts, mais qui malheureusement n'appartiennent à aucun degré aux formules de l'illustre Auteur, en l'état dans lequel il nous les a laissées.

Voici sur quelles considérations nous baserons le complément que nous nous proposons d'apporter ainsi à l'œuvre admirable de Lamé.

Les Coordonnées Thermométriques auxquelles Lamé parvient comme conclusion de ses belles recherches, que nous avons reprises en entier par d'autres procédés dans cet Ouvrage, bien qu'elles soient issues, au point de vue géométrique, de la considération du même système orthogonal que les Coordonnées Elliptiques, offrent sur celui-ci l'avantage précieux de n'admettre en chaque point de l'espace qu'une détermination unique sans aucune ambiguïté, tout comme le Système Cartésien habituel x, y, z, ce qui exclut, avec leur emploi, toute incertitude dans l'interprétation des résultats, quelle que soit la question traitée, tandis que, eu égard à l'ambiguïté de signe inhérente à la présence des radicaux dans l'expression de chacune des Coordonnées Elliptiques, cette incertitude ne sera évitée, si on les emploie en l'état, que pour les questions qui comporteront *a priori* une symétrie complète par rapport à chacun des trois plans coordonnés.

Mais cette supériorité sur ce point étant reconnue, il faut bien avouer, d'autre part, que ces Coordonnées Thermométriques, telles qu'elles sont présentées dans les ouvrages de Lamé, offrent une infériorité notable relativement au système des Coordonnées Elliptiques de Jacobi, en ce que les formules par lesquelles il les définit ne réalisent en aucune façon la symétrie remarquable de celles de son illustre devancier (*), symétrie qui, en permettant les permutations circulaires, les rend si précieuses pour toutes les recherches dont on est assuré *a priori* que le résultat ne dépend en aucune façon, quant à la forme, de la position des plans coordonnés.

(*) Il suffit pour s'en convaincre de jeter un coup d'œil sur les diverses formules des pp. 122-123 des *Leçons sur les Fonctions Inverses*, ou 109 et 117-120 des *Leçons sur les Coordonn. Curv.*, dans lesquelles LAMÉ résume les principaux éléments de sa théorie.

De plus, les formules en question de Lamé, fournissant l'expression en x, y, z des nouvelles coordonnées, non plus à l'aide de fonctions algébriques, comme pour les Coordonnées Elliptiques, mais au moyen de fonctions transcendantes, présentent le grand inconvénient de ne pas offrir comme éléments analytiques, pour l'expression desdites transcendantes, des types connus que l'on puisse faire entrer dans les calculs, et dont on puisse ensuite apprécier les résultats, à l'aide de formules et de théories courantes, mais seulement des types *voisins* de semblables fonctions, dont la théorie reste à faire, et dont l'introduction, parallèlement avec les types classiques (au cas où cette théorie viendrait à être faite) constituant alors, en réalité, non pas une acquisition nouvelle, mais un double emploi, viendrait encombrer, sans profit aucun, les abords déjà suffisamment ardus de cette branche de l'Analyse.

Or, il nous a semblé qu'il était possible, en modifiant convenablement les formules précitées de Lamé à l'aide des résultats déjà acquis par nous dans le cours de cette Étude, de conserver à sa belle invention des Coordonnées Thermométriques, dont il a montré toute la fécondité en résolvant le premier, par leur moyen, le difficile problème de l'Équilibre de Température de l'Ellipsoïde, de conserver à ces coordonnées, disons-nous, le sérieux avantage que nous avons signalé en premier lieu, tout en les débarrassant des deux causes d'infériorité que nous avons dû leur reconnaître ensuite.

Tels seront provisoirement le but et l'objet de ce dernier Chapitre, dans lequel, après avoir donné pour l'emploi de ces mêmes coordonnées des formules nouvelles satisfaisant aux trois *desiderata* que nous venons de dire, nous en ferons ressortir, sur quelques exemples d'un intérêt incontestable, l'avantage très grand, aussi bien par rapport aux Coordonnées analogues de Lamé que relativement aux Coordonnées Elliptiques de Jacobi elles-mêmes.

Formules nouvelles de transformation en coordonnées thermométriques. — Il nous faut donc revenir à nos coordonnées primitives φ, ψ, ϖ (ou à toutes autres fonctions linéaires de celles-là), qui étaient par définition (p. 27) des coordonnées thermométriques, et que nous avions abandonnées pour les Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν, lorsque nous nous sommes trouvés en face du problème d'intégration traité et résolu dans le Chapitre précédent, uniquement pour éviter les difficultés de calcul inhérentes spécialement à la présence des fonctions elliptiques.

Pour cela, nous souvenant que ces coordonnées λ, μ, ν n'étaient autre chose, par définition, lorsque nous les avons ainsi introduites dans nos calculs, que les trois fonctions $\Phi(\varphi)$, $\Psi(\psi)$, $\Pi(\varpi)$ (pages 362-363), il suffira donc de nous reporter aux résultats finaux de notre Chapitre IV dans lequel nous les avons déterminées, savoir nos formules (66), (67), et (75), que nous allons récrire ici pour plus de clarté, en tenant compte de la définition que nous venons de rappeler, et prenant encore pour variables auxiliaires comme au début du Chapitre précédent (page 336, *au bas*) les fonctions linéaires de φ, ψ, ϖ,

$$(1) \qquad u = g\varphi + h, \qquad v = g'\psi + h', \qquad w = g''\varpi + h'',$$

et conservant nos notations habituelles

$$(2) \qquad l^2 = a^2 - b^2, \qquad m^2 = b^2 - c^2, \qquad n^2 = c^2 - a^2,$$

sous la forme abrégée (*)

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda = -a^2 \operatorname{cn}^2 u - b^2 \operatorname{sn}^2 u, & g = \dfrac{1}{lm}\sqrt{\dfrac{s}{\alpha}}, & k^2 = -\dfrac{l^2}{n^2}, \\ \mu = -b^2 \operatorname{cn}^2 v - c^2 \operatorname{sn}^2 v, & g' = \dfrac{1}{mn}\sqrt{\dfrac{s}{6}}, & k'^2 = -\dfrac{m^2}{l^2}, \\ \nu = -c^2 \operatorname{cn}^2 w - a^2 \operatorname{sn}^2 w, & g'' = \dfrac{1}{nl}\sqrt{\dfrac{s}{\gamma}}, & k''^2 = -\dfrac{n^2}{m^2}, \end{cases}$$

(*) Si l'on tient compte du changement linéaire des variables φ, ψ, ϖ admis au début

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta_1\lambda = 2d.\sqrt{\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}, \qquad \Delta_1\mu = 2d.\sqrt{\dfrac{f(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}}, \\ \qquad\qquad\qquad \Delta_1\nu = 2d.\sqrt{\dfrac{f(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}, \end{cases}$$

formules qui supposent dès lors entre les constantes l^2, m^2, n^2 d'une part, et k^2, k'^2, k''^2 d'autre part, les deux relations :

$$(5) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 0, \qquad k^2k'^2k''^2 = -1.$$

Toutefois, les formules qui précèdent définissant seulement les carrés des quantités l, m, n, k, k', k'', il est nécessaire, avant tout calcul, de convenir expressément du sens que nous attribuerons à ces symboles eux-mêmes, tant dans les formules que nous venons d'écrire que dans celles que nous poserons successivement dans tout le cours de cette théorie. Voici donc la définition précise que nous adopterons pour ces quantités.

Afin de pouvoir appliquer sans incertitude les différentes formules de la théorie des fonctions elliptiques, empruntées pour la plupart aux *Fundamenta* de Jacobi, nous supposerons, conformément à l'hypothèse admise pour ces formules, que les trois modules k, k', k'' sont des quantités positives, ou, en d'autres termes, ces symboles représenteront pour nous les racines *positives* des trois quantités de droite (3); d'où il suit que la relation de droite (5) donnera, entre ces modules eux-mêmes, cette autre relation, qui peut être écrite sous quatre formes différentes, savoir

$$(6) \qquad kk'k'' = i, \qquad k'k'' = \frac{i}{k}, \qquad k''k = \frac{i}{k'}, \qquad kk' = \frac{i}{k''},$$

à l'exclusion du signe contraire pour les seconds membres. Et de

---

du Chap. V (pp. 336-339), ces formules reproduisent alors simplement les formules (112), (79), et (136*bis*) de ce même Chapitre.

même, par analogie, les symboles *l*, *m*, *n* représenteront pour nous, par définition, les racines *positives* des trois quantités (2), c'est-à-dire que nous poserons (en rompant pour un instant, et *en apparence* seulement [*], la symétrie constante de nos formules, en vue de mettre la quantité imaginaire *n* sous la forme $x + iy$ par laquelle on définit ces quantités)

$$(7) \qquad l = +\sqrt{a^2 - b^2}, \qquad m = +\sqrt{b^2 - c^2}, \qquad n = +i\sqrt{a^2 - c^2}.$$

Ces définitions préliminaires, indispensables, comme on le verra, à l'intelligence des raisonnements et au succès des calculs qui vont suivre, étant désormais expressément admises, un calcul déjà présenté à deux reprises dans les Chapitres II et IV (pages 115 et 309, en *note*) nous donnera, en partant des formules précédentes (2) et (3), la première ligne du tableau suivant

$$(8) \quad \begin{cases} a^2 + \lambda = l^2 \operatorname{sn}^2 u, & b^2 + \lambda = (il)^2 \operatorname{cn}^2 u, & c^2 + \lambda = n^2 \operatorname{dn}^2 u, \\ b^2 + \mu = m^2 \operatorname{sn}^2 v, & c^2 + \mu = (im)^2 \operatorname{cn}^2 v, & a^2 + \mu = l^2 \operatorname{dn}^2 v, \\ c^2 + \nu = n^2 \operatorname{sn}^2 w, & a^2 + \nu = (in)^2 \operatorname{cn}^2 w, & b^2 + \nu = m^2 \operatorname{dn}^2 w, \end{cases}$$

les deux autres lignes se déduisant évidemment de la première par simple permutation circulaire, du moment que toutes les formules (2) et (3), d'où celles-ci sont tirées exclusivement, obéissent à cette même loi; c'est-à-dire qu'il faut entendre pour ce premier groupe de formules (8), de même que pour toutes celles que nous en déduirons par la suite, que les modules sont toujours : k pour les fonctions elliptiques relatives à la coordonnée u, k' pour celles relatives à v, et enfin k'' pour celles relatives à w.

(*) Il est bien clair, en effet, qu'il suffira de faire passer le facteur i sous le radical, pour que la troisième des expressions suivantes (7) rentre dans le même cycle de permutation circulaire que les deux premières.

En nous reportant dès lors aux formules (155) que nous avons obtenues à la fin du Chapitre précédent comme solution définitive du problème, et qui deviendront, en y faisant pour plus de simplicité $d = 1$, les élevant au carré, et rétablissant les lettres habituelles x, y, z, à la place de X, Y, Z, pour désigner les coordonnées rectilignes,

$$(9) \quad x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad y^2 = \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \quad z^2 = \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

si nous y remettons alors les valeurs ci-dessus (2) et (8), la première de ces équations se transformera dans la suivante

$$(9^{\text{bis}}) \qquad x^2 = \frac{l^2 \operatorname{sn}^2 u \,.\, l^2 \operatorname{dn}^2 v \,.\, (in)^2 \operatorname{cn}^2 w}{l^2 \,.\, (in)^2} = l^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v \operatorname{cn}^2 w,$$

et par conséquent, en extrayant les racines, nous aurons à la fois, grâce à la loi de permutation, constamment manifestée par toutes les formules de notre théorie, les trois expressions

$$(10) \qquad x = l \operatorname{sn} u \operatorname{dn} v \operatorname{cn} w, \qquad y = m \operatorname{sn} v \operatorname{dn} w \operatorname{cn} u, \qquad z = n \operatorname{sn} w \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v,$$

avec la convention rappelée tout à l'heure relativement aux modules, c'est-à-dire sous forme explicite, les trois formules de transformation en coordonnées φ, ψ, ϖ,

$$(11) \qquad \begin{cases} x = l \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(v, k') \operatorname{cn}(w, k''), \\ y = m \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{dn}(w, k'') \operatorname{cn}(u, k), \\ z = n \operatorname{sn}(w, k'') \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{cn}(v, k'), \end{cases}$$

u, v, w désignant, pour abréger, les fonctions linéaires (1), et g, g', g'', k, k', k'' les constantes (3).

Il est inutile d'écrire un double signe devant chaque second

membre de ces deux groupes d'égalités (10) et (11), parce que, dans chaque groupe, chacune de ces expressions contenant un seul facteur impair, dépendant d'une coordonnée différente pour chacune, les deux valeurs égales et de signes contraires seront atteintes, pour les trois expressions, quel que soit le signe qu'on leur attribue explicitement, en faisant varier à la fois les trois fonctions u, v, w dans les deux sens, à partir de zéro.

Ce résultat acquis, il est évident que si l'on prenait simplement ces mêmes fonctions u, v, w, pour coordonnées thermométriques à la place de φ, ψ, ϖ, les trois dernières formules que nous venons d'obtenir répondraient bien, quant à la forme, aux trois *desiderata* articulés par nous dans le paragraphe précédent. Toutefois, si l'on se reporte aux relations (5), une objection grave se présente aussitôt à l'esprit, qui semble mettre en question la possibilité pratique de leur emploi, et réclame impérieusement, avant d'aller plus loin, un supplément d'explication.

En effet, quelle que soit l'hypothèse que l'on admette sur le classement par ordre de grandeur des trois constantes données a^2, b^2, c^2, de ces deux relations (5), celle de gauche fait voir clairement que les trois coefficients l, m, n des expressions (11) ne pourront être réels tous à la fois, et celle de droite montre également que les trois modules k, k', k'' ne pourront pas l'être davantage. L'on n'est donc nullement assuré *a priori* qu'à des valeurs réelles des nouvelles coordonnées u, v, w, correspondent d'après ces formules des valeurs réelles à la fois pour les trois coordonnées x, y, z, ce qui semble bien pourtant, jusqu'à plus ample explication, être la condition *sine qua non* de leur emploi pour toute question d'ordre réel, c'est-à-dire telles que celles de la Mécanique ou de la Physique Mathématique, ou même encore un très grand nombre de celles de la Géométrie, qui n'envisagent que des quantités exclusivement réelles.

Voici comment nous résoudrons cette grave difficulté, en nous servant pour cela des indéterminées α, β, γ, et s, qui entrent dans

les valeurs (5) des coefficients g, g', g'', dont l'intérêt avait pu être mis en doute jusqu'ici parce qu'ils ne sont intervenus en rien dans la recherche qui a fait l'objet du Chapitre précédent (*).

Admettant toujours, conformément à l'usage, l'hypothèse $a^2 > b^2 > c^2$, qui donne $l^2 > 0$, $m^2 > 0$, $n^2 < 0$, et conservant provisoirement pour coordonnées les variables φ, ψ, ϖ elles-mêmes, nous prendrons, dans les expressions en question, les deux coefficients α et γ de même signe que s, et le troisième β de signe contraire, en sorte que nous aurons alors $\frac{s}{\alpha} > 0$, $\frac{s}{\beta} < 0$, $\frac{s}{\gamma} > 0$. En ayant égard à la valeur (7) de n, l'on voit donc que les deux premiers coefficients g et g' (5) seront réels et le troisième g'' purement imaginaire. En outre, nous supposerons de même

(*) En se plaçant à un point de vue plus général, la solution du problème de calcul intégral traité dans ce Chapitre, qui constitue en même temps la solution définitive de la question tout entière du Système triplement Isotherme, ayant été obtenue, l'on s'en souvient, en prenant pour variables indépendantes les trois fonctions, Φ, Ψ, Π, le Lecteur a pu parfaitement se demander, en effet, à raison de ce changement de variables, de quel intérêt était dès lors, pour la solution définitive du problème, la connaissance de l'expression exacte de ces variables en fonction des coordonnées primitives φ, ψ, ϖ, et par conséquent aussi pourquoi nous n'avions pas limité notre Chap. IV à l'acquisition seule des expressions des inconnues P, Q, R en Φ, Ψ, Π, c'est-à-dire des formules (19) de ce même Chapitre, puisque ce sont ces variables seules qui devaient intervenir dans la recherche postérieure relative à la détermination des familles de surfaces qui constituent le Système Orthogonal.

Nous pourrions répondre à cette objection très sérieuse, qu'en théorie générale tout d'abord, rien ne garantissant *a priori* l'existence d'une solution pour le problème spécial qui fait l'objet de ce Chap. IV, cette certitude, fondamentale pour la question elle-même, ne pouvait être acquise dès lors que par le succès entier de la recherche relative à ce problème, c'est-à-dire par la possession des valeurs de ces inconnues P, Q, R en φ, ψ, ϖ, et nullement par celle des expressions de ces mêmes inconnues à l'aide de quantités auxiliaires Φ, Ψ, Π, dont l'existence n'était pas assurée non plus, tant qu'on ne les avait pas déterminées elles-mêmes en φ, ψ, ϖ.

Mais si l'on envisage ces derniers résultats dont nous venons de parler, l'on reconnaîtra, en premier lieu, que c'est précisément la forme même de ces résultats qui nous a conduit tout naturellement à la définition du système des Coordonnées Thermométriques auxquelles nous venons d'arriver; et, en second lieu, que c'est la présence dans ces résultats des constantes arbitraires α, β, γ, et s, dont nous avons eu soin de faire ressortir l'existence, qui va seule nous permettre de lever la difficulté très grave relative à la réalité des formules de transformation propres à ces coordonnées : double considération pratique qui justifie pleinement de nouveau, croyons-nous, l'utilité et l'intérêt de la totalité des calculs que nous avons cru devoir entreprendre et parachever dans notre Chapitre IV.

réelles les deux premières constantes additives h et h', et la troisième h'' purement imaginaire, c'est-à-dire que nous ferons $h'' = ih''_1$, h''_1 étant une quantité réelle. Cela posé, il résultera alors de l'ensemble de ces diverses conditions que, pour des valeurs réelles des trois coordonnées φ, ψ, ϖ, les deux quantités u et v (1) seront réelles, et la troisième w, au contraire, purement imaginaire, c'est-à-dire telle que $w = iw'$, w' étant réel.

Par exemple, pour fixer les idées, supposons que nous fassions, de manière à faire coïncider nos formules avec celles de Lamé qui ne contiennent pas ces indéterminées α, 6, γ, et s,

$$s = \alpha = -6 = \gamma, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{s}{\alpha} = 1, \quad \frac{s}{6} = -1, \quad \frac{s}{\gamma} = 1,$$

auquel cas les expressions (3) de g, g', g'' se réduiront respectivement à

$$g = \frac{1}{l.m}, \qquad g' = \frac{i}{mn} = \frac{-1}{m.in}, \qquad g'' = \frac{1}{nl} = \frac{i}{in.l};$$

la valeur (1) de w pourra se mettre alors sous la forme

$$w = g''\varpi + h'' = \frac{i}{in.l}\varpi + ih''_1 = i\left(\frac{1}{in.l}\varpi + h''_1\right) = iw',$$

la quantité w' dont la définition pour ces données particulières est exprimée précisément par la dernière de ces égalités, étant bien, comme l'on voit, eu égard à la valeur (7) de n, une quantité réelle. Mais il est bien entendu que nous ne citons cette hypothèse qu'à titre d'exemple particulier, et nullement, comme semble le faire Lamé, à titre de donnée nécessaire pour la théorie qui va suivre.

Or, dans les conditions que nous venons de spécifier tout à l'heure, on aperçoit tout de suite que toute difficulté relative à la réalité des formules (10) ou (11) disparaît. En effet, les trois fonctions elliptiques relatives aux variables u et v, dont les arguments sont tous deux réels, et dont les modules sont, réel

pour la première, et purement imaginaire pour la seconde, sont toutes réelles. Pour la troisième variable $w = iw'$, au contraire, dont le module k'' est réel, il est clair que le sinus d'amplitude, étant une fonction impaire, sera de même purement imaginaire, et les cosinus et delta d'amplitude, qui sont des fonctions paires, seront au contraire réels. Tous les différents facteurs des expressions (10) ou (11) seront donc réels, à l'exception seulement des deux premiers de la valeur de z, savoir n et sn$w$, lesquels, étant l'un et l'autre purement imaginaires, donneront pour eux deux un produit réel : d'où il suit que les trois valeurs de x, y, z, fournies par ces formules, seront toujours réelles à la fois, quelles que soient les trois coordonnées φ, ψ, ϖ.

Cette conclusion intuitive, d'une importance capitale pour la valeur effective de la théorie qui va faire l'objet de ce dernier Chapitre, trouvera d'ailleurs une confirmation formelle dans les détails du calcul que nous allons accomplir dans le paragraphe suivant, en vue de ramener à la forme canonique chacune des fonctions elliptiques qui figurent dans les formules en question (10) ou (11). Mais sans attendre cette confirmation *a posteriori*, nous pouvons dès à présent observer, la légitimité de leur emploi étant désormais établie, que relativement aux coordonnées φ, ψ, ϖ, leur usage sera notablement facilité si nous adoptons maintenant, comme nouvelles coordonnées thermométriques les fonctions linéaires u, v, w de ces variables, les véritables coordonnées, au sens *géométrique* du mot (c'est-à-dire tout système de variables recevant une valeur *réelle*, unique et déterminée, en chaque point de l'espace), étant alors en réalité u, v, et w', et la variable $w = iw'$ étant ici simplement un élément analytique, connexe de la coordonnée w', qu'il y a avantage à introduire partout, pour la symétrie et la commodité des calculs, à la place de cette coordonnée w', sauf à revenir en fin de compte, pour l'interprétation du résultat de ces calculs, à la coordonnée géométrique w' elle-même.

Ainsi entendu, il est visible que le système des coordonnées thermométriques u, v, w réalisera bien les trois *deside-*

rata que nous avons formulés dans le paragraphe précédent, car :

1° Chacune des expressions (10) ou (11) de x, y, z ne renfermant qu'un seul facteur impair, lequel dépend d'une coordonnée différente pour chacune, x changera donc de signe avec u, y avec v, et z avec w (ou w'), d'où il suit qu'à chaque système des valeurs des coordonnées u, v, w (ou w') correspondra un point unique de l'espace, et réciproquement ;

2° Lesdites formules obéissent à une loi de permutation circulaire manifeste, comme aussi, par conséquent, toutes celles que l'on en pourra déduire ;

3° Elles ne renferment d'autres transcendantes que les types classiques, dont on pourra dès lors employer toutes les formules courantes dans tous les calculs où l'on aura introduit lesdites coordonnées u, v, w.

Voyons maintenant comment ces formules (ou tout au moins leurs éléments) devront être transformées, lorsque le but de la recherche sera proprement une interprétation *numérique* des résultats des calculs, et non pas seulement la forme, ou ce qui revient au même, les propriétés analytiques de ces résultats.

Réduction de ces formules a la forme canonique. Cas-limite des coordonées coniques du second ordre. — Il résulte de l'hypothèse admise pour les grandeurs relatives des constantes du Système, savoir $a^2 > b^2 > c^2$, qui entraine à la fois, d'après les définitions (2),

$$(12) \qquad l^2 > 0, \quad m^2 > 0, \quad n^2 < 0, \qquad \text{et} \qquad l^2 < -n^2, \quad m^2 < -n^2,$$

que des trois modules k, k', k'', le premier seul est *canonique*, c'est-à-dire réel et plus petit que l'unité, le second étant purement imaginaire, et le troisième réel, mais plus grand que l'unité. Or, les valeurs numériques des différentes fonctions elliptiques n'étant calculables, soit par le moyen des séries connues, soit par l'aide des tables, que si leur module est canonique, il suit de là que toutes les fois que l'on se proposera comme but une interprétation numérique des résultats du calcul, il sera nécessaire de

ramener auparavant à la forme canonique chacune des fonctions elliptiques qui figurent dans nos formules (11). C'est donc cette réduction que nous allons effectuer d'une façon générale dans ce paragraphe, en invoquant seulement pour cela les deux groupes de formules classiques, dites *des modules complémentaires*, et *des modules réciproques*.

Il nous faut donc introduire tout d'abord dans nos raisonnements et nos calculs la considération des modules complémentaires des trois modules k, k', k'', modules que nous dénoterons respectivement par k_1, k'_1, k''_1, en posant par conséquent

(13) $$k_1^2 = 1 - k^2, \qquad k_1'^2 = 1 - k'^2, \qquad k_1''^2 = 1 - k''^2,$$

puis, relativement aux deux séries de modules ainsi successivement considérés, nous introduirons également par analogie, conformément aux notations de Jacobi légèrement modifiées, pour les intégrales complètes de première espèce correspondantes, les symboles

(14) $$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \mathrm{K}_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}},$$

en désignant semblablement par K', K'_1 et par K'', K''_1, ce que deviennent respectivement ces deux intégrales lorsque l'on remplace les modules k et k_1, d'abord par k' et k'_1, puis par k'' et k''_1 : intégrales dans lesquelles le radical sera toujours entendu, par définition, dans le sens de la détermination positive, et en même temps la variable d'intégration toujours supposée réelle, bien que deux d'entre elles, savoir K'_1 et K'', représentent, avec cette hypothèse, les valeurs (13) de $k_1'^2$ et (3) de k''^2 étant toutes les deux plus grandes que l'unité (page 412), deux quantités manifestement imaginaires (*).

Cela posé, en premier lieu, la première des définitions (13)

(*) En effet, si l'on tient compte des deux premières relations (17) ci-après qui donnent $k_1^2k''^2 = 1$ et $k_1'^2k^2 = 1$, on trouvera pour valeurs de ces deux intégrales ainsi définies,

donnera, en ayant égard à la valeur (3) de k^2 et à la relation de gauche (5),

$$(15)\qquad k_1^2 = 1 - k^2 = 1 + \frac{l^2}{n^2} = \frac{n^2+l^2}{n^2} = -\frac{m^2}{n^2},$$

d'où par conséquent, en permutant, les trois valeurs, analogues à celles (3),

$$(16)\qquad k_1^2 = -\frac{m^2}{n^2},\qquad k_1'^2 = -\frac{n^2}{l^2},\qquad k_1''^2 = -\frac{l^2}{m^2},$$

qui pourront être écrites, en tenant compte de ces mêmes valeurs,

$$(17)\qquad k_1^2 = \frac{1}{k''^2},\qquad k_1'^2 = \frac{1}{k^2},\qquad k_1''^2 = \frac{1}{k'^2},$$

et extrayant alors les racines, nous achèverons de définir, quant au signe, les symboles k_1, k_1', k_1'' par les trois égalités

$$(18)\qquad k_1 = \frac{1}{k''},\qquad k_1' = \frac{1}{k},\qquad k_1'' = \frac{1}{k'},$$

lesquelles, en tenant compte de la première relation (6), établi-

---

en multipliant haut et bas sous le signe d'intégration, dans la première par k, et dans la seconde par k_1, les deux expressions suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
K_1' &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1'^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{kdx}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}}\\
&= \int_0^k \frac{kdx}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}} \pm i\int_k^1 \frac{kdx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k^2)}},\\
K'' &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k''^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{k_1dx}{\sqrt{(1-x^2)(k_1^2-x^2)}}\\
&= \int_0^{k_1} \frac{k_1dx}{\sqrt{(1-x^2)(k_1^2-x^2)}} \pm i\int_{k_1}^1 \frac{k_1dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k_1^2)}},
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles k^2 et k_1^2 étant tous deux plus petits que 1, chacune des intégrales ainsi mises en évidence est à présent manifestement réelle, la variable *réelle* x croissant de 0 à 1.

ront dès lors entre les trois nouveaux modules cette autre relation complètement analogue,

(*)

(19) $$k_1k'_1k''_1=\frac{1}{kk'k''}=\frac{1}{i}, \qquad \text{ou} \qquad k_1k'_1k''_1=-i.$$

On déduira, en second lieu, des mêmes définitions (3) et (16),

$$k'^2=-\frac{m^2}{l^2}=-\frac{-\frac{m^2}{n^2}}{-\frac{l^2}{n^2}}=-\frac{k_1^2}{k^2},$$

d'où, en se souvenant que d'après les définitions posées ci-dessus, k', k, et k_1 sont tous trois positifs, cette nouvelle valeur de k'

(20) $$k'=\frac{ik_1}{k},$$

qui va nous servir à l'instant.

En effet, d'une part, si nous appliquons aux fonctions elliptiques relatives à la coordonnée v les formules connues qui servent à ramener le cas d'un module purement imaginaire à celui d'un module canonique, formules qui se déduisent très simplement des deux groupes de formules classiques déjà mentionnées tout à l'heure, savoir (k et k_1 étant, par hypothèse, des modules complémentaires)

(**)

$$\operatorname{sn}\left(z,\frac{ik_1}{k}\right)=k\,\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{z}{k},k_1\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{z}{k},k_1\right)}, \quad \operatorname{cn}\left(z,\frac{ik_1}{k}\right)=\frac{\operatorname{cn}\left(\frac{z}{k},k_1\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{z}{k},k_1\right)}, \quad \operatorname{dn}\left(z,\frac{ik_1}{k}\right)=\frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{z}{k},k_1\right)},$$

(*) Il résulte, en effet, des définitions précédentes (18), que sur les trois quantités k_1, k'_1, k''_1, les deux premières sont positives, de même que k'' et k, et que la dernière au contraire est négative, car k' étant, d'après les valeurs (3), une quantité de la forme $k'=+i\mathfrak{C}$, dans laquelle $\mathfrak{C}$ est supposée positive, la dernière équation (18) devient $k''_1=\frac{1}{i\mathfrak{C}}=\frac{-i}{\mathfrak{C}}$.

(**) Voir, par exemple, Briot et Bouquet, *Théorie des Fonctions Elliptiques*, Livre V, Chap. III, formules (43), (2de Édition, page 374.)

Dans le cas où ces formules ne seraient pas connues du Lecteur, voici comment on

nous trouverons, eu égard à la valeur obtenue tout à l'heure (20) pour le module k', les trois expressions

$$(21)\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\left(v,k'\right) = \mathrm{sn}\left(v,\dfrac{ik_1}{k}\right) = k\dfrac{\mathrm{sn}\left(\frac{v}{k},k_1\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{v}{k},k_1\right)}, \\ \mathrm{cn}\left(v,k'\right) = \mathrm{cn}\left(v,\dfrac{ik_1}{k}\right) = \dfrac{\mathrm{cn}\left(\frac{v}{k},k_1\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{v}{k},k_1\right)}, \\ \mathrm{dn}\left(v,k'\right) = \mathrm{dn}\left(v,\dfrac{ik_1}{k}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{dn}\left(\frac{v}{k},k_1\right)}. \end{cases}$$

D'autre part, si nous rappelons également les trois formules classiques dites *des modules réciproques*, savoir

$$(22)\quad \mathrm{sn}\left(kz,\frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}\,z, \qquad \mathrm{cn}\left(kz,\frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}\,z, \qquad \mathrm{dn}\left(kz,\frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}\,z,$$

---

peut encore déduire le même résultat, moins rapidement toutefois, des deux groupes de formules déjà cités plus haut.

Faisant $v = iv'$ ou $v' = -iv$, on trouvera, en appliquant tout d'abord les formules des modules complémentaires [équations (176bis) de notre Chap. III], puis tenant compte ensuite de la seconde valeur (18), les trois expressions

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\,(v,\ k') = \mathrm{sn}\,(iv',\ k') = \dfrac{i\,\mathrm{sn}\,(v',\ k'_1)}{\mathrm{cn}\,(v',\ k'_1)} = \dfrac{i\,\mathrm{sn}\left(v',\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{cn}\left(v',\frac{1}{k}\right)}, \\ \mathrm{cn}\,(v,\ k') = \mathrm{cn}\,(iv',\ k') = \dfrac{1}{\mathrm{cn}\,(v',\ k'_1)} = \dfrac{1}{\mathrm{cn}\left(v',\frac{1}{k}\right)}, \\ \mathrm{dn}\,(v,\ k') = \mathrm{dn}\,(iv',\ k') = \dfrac{\mathrm{dn}\,(v',\ k'_1)}{\mathrm{cn}\,(v',\ k'_1)} = \dfrac{\mathrm{dn}\left(v',\frac{1}{k}\right)}{\mathrm{cn}\left(v',\frac{1}{k}\right)}. \end{cases}$$

et que nous appliquions successivement, aux fonctions elliptiques relatives à la coordonnée $w = iw'$, en ayant égard à la première égalité (18), d'abord ces trois dernières formules, puis ensuite les trois autres dites *des modules complémentaires*, c'est-à-dire

---

Partant de là, comme en faisant alors $kz = v'$, ou $z = \frac{v'}{k} = \frac{-iv}{k}$ dans les formules (22) ci-après, qui sont celles des modules réciproques, puis appliquant ensuite de nouveau les formules des modules complémentaires, l'on obtiendra semblablement les trois valeurs

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}\left(v', \frac{1}{k}\right) &= k\operatorname{sn}\left(\frac{-iv}{k}, k\right) = -k\operatorname{sn}\left(\frac{iv}{k}, k\right) = -k.\frac{i\operatorname{sn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)},\\
\operatorname{cn}\left(v', \frac{1}{k}\right) &= \operatorname{dn}\left(\frac{-iv}{k}, k\right) = \operatorname{dn}\left(\frac{iv}{k}, k\right) = \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)},\\
\operatorname{dn}\left(v', \frac{1}{k}\right) &= \operatorname{cn}\left(\frac{-iv}{k}, k\right) = \operatorname{cn}\left(\frac{iv}{k}, k\right) = \frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)},
\end{aligned}\right.$$

il suffira donc de reporter ces dernières valeurs dans les expressions précédentes (α) pour obtenir définitivement, après suppression des doubles dénominateurs, pour les trois fonctions elliptiques de v, les expressions suivantes

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}(v, k') &= \frac{i.(-ik)\operatorname{sn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)} = \frac{k\operatorname{sn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)},\\
\operatorname{cn}(v, k') &= \frac{1}{\dfrac{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}} = \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)},\\
\operatorname{dn}(v, k') &= \frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)},
\end{aligned}\right.$$

qui sont précisément celles auxquelles nous parvenons par une autre voie dans le texte.

celles (176bis) de notre Chapitre III, nous obtiendrons semblablement ces trois autres expressions :

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{sn}(w, k'') &= \operatorname{sn}\left(w, \frac{1}{k_1}\right) = k_1 \operatorname{sn}\left(\frac{w}{k_1}, k_1\right) = k_1 \operatorname{sn}\left(\frac{iw'}{k_1}, k_1\right) = ik_1 \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{w'}{k_1}, k\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{w'}{k_1}, k\right)},\\
\operatorname{cn}(w, k'') &= \operatorname{cn}\left(w, \frac{1}{k_1}\right) = \operatorname{dn}\left(\frac{w}{k_1}, k_1\right) = \operatorname{dn}\left(\frac{iw'}{k_1}, k_1\right) = \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{w'}{k_1}, k\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{w'}{k_1}, k\right)},\\
\operatorname{dn}(w, k'') &= \operatorname{dn}\left(w, \frac{1}{k_1}\right) = \operatorname{cn}\left(\frac{w}{k_1}, k_1\right) = \operatorname{cn}\left(\frac{iw'}{k_1}, k_1\right) = \frac{1}{\operatorname{cn}\left(\frac{w'}{k_1}, k\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux groupes de formules (21) et (23) résolvent complètement la question que nous nous étions posée dans ce paragraphe, car l'on voit que toutes les fonctions elliptiques des deux coordonnées u et w se trouvent ramenées par elles au module canonique k, et celle de la coordonnée v au module k_1, complémentaire de k, et par suite également canonique, ainsi qu'il était demandé. Il suffira donc, quel que soit le problème analytique que l'on aura traité à l'aide de nos coordonnées u, v, w, de substituer partout, dans les résultats des calculs, ces valeurs (21) et (23), pour que ces résultats deviennent immédiatement calculables numériquement, soit par le moyen des séries, soit à l'aide des tables.

Ces mêmes valeurs, rapprochées de celle (7) du coefficient n, mettent en évidence d'ailleurs, par le fait, l'exactitude de la conclusion formulée par nous dans le paragraphe précédent, au sujet de la réalité des expressions (10) ou (11) de x. y, z, pour toute valeur réelle des coordonnées géométriques u, v, et w'.

Toutefois, comme la substitution que nous venons de dire introduirait en dénominateur les fonctions elliptiques relatives aux deux coordonnées v et w', l'exemple du calcul analogue

traité dans notre Chapitre III (pp. 244-245) pourrait suggérer la pensée de pousser plus loin la transformation, et tout en conservant les modules canoniques auxquels nous venons de ramener les différentes fonctions elliptiques, de faire en sorte, par le moyen d'un changement linéaire de variables, que les formules primitivement entières par rapport aux fonctions elliptiques le demeurent également avec les nouveaux modules, auquel cas les formules (11) conserveraient ainsi, avec des modules canoniques, leur forme si remarquable d'un produit de trois fonctions elliptiques dépendant chacune d'une coordonnée différente.

En effet, les formules (177bis) du Chapitre III, déjà employées à l'occasion du calcul que nous venons de rappeler, donnant, en les appliquant au module k_1 et à l'argument $\frac{v}{k}$, puis en ayant égard ensuite aux formules précédentes (21),

$$(23^{bis})\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(\frac{v}{k}+K_1, k_1\right) &= \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)} = \operatorname{cn}(v, k'),\\ \operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}+K_1, k_1\right) &= -k\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)} = -\operatorname{sn}(v, k'),\\ \operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}+K_1, k_1\right) &= \frac{k}{\operatorname{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)} = k\operatorname{dn}(v, k'),\end{aligned}\right.$$

on voit qu'il suffira donc de faire

$$(24)\qquad v' = \frac{v}{k} + K_1 \qquad \text{ou} \qquad v = k(v' - K_1),$$

pour que ces dernières égalités s'écrivent

$$(25)\quad \operatorname{sn}(v', k_1) = \operatorname{cn}(v, k'),\quad \operatorname{cn}(v', k_1) = -\operatorname{sn}(v, k'),\quad \operatorname{dn}(v', k_1) = k\operatorname{dn}(v, k'),$$

ou bien, dans un autre ordre, et en renversant les deux membres de chacune :

$$(26)\qquad \mathrm{sn}(v,k')=-\mathrm{cn}(v',k_1),\quad \mathrm{cn}(v,k')=\mathrm{sn}(v',k_1),\quad \mathrm{dn}(v,k')=\frac{1}{k}\mathrm{dn}(v',k_1).$$

Semblablement, si dans les formules connues

$$(27)\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(z+\mathrm{K}+i\mathrm{K}_1)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}, & \mathrm{cn}(z+\mathrm{K}+i\mathrm{K}_1)=-\dfrac{ik_1}{k}\dfrac{1}{\mathrm{cn}\,z}, \\ & \mathrm{dn}(z+\mathrm{K}+i\mathrm{K}_1)=\quad ik_1\dfrac{\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}, \end{cases}$$

formules que l'on obtient immédiatement par la combinaison des trois formules précitées (177[bis]) du Chapitre III, avec les trois autres analogues également classiques, savoir

$$\mathrm{sn}(z+i\mathrm{K}_1)=\frac{1}{k}\frac{1}{\mathrm{sn}\,z},\quad \mathrm{cn}(z+i\mathrm{K}_1)=-\frac{i}{k}\frac{\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z},\quad \mathrm{dn}(z+i\mathrm{K}_1)=-i\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z},$$

si dans ces formules (27), disons-nous, l'on fait d'abord $z=\frac{w'}{k_1}$, puis que l'on ait égard ensuite aux formules (23), on trouvera sans peine

$$\begin{cases} \mathrm{sn}\left(\dfrac{w'}{k_1}+\mathrm{K}+i\mathrm{K}_1,k\right)= \dfrac{1}{k}\dfrac{\mathrm{dn}\left(\dfrac{w'}{k_1},k\right)}{\mathrm{cn}\left(\dfrac{w'}{k_1},k\right)}=\dfrac{1}{k}\,\mathrm{cn}(w,k''), \\ \mathrm{cn}\left(\dfrac{w'}{k_1}+\mathrm{K}+i\mathrm{K}_1,k\right)=-\dfrac{ik_1}{k}\dfrac{1}{\mathrm{cn}\left(\dfrac{w'}{k_1},k\right)}=-\dfrac{ik_1}{k}\mathrm{dn}(w,k''), \\ \mathrm{dn}\left(\dfrac{w'}{k_1}+\mathrm{K}+i\mathrm{K}_1,k\right)= ik_1\dfrac{\mathrm{sn}\left(\dfrac{w'}{k_1},k\right)}{\mathrm{cn}\left(\dfrac{w'}{k_1},k\right)}=\mathrm{sn}(w,k''); \end{cases}$$

et, par conséquent, il suffira de faire cette fois

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} w'' &= \frac{w'}{k_1} + K + iK_1 = -\frac{iw}{k_1} + K + iK_1, \\ \text{ou}\quad & \\ w &= ik_1(w'' - K - iK_1) = k_1\left[K_1 + i(w'' - K)\right], \end{aligned}\right.$$

pour que les égalités précédentes deviennent

$$\operatorname{sn}(w'',k) = \frac{1}{k}\operatorname{cn}(w,k''),\quad \operatorname{cn}(w'',k) = -\frac{ik_1}{k}\operatorname{dn}(w,k''),\quad \operatorname{dn}(w'',k) = \operatorname{sn}(w,k''),$$

ou, en intervertissant de nouveau leur ordre, et renversant encore leurs deux membres :

$$(29)\quad \operatorname{sn}(w,k'') = \operatorname{dn}(w'',k),\quad \operatorname{cn}(w,k'') = k\operatorname{sn}(w'',k),\quad \operatorname{dn}(w,k'') = \frac{ik}{k_1}\operatorname{cn}(w'',k).$$

En remettant alors ces valeurs, ainsi que les précédentes (26), dans nos formules (11), celles-ci deviendraient

$$\left\{\begin{aligned} x &= l\,.\operatorname{sn}(u\;,k).\frac{1}{k}\operatorname{dn}(v',\;k_1).k\operatorname{sn}(w'',k), \\ y &= -m.\operatorname{cn}(v',k_1).\frac{ik}{k_1}\operatorname{cn}(w'',k).\;\operatorname{cn}(u\;,k), \\ z &= n\,.\operatorname{dn}(w'',k).\;\operatorname{dn}(u\;,k).\;\operatorname{sn}(v'\;,k_1), \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, en simplifiant, ordonnant, et ayant égard aux valeurs (3) et (16) de k^2 et k_1^2 qui donnent, k et k_1 étant tous les deux positifs par définition, de même que l et m,

$$(29^{\text{bis}})\quad m\frac{ik}{k_1} = \sqrt{-m^2\frac{k^2}{k_1^2}} = \sqrt{-m^2\frac{-\frac{l^2}{n^2}}{-\frac{m^2}{n^2}}} = \sqrt{-l^2} = il,$$

que l'on aurait, à la place de ces formules (11), en changeant le signe de la seconde, les trois suivantes, complètement analogues,

sauf permutation des trois coordonnées rectilignes, à celles (178) du Chapitre III, relatives à l'exemple rappelé plus haut :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} x &= l \operatorname{sn}(u,k) \operatorname{dn}(v',k_1) \operatorname{sn}(w'',k), \\ -y &= il \operatorname{cn}(u,k) \operatorname{cn}(v',k_1) \operatorname{cn}(w'',k), \\ z &= n \operatorname{dn}(u,k) \operatorname{sn}(v',k_1) \operatorname{dn}(w'',k). \end{aligned}\right.$$

Mais, malgré l'avantage de n'employer ainsi que des fonctions elliptiques à module canonique, ces dernières formules ne sauraient, à notre avis, être préférées d'une façon générale à nos formules primitives (11), parce que, de quelque façon qu'on les écrive, il est impossible de les faire rentrer toutes les trois dans un même cycle de permutation circulaire.

Nous en dirions autant, à plus forte raison, des formules moins simples de forme que nous avons dû mentionner avant celles-ci, à savoir celles qui résulteraient de la substitution des valeurs (21) et (23) dans les formules primitives (11), et que nous jugeons inutile de récrire ici; car ce serait, en général, une maladresse très grande, à notre sens, ayant à effectuer un calcul de nature quelconque, soit algébrique, soit d'intégration, que de se priver à l'avance, et sans aucun profit sérieux, par le fait même de leur emploi, du bénéfice si considérable, tant pour l'abréviation que pour la vérification du calcul, résultant de la simplicité, de la symétrie, et éventuellement de la permutation circulaire, inhérentes à nos premières formules.

Ce sera donc seulement dans les cas où la nature de la question exclurait *a priori* la notion de symétrie par rapport à trois axes coordonnés, qu'il sera rationnel de faire usage, de prime abord, pour le développement des calculs, des formules (21) et (23), ou (26) et (29), ainsi que de celles résultant de la substitution de ces divers groupes dans nos formules (11).

Comme exemple de ces cas, et en même temps à titre de vérification des calculs qui précèdent, voyons quelles autres l'on obtiendrait, à la place de ces mêmes formules, dans un cas-limite où les trois familles coordonnées cesseraient d'appartenir au même type analytique.

A cet effet, remarquant tout d'abord que la seconde ligne du tableau (8) deviendra par les substitutions (26)

$$(31)\quad \begin{cases} b^2+\mu=m^2.\mathrm{cn}^2(v',k_1), \qquad c^2+\mu=(im)^2.\mathrm{sn}^2(v',k_1), \\ a^2+\mu=l^2.\dfrac{1}{k^2}\mathrm{dn}^2(v',k_1)=(in)^2\mathrm{dn}^2(v',k_1), \end{cases}$$

nous changerons encore dans toutes nos formules a^2, b^2, c^2, λ, μ, et ν, respectivement en ε^2a^2, ε^2b^2, ε^2c^2, $\varepsilon^2\lambda$, $\varepsilon^2\mu$, et r^2, ainsi que nous l'avons déjà fait, en vue d'un résultat complètement analogue, dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (p. 78), changement par suite duquel les équations (9), en tenant compte de la première ligne du tableau (8) et de ces dernières (31), se transformeront cette fois respectivement dans les suivantes

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}(\varepsilon^2a^2+r^2)=\dfrac{l^2\,\mathrm{sn}^2u.(in)^2\mathrm{dn}^2(v',k_1)}{l^2.(in)^2}(\varepsilon^2a^2+r^2), \\ y^2=\dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}(\varepsilon^2b^2+r^2)=\dfrac{(il)^2\mathrm{cn}^2u\,.\,m^2\,\mathrm{cn}^2(v',k_1)}{m^2.(il)^2}(\varepsilon^2b^2+r^2), \\ z^2=\dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}(\varepsilon^2c^2+r^2)=\dfrac{n^2\,\mathrm{dn}^2u\,.(im)^2\mathrm{sn}^2(v',k_1)}{n^2.(im)^2}(\varepsilon^2c^2+r^2), \end{cases}$$

c'est-à-dire simplement, en extrayant les racines,

$$\begin{cases} x=\pm\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(v',k_1).\sqrt{\varepsilon^2a^2+r^2}, \\ y=\pm\,\mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{cn}(v',k_1).\sqrt{\varepsilon^2b^2+r^2}, \\ z=\pm\,\mathrm{dn}(u,k)\,\mathrm{sn}(v',k_1).\sqrt{\varepsilon^2c^2+r^2}, \end{cases}$$

et, par conséquent, en faisant $\varepsilon=0$, puis effaçant les accents, on trouvera, dans cette hypothèse, au lieu des formules (11), celles-ci :

$$(32)\quad \begin{cases} x=\pm\,r\,\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{dn}(v,k_1), \qquad y=\pm\,r\,\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k_1), \\ z=\pm\,r\,\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k_1). \end{cases}$$

Ce sont exactement, sauf permutation des trois axes coordon-

nés, les formules (178bis) de notre Chapitre III, qui définissent le système des Coordonnées Coniques du Second Ordre, formules que nous avions déduites alors, par de tout autres procédés, de celles rencontrées antérieurement par le Système Conique en général.

Le rôle, et l'emploi pour les calculs, des formules (21) et (23) étant ainsi nettement précisés, voyons maintenant quelles conséquences importantes l'on en peut déduire, relativement aux limites de variation de nos différentes coordonnées.

Limites de variation de chacune des coordonnées thermométriques, et mode de déformation continue des surfaces coordonnées, nécessaires pour atteindre tous les points de l'espace. — Des deux périodes relatives à la coordonnée v, savoir K' et iK'$_1$, la première est réelle, car, eu égard à la valeur (3) de k'^2, dans l'intégrale

$$(33)\qquad K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1+\frac{m^2}{l^2}x^2\right)}},$$

les deux facteurs sous le radical sont à la fois positifs, d'après les hypothèses admises (12), d'où il suit que les éléments de l'intégrale sont tous réels et déterminés. Les trois fonctions connexes sn v, cn v, dn v prendront donc successivement toutes les valeurs absolues correspondant à des valeurs réelles de v, en faisant varier v de 0 à $\pm$ K'.

Semblablement, des deux périodes relatives à la variable w, qui sont K'' et iK''$_1$, la seconde est purement imaginaire, ou, en d'autres termes, la quantité K''$_1$ est réelle, car, d'après la valeur (16) de $k_1''^2$, l'intégrale

$$(34)\qquad K_1''=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1''^2x^2)}}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1+\frac{l^2}{m^2}x^2\right)}}$$

a également tous ses éléments réels et déterminés, pour la même

raison. Il suit de là, de nouveau, que sn w, cn w, dn w, où $w = iw'$, prendront encore, en valeur absolue, toutes les valeurs possibles correspondant à des valeurs purement imaginaires de w (ou réelles de w'), en faisant varier w, dans le plan figuratif d'une variable imaginaire, en ligne droite suivant l'axe des ordonnées, de 0 à $\pm\ iK_1''$, c'est-à-dire en fait, par conséquent, la coordonnée géométrique w' de 0 à $\pm\ K_1''$.

Nous indiquerons plus loin le moyen de calculer *numériquement* ces quantités si importantes K' et K_1'', qui marquent ainsi les limites des coordonnées géométriques v et w'.

Les deux coordonnées u et v étant réelles toutes deux, d'après nos hypothèses : d'une part, les trois fonctions sn u, cn u, dn u, dont le module k est canonique, prendront successivement toutes les valeurs absolues dont elles sont susceptibles, en faisant varier u de 0 à $\pm$ K, valeurs qui seront toutes comprises entre 0 et 1 ; d'autre part, il résulte des expressions (21) que les trois fonctions sn v, cn v, dn v ne pourront pas, non plus que les précédentes, devenir infinies; car, pour des valeurs réelles de v, d'une part, les numérateurs varient entre -1 et $+1$, et d'autre part, le dénominateur dn $\left(\frac{v}{k},\ k_1\right)$ variant entre 1 et k ne s'annule jamais. Les valeurs (10) des coordonnées x, y, z ne pourront donc devenir infinies, respectivement que par les facteurs cn w, dn w, sn w, qui devront par conséquent, pour que lesdites formules soient utilisables, devenir eux-mêmes infinis pour certaines valeurs réelles de la coordonnée géométrique w' comprises dans les limites que nous venons de lui assigner. Or, cette condition se trouve effectivement remplie pour les valeurs $w = \pm\ iK_1''$, ou, ce qui est la même chose, pour les limites indiquées tout à l'heure $w' = \pm\ K_1''$.

De plus, l'expression de chaque coordonnée x, y, z, ne contenant, dans les formules (10), qu'un seul facteur impair, qui est sn u pour x, sn v pour y, sn w pour z, chacune passe par 0 pour la valeur 0 de l'une des coordonnées u, v, w, et, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, x change de signe avec u, y avec v, z avec w' ou w.

En résumé, nous sommes donc assurés, quant au point de vue analytique, que l'on atteindra tous les points de l'espace,

c'est-à-dire que x, y, z prendront toutes les valeurs possibles, en faisant varier u de $-\mathrm{K}$ à $+\mathrm{K}$, v de $-\mathrm{K}'$ à $+\mathrm{K}'$, et w' de $-\mathrm{K}_1''$ à $+\mathrm{K}_1''$, ou, si l'on aime mieux, w en ligne droite de $-i\mathrm{K}_1''$ à $+i\mathrm{K}_1''$, et qu'à chaque valeur de u, v, w (ou w') comprise entre ces limites, correspondra un point unique et déterminé de l'espace, car chacun des trois facteurs des expressions (10) ne passera qu'une seule fois par chaque valeur.

Mais cette certitude ne suffit pas, ni pour la satisfaction complète de l'esprit, ni pour les exigences multiples des diverses opérations que l'on peut avoir à effectuer. Car pour le calcul des intégrales triples, par exemple, opération très fréquente et des plus importantes pour toutes les sciences d'application, il sera indispensable, pour pouvoir fixer les limites que l'on devra assigner dans l'intégration à chaque coordonnée, de posséder la même vue claire et certaine au point de vue géométrique, c'est-à-dire d'apercevoir, avec la même netteté, comment une déformation continue des trois surfaces coordonnées peut amener leur point d'intersection commun à coïncider successivement avec tous les points de l'espace, ainsi qu'un simple déplacement permet de le faire avec les trois plans du Système Cartésien.

Ayant précisément l'intention de choisir un peu plus loin ce genre d'opérations comme exemple de l'application, et comme preuve de l'utilité et de la commodité de nos Coordonnées Thermométriques u, v, w, nous croyons devoir en conséquence reproduire ici, en les appliquant à ce système, les considérations très ingénieuses à l'aide desquelles Lamé résout la question avec son système de coordonnées (*).

Substituant à cet effet les valeurs (8) dans les équations (156) que nous avons obtenues, à la fin du Chapitre précédent, pour représenter le système orthogonal avec les Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν, ce même système se trouvera donc défini avec nos Coordonnées Thermométriques u, v, w par ces trois équations, dont nous écrivons les différents termes dans l'ordre qui fait le

---

(*) Leçons sur les Fonctions Inverses, §§ LXXXV-LXXXIX (pp. 111-114), ou encore Leçons sur les Coordonnées Curvilignes, §§ LXX (pp. 125-127).

mieux ressortir leur permutation circulaire,

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{x^2}{l^2\,\mathrm{sn}^2 u} - \frac{y^2}{l^2\,\mathrm{cn}^2 u} + \frac{z^2}{n^2\,\mathrm{dn}^2 u} = \frac{1}{d^2},\\
&\frac{y^2}{m^2\mathrm{sn}^2 v} - \frac{z^2}{m^2\mathrm{cn}^2 v} + \frac{x^2}{l^2\,\mathrm{dn}^2 v} = \frac{1}{d^2},\\
&\frac{z^2}{n^2\mathrm{sn}^2 w} - \frac{x^2}{n^2\mathrm{cn}^2 w} + \frac{y^2}{m^2\,\mathrm{dn}^2 w} = \frac{1}{d^2},
\end{aligned}
\right.
$$

lesquelles, en tenant compte des définitions (3) des modules k, k', k'', rentreront bien toutes trois, comme cela devait être, dans le type (116) de notre Chapitre II, relatif aux familles isothermes de surfaces du second ordre.

Cela posé, récrivant la première de ces équations successivement sous les deux formes

$$
\frac{x^2}{l^2} = \mathrm{sn}^2 u\left(\frac{y^2}{l^2\mathrm{cn}^2 u} - \frac{z^2}{n^2\,\mathrm{dn}^2 u} + \frac{1}{d^2}\right), \qquad \frac{y^2}{l^2} = \mathrm{cn}^2 u\left(\frac{x^2}{l^2\mathrm{sn}^2 u} + \frac{z^2}{n^2\mathrm{dn}^2 u} - \frac{1}{d^2}\right),
$$

l'on voit, à cause de l'hypothèse $n^2 < 0$, en considérant des valeurs de u très voisines, de 0 pour la première équation, et de $\pm$ K pour la seconde, que le second membre de la première sera positif quels que soient y et z, tandis que celui de la seconde ne le restera que si l'on astreint ces deux coordonnées à vérifier précisément l'inégalité

$$
\frac{x^2}{l\ \mathrm{sn}^2 u} + \frac{z^2}{n^2\ \mathrm{dn}^2 u} - \frac{1}{d^2} > 0.
$$

Il suit de là, en passant aux limites respectives, 0 ou $\pm$K, que pour $u = 0$, la première famille (35) se réduit à la surface $x = 0$, c'est-à-dire au plan des yz, dans toute son étendue, tandis que pour $u = \pm$ K elle se réduit à la surface $y = 0$, ou au plan des zx, mais seulement dans les deux parties de ce plan intérieures à l'hyperbole

$$
\frac{x^2}{l^2} + \frac{z^2}{n^2.\,k_1^2} = \frac{1}{d^2},
$$

dont l'équation peut encore être écrite, eu égard aux valeurs (5) et (16) de k^2 et k_1^2, sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(56)\qquad \frac{x^2}{l^2}-\frac{z^2}{m^2}=\frac{1}{d^2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{k^2}-\frac{z^2}{k_1^2}=\frac{-n^2}{d^2},$$

et à laquelle Lamé attribue la dénomination d'*Hyperbole Ombilicale,* « parce qu'elle trace, dit-il, sur chaque ellipsoïde de la » troisième famille, les quatre points connus sous le nom d'*Ombilics* (*). »

Si donc, l'on fait varier la coordonnée u depuis 0 jusqu'à $\pm$K,

---

(*) Coord. curv., § LXX (p. 126, *en haut*). En effet, d'une part, pour le type classique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

les coordonnées des ombilics étant, comme l'on sait,

$$x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \qquad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

si l'on applique ces formules, en les élevant au carré, à la troisième surface (35), l'on trouvera donc, en ayant égard aux valeurs (3) et (16) de k''^2 et $k_1''^2$, pour les points en question relatifs à cette surface :

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{-n^2\,\text{cn}^2 w}{d^2}\,\frac{(-n^2\,\text{cn}^2 w - m^2\,dn^2 w)}{(-n^2\,\text{cn}^2 w - n^2\,\text{sn}^2 w)} = \frac{\text{cn}^2 w}{d^2}\,\frac{m^2\left(\frac{-n^2}{m^2}\text{cn}^2 w - \text{dn}^2 w\right)}{\text{cn}^2 w + \text{sn}^2 w} \\ &= \frac{m^2}{d^2}\,\text{cn}^2 w.\left[k''^2(1-\text{sn}^2 w)-(1-k''^2\,\text{sn}^2 w)\right] = \frac{m^2}{d^2}\,\text{cn}^2 w.(-k_1''^2) = \frac{m^2}{d^2}\,\text{cn}^2 w.\frac{l^2}{m^2} = \frac{l^2}{d^2}\,\text{cn}^2 w. \\ z^2 &= \frac{n^2\,\text{sn}^2 w}{d^2}\,\frac{(m^2\,\text{dn}^2 w - n^2\,\text{sn}^2 w)}{(-n^2\,\text{cn}^2 w - n^2\,\text{sn}^2 w)} = \frac{-\text{sn}^2 w}{d^2}\,\frac{m^2\left(\text{dn}^2 w - \frac{n^2}{m^2}\,\text{sn}^2 w\right)}{(\text{cn}^2 w + \text{sn}^2 w)} \\ &= -\frac{m^2}{d^2}\,\text{sn}^2 w.\left[(1-k''^2\,\text{sn}^2 w)+k''^2\,\text{sn}^2 w\right] = -\frac{m^2}{d^2}\,\text{sn}^2 w. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les points d'intersection de la courbe (36), située par hypothèse dans le plan $y=0$, avec la troisième surface (35), s'obtiendront évidemment en résolvant par rapport à x et z les deux équations

$$\frac{x^2}{l^2}-\frac{z^2}{m^2}=\frac{1}{d^2}, \qquad \frac{z^2}{n^2\,\text{sn}^2 w}-\frac{x^2}{n^2\,\text{cn}^2 w}=\frac{1}{d^2},$$

les deux nappes de la première des trois surfaces (35), qui, au départ, sont aplaties et se rejoignent, de manière à coïncider avec le plan des yz dans toute son étendue, s'en détachent de part et d'autre, et se séparent entre elles, celle de droite correspondant aux valeurs positives de u, ainsi que le montrent les formules (10), et celle de gauche aux valeurs négatives; elles s'infléchissent en même temps vers l'axe des x, en se rapprochant de plus en plus du plan des zx, sur lequel elles s'étendent définitivement lorsque leurs sommets se confondent avec les points $x = \pm \frac{l}{d} = \pm \frac{1}{d}\sqrt{a^2 - b^2}$, qui représentent les foyers communs à toutes les surfaces du Système (35) pour les sections principales relatives à ce plan.

Semblablement, si l'on récrit la seconde de ces équations (35) successivement sous les deux formes

$$\frac{y^2}{m^2} = \operatorname{sn}^2 v\left(\frac{z^2}{m^2 \operatorname{cn}^2 v} - \frac{x^2}{l^2 \operatorname{dn}^2 v} + \frac{1}{d^2}\right), \qquad \frac{z^2}{m^2} = \operatorname{cn}^2 v\left(\frac{y^2}{m^2 \operatorname{sn}^2 v} + \frac{x^2}{l^2 \operatorname{dn}^2 v} - \frac{1}{d^2}\right),$$

et que l'on considère de même des valeurs de v très voisines de

---

ou, ce qui est la même chose, en ordonnant, les deux suivantes

$$m^2x^2 - l^2z^2 = \frac{l^2m^2}{d^2}, \qquad \operatorname{sn}^2 w . x^2 - \operatorname{cn}^2 w . z^2 = -\frac{n^2}{d^2} \operatorname{sn}^2 w \operatorname{cn}^2 w,$$

lesquelles donneront dès lors, en ayant égard à la relation de gauche (5), pour ces points d'intersection,

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{d^2}\frac{(-l^2m^2 . \operatorname{cn}^2 w - l^2 . n^2 \operatorname{sn}^2 w \operatorname{cn}^2 w)}{(-m^2 . \operatorname{cn}^2 w + l^2 . \operatorname{sn}^2 w)} = \frac{l^2 \operatorname{cn}^2 w(-m^2 - n^2 \operatorname{sn}^2 w)}{d^2[-m^2(1 - \operatorname{sn}^2 w) + l^2 \operatorname{sn}^2 w]} \\ &= \frac{l^2 \operatorname{cn}^2 w(-m^2 - n^2 \operatorname{sn}^2 w)}{d^2[-m^2 + (l^2 + m^2)\operatorname{sn}^2 w]} = \frac{l^2}{d^2}\operatorname{cn}^2 w, \\ z^2 &= \frac{1}{d^2}\frac{(-m^2 . n^2 \operatorname{sn}^2 w \operatorname{cn}^2 w - l^2m^2 . \operatorname{sn}^2 w)}{(-m^2 \operatorname{cn}^2 w + l^2 \operatorname{sn}^2 w)} = \frac{-m^2 \operatorname{sn}^2 w(n^2 \operatorname{cn}^2 w + l^2)}{d^2[-m^2 \operatorname{cn}^2 w + l^2(1 - \operatorname{cn}^2 w)]} \\ &= \frac{-m^2 \operatorname{sn}^2 w(n^2 \operatorname{cn}^2 w + l^2)}{d^2[-(m^2 + l^2)\operatorname{cn}^2 w + l^2]} = -\frac{m^2}{d^2}\operatorname{sn}^2 w, \end{aligned}\right.$$

valeurs identiques à celles rencontrées tout à l'heure, ce qui démontre par conséquent le fait observé par Lamé, sur lequel il fonde la dénomination qu'il attribue à la courbe (36).

0 pour la première et de $\pm K'$ pour la seconde, leurs seconds membres ne resteront encore positifs que pour les valeurs de x, y, z satisfaisant à l'une ou à l'autre des inégalités

$$\frac{z^2}{m^2 \operatorname{cn}^2 v} - \frac{x^2}{l^2 \operatorname{dn}^2 v} + \frac{1}{d^2} > 0, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{m^2 \operatorname{sn}^2 v} + \frac{x^2}{l^2 \operatorname{dn}^2 v} - \frac{1}{d^2} > 0,$$

suivant que l'on considérera la première forme ou la seconde.

Par conséquent, en passant encore aux limites respectives, 0 et $\pm K'$, l'on voit que pour $v = 0$, la seconde famille (35) se réduit à la surface $y = 0$ ou au plan des zx, mais seulement dans la partie dont tous les points satisfont à l'inégalité

$$\frac{z^2}{m^2} - \frac{x^2}{l^2} + \frac{1}{d^2} > 0, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{l^2} - \frac{z^2}{m^2} - \frac{1}{d^2} < 0,$$

c'est-à-dire dans la seule portion de ce plan extérieure à l'Hyperbole Ombilicale (36) déjà rencontrée tout à l'heure, et d'autre part, que pour $v = \pm K'$, cette même famille se réduit de même au plan des xy, mais seulement dans la partie de ce plan dont tous les points satisfont à l'inégalité

$$\frac{y^2}{m^2} + \frac{x^2}{l^2 . k_1'^2} - \frac{1}{d^2} > 0,$$

qui, eu égard aux valeurs (3) et (16) de k'^2 et $k_1'^2$ peut de même être écrite sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\frac{y^2}{m^2} - \frac{x^2}{n^2} - \frac{1}{d^2} > 0, \quad \text{ou} \quad -\frac{y^2}{k'^2} + \frac{x^2}{k_1'^2} - \frac{l^2}{d^2} > 0,$$

c'est-à-dire, par conséquent, dans la seule portion de ce plan extérieure à l'ellipse ($n^2 < 0$, $k'^2 < 0$)

$$(37) \qquad \frac{y^2}{m^2} + \frac{x^2}{-n^2} = \frac{1}{d^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{-k'^2} + \frac{x^2}{k_1'^2} = \frac{l^2}{d^2},$$

courbe à laquelle Lamé attribue de même la dénomination

d'*Ellipse Focale*, parce que ses sommets, d'une part, étant les quatre points

$$y = \pm \frac{m}{d} = \pm \frac{1}{d}\sqrt{b^2 - c^2}, \qquad \text{et} \qquad x = \mp \frac{in}{d} = \pm \frac{1}{d}\sqrt{a^2 - c^2},$$

et, d'autre part, ses foyers étant, eu égard à la relation de gauche (5), les deux autres points

$$y = \pm \sqrt{\frac{-n^2 - m^2}{d^2}} = \pm \sqrt{\frac{l^2}{d^2}} = \pm \frac{1}{d}\sqrt{a^2 - b^2},$$

l'on voit ainsi, dit Lamé, « qu'elle concentre, dans sa propre définition, les six foyers constants du Système (*) ».

Lors donc que l'on fera varier la coordonnée v depuis 0 jusqu'à $\pm$ K', la seconde surface (35), primitivement aplatie sur le plan des zx dans la partie de ce plan extérieure à l'Hyperbole Ombilicale (36), se dédoublera de part et d'autre de ce plan, la partie située du côté des y positifs correspondant encore, d'après les formules (10), aux valeurs positives de v, et inversement; en même temps, la surface se courbera de plus en plus, en se penchant vers le plan des xy, sur lequel elle s'étendra définitivement quand son ellipse de gorge se sera confondue avec l'Ellipse Focale (37).

Enfin, pour la troisième famille représentée par la dernière équation (35), dont tous les termes sont positifs, et qui peut encore être écrite

$$z^2 = n^2 \operatorname{sn}^2 w \left(\frac{x^2}{n^2 \operatorname{cn}^2 w} - \frac{y^2}{m^2 \operatorname{dn}^2 w} + \frac{1}{d^2}\right),$$

comme le second membre de cette dernière équation, dont les deux premiers facteurs sont tous deux négatifs d'après nos hypothèses (pages 411-412), ne sera positif que pour les valeurs de x et de y qui satisfont à l'inégalité

$$\frac{x^2}{n^2 \operatorname{cn}^2 w} - \frac{y^2}{m^2 \operatorname{dn}^2 w} + \frac{1}{d^2} > 0,$$

(*) Ibid., page 125, *en bas*.

le même mode de raisonnement fait voir encore que, pour $w = 0$, cette famille se réduira au plan des xy, mais seulement pour la partie de ce plan dont tous les points satisfont à l'inégalité

$$\frac{x^2}{n^2} - \frac{y^2}{m^2} + \frac{1}{d^2} > 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{y^2}{m^2} - \frac{x^2}{n^2} - \frac{1}{d^2} < 0,$$

c'est-à-dire pour la seule portion de ce plan intérieure à l'Ellipse Focale (37); tandis que, pour $w = \pm iK_1''$ ou $w' = \pm K_1''$, tous les dénominateurs du premier membre de cette même équation (35) étant simultanément infinis, le rayon de la surface, qui ne cesse pas d'être un ellipsoïde, grandira, dans une direction quelconque, au delà de toute limite.

La coordonnée géométrique w' variant donc de 0 à $\pm K_1''$, ou, si l'on aime mieux, la coordonnée analytique w variant en ligne droite de 0 à $\pm iK_1''$, la troisième surface (35) qui se confond au départ avec le plan des xy, dans la partie intérieure à l'Ellipse Focale (37), s'en détache de part et d'autre, la partie située au-dessus de ce plan correspondant cette fois aux valeurs *négatives* des coordonnées w ou w', et inversement, car il résulte de la troisième expression (7) et de la première (23), que dans la dernière formule (11), le produit des deux premiers facteurs, savoir

$$n\,\mathrm{sn}(w,k'') = +\,i\sqrt{a^2-c^2}.\,ik_1\,\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{w'}{k_1},k\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{w'}{k_1},k\right)} = -\sqrt{a^2-c^2}.\,k_1\,\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{w'}{k_1},k\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{w'}{k_1},k\right)}$$

est alors une quantité de signe contraire à celui de la coordonnée w' ou w.

Le rayon de la surface grandit en même temps de plus en plus dans toutes les directions avec lesdites coordonnées, de manière à devenir infini pour $w' = \pm K_1''$ ou $w = \pm iK_1''$.

L'on aperçoit d'ailleurs immédiatement que les mêmes circonstances se reproduiraient exactement dans le cas-limite, envisagé ci-dessus, des Coordonnées Coniques du Second Ordre [formule(32)], lequel correspond dans nos formules(35) à l'hypothèse

$d = \infty$, sauf que les limites de la coordonnée v seraient alors $-K_1$ et $+K_1$ au lieu de $-K'$ et $+K'$, et en outre que l'Ellipse Focale (37) se réduira alors à son centre, c'est-à-dire à l'origine des coordonnées, pendant que l'Hyperbole Ombilicale (36) se réduira dans ce cas à ses asymptotes, c'est-à-dire aux deux droites :

$$\frac{x}{z} = \pm\frac{k}{k_1} = \pm\frac{l}{m} = \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Les raisonnements que nous venons d'exposer établissent à nouveau, par le moyen des Coordonnées Thermométriques u, v, w, ce fait que nous avions déjà reconnu à l'aide des Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν à la fin du Chapitre précédent, à savoir que les trois plans coordonnés appartiennent chacun à une ou à deux des familles de surfaces qui composent le Système Ellipsoïdal, pour une valeur-limite de l'une des coordonnées ; mais le jour dont ils éclairent la question est ici beaucoup plus complet, en ce qu'ils montrent, cette fois, que lorsqu'un même plan coordonné peut ainsi être rattaché à deux familles différentes du Système, ce n'est pas pour la totalité de son étendue qu'il appartient alors à la fois aux deux familles en question, ainsi que le laissait supposer notre démonstration antérieure, mais seulement pour une région spéciale à chacune de ces familles, régions délimitées entre elles sur le même plan, soit par l'Ellipse Focale (37), soit par l'Hyperbole Ombilicale (36). Ces deux courbes remarquables constituent donc, au point de vue géométrique, comme le fait observer Lamé, les limites qu'il faut franchir pour passer de l'une des familles à la suivante, si l'on veut se représenter en imagination, à l'aide d'une déformation continue, successivement toute la série des surfaces individuelles qui pourront entrer dans la composition du Système : de même qu'au point de vue simplement analytique, les deux quantités $-b^2$ et $-c^2$ constituaient, dans les inégalités de définition (157) de notre Chapitre V, les limites que devait franchir une variable réelle ρ, pour représenter successivement, par une variation continue, toutes les valeurs possibles des trois Coordonnées Elliptiques envisagées dans ce Chapitre.

Relations linéaires entre les intégrales complètes de première et de deuxième espèce correspondant a l'ensemble des trois coordonnées. Valeurs numériques de celles d'entre elles qui ne se présentent pas sous la forme canonique. — Ayant introduit déjà, dans un paragraphe précédent, pour chaque module k, k', k'', la considération des deux intégrales complètes complémentaires de première espèce, qui fournissent les périodes relatives à la coordonnée correspondante, et dont la seconde peut, à l'aide d'une transformation connue, être écrite sous une double forme, nous envisagerons à la fois dans celui-ci, en vue de chercher les relations qui pourront exister entre elles, les quatre intégrales complètes de première et de deuxième espèce relatives à chacun des trois modules : c'est-à-dire que nous introduirons, pour le premier module par exemple, avec les deux quantités K et K_1 (14), les deux autres quantités J et J_1 définies par les nouvelles égalités

$$(38) \qquad J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2(z, k)\, dz, \qquad iJ_1 = \int_K^{K+iK_1} k^2 \operatorname{sn}^2(z, k)\, dz,$$

et de même, pour les deux autres modules, avec les quantités K', K'_1, K'', K''_1 déjà définies, les quantités analogues J', J'_1, et J'', J''_1, que donneraient ces mêmes égalités par le changement de k en k' ou k''. Ce qui revient encore à dire, en prenant la seconde intégrale (14) sous l'autre forme à laquelle nous faisions allusion tout à l'heure, et transformant de même ces deux dernières intégrales (38) à l'aide de la substitution $\operatorname{sn}(z, k) = x$, que nous considérerons à la fois, pour le premier module par exemple, les quatre quantités K, K_1, J, J_1, définies par les égalités analogues de forme

$$(39) \qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad iK_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$(40) \qquad J = \int_0^1 \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad iJ_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

la détermination du radical étant expressément, par définition, la détermination *positive* pour les deux expressions de gauche, et au contraire la détermination *négative* (*) pour les deux expressions de droite; et de même pour les deux autres modules en changeant dans ces égalités k en k' ou k'' : intégrales dont les

---

(*) Cette opposition dans les déterminations des radicaux, selon que l'on considérera les expressions de droite ou de gauche, à laquelle on ne fait pas attention habituellement, provient ici de ce que, contrairement à l'usage, nous avons précédemment spécifié la détermination de ce même radical dans la définition (14) de la quantité K_1, et elle est dès lors nécessaire, comme il est aisé de le reconnaître, pour que ladite quantité K_1 ainsi définie coïncide exactement en grandeur et *en signe* avec celle introduite par cette nouvelle définition (39), ce qui est bien évidemment la condition indispensable pour que l'on soit assuré d'arriver aux mêmes formules en partant, soit de la première, soit de la seconde de ces définitions.

En effet, par le moyen de la substitution $t = \frac{1}{\sqrt{1-k_1^2z^2}}$, d'après un calcul très connu que nous détaillons plus loin dans la transformation (68), cette même égalité (39), en y écrivant t à la place de x, se changera dans la suivante

(α) $$iK_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{-(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}.$$

Par où l'on voit, que si l'on convenait de prendre encore la détermination positive pour le radical de cette nouvelle définition (39), c'est-à-dire par conséquent aussi dans les deux intégrales de l'égalité que nous venons d'écrire, celle-ci deviendrait, sans ambiguïté de signe, en faisant abstraction du membre intermédiaire,

(β) $$iK_1 = \int_0^1 \frac{dz}{+i\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}, \quad \text{ou} \quad -K_1 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}},$$

et se trouverait par conséquent en contradiction, quant au signe, avec la définition précédemment admise (14) pour la quantité K_1; tandis qu'en convenant expressément, au contraire, ainsi que nous le faisons, de prendre dans cette même définition (39) la détermination négative pour le radical, la même égalité (α) deviendra semblablement, sans aucune ambiguïté, toujours avec la détermination positive des radicaux que nous allons écrire

(γ) $$-iK_1 = \int_0^1 \frac{dz}{-i\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}, \quad \text{ou} \quad +K_1 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}},$$

et concordera bien alors exactement avec la définition antérieure (14) de ladite quantité K_1. Et dès lors, cette distinction dans le signe des radicaux étant reconnue nécessaire relativement aux deux intégrales complètes (39), il est bien clair qu'elle devra être maintenue relativement aux deux intégrales complémentaires (40), qui s'y rattachent

limites auront ainsi toutes pour affixes des points exclusivement situés sur l'axe des x ou sur l'axe des y, les valeurs (3) des différents modules étant toutes ou réelles ou purement imaginaires, et qui seront dès lors complètement définies par la condition d'être chacune, ou bien entièrement rectiligne suivant l'axe des x, ou bien composée de deux portions séparément rectilignes suivant l'un ou l'autre des deux axes coordonnés.

Parmi les douze quantités ainsi définies, en effet, que nous désignerons de même, pour l'analogie des notations, par les symboles

$$(41)\qquad K,\ K_1,\ J,\ J_1,\qquad K',\ K'_1,\ J',\ J'_1,\qquad K'',\ K''_1,\ J'',\ J''_1,$$

et qu'il est nécessaire de posséder, pour pouvoir employer les formules courantes de la théorie des fonctions elliptiques dans les calculs où l'on aura introduit nos coordonnées u, v, w à la place des coordonnées rectilignes, les quatre premières, dont le module est canonique, sont seules calculables numériquement, ainsi que nous l'avons déjà fait observer, à l'aide des séries connues, qui ne sont convergentes, ou dont la signification n'est établie que dans cette seule hypothèse. Pour pouvoir calculer de cette façon les huit suivantes, il faudrait donc commencer par les ramener de même à la forme canonique, en ayant recours pour cela aux formules de la théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques. Or, les résultats auxquels on

---

étroitement par la définition précédente de droite (38), sous peine de perdre le bénéfice de formules importantes de la théorie des fonctions elliptiques, telles que celle-ci par exemple

$$(\delta)\qquad KJ_1 - JK_1 = \frac{\pi}{2},$$

dont nous comptons précisement nous servir un peu plus loin pour les applications de notre théorie.

Répétons enfin, en terminant, que si l'on n'attribue d'ordinaire aucune importance à cette remarque, cela tient à ce qu'on ne spécifie pas, ainsi que nous l'avons déjà dit, la détermination du radical dans les expressions (14) ni (39) de la quantité K_1, ou en d'autres termes, parce que la quantité iK_1 n'est définie généralement que comme la moitié de la période imaginaire du sinus d'amplitude, laquelle peut être représentée indifféremment par $+ 2iK_1$ ou $- 2iK_1$.

parviendrait ainsi, seront fournis plus aisément, sans faire appel à cette théorie, par la considération de huit relations linéaires très simples que nous allons rencontrer entre les douze quantités précitées, et qui permettront très facilement d'exprimer en fonction des quatre premières calculables immédiatement par les dites séries, les huit autres qu'il s'agit également d'évaluer.

Ces relations peuvent être établies, soit en basant les raisonnements sur la seule considération des formules (21) et (23), ainsi que de celles (26) et (29) qui s'en déduisent immédiatement, et adoptant pour les douze intégrales considérées leurs premières définitions (14) et (38), soit, au contraire, en partant, pour les douze quantités considérées à la fois, de leur seconde définition comme intégrales des différentielles algébriques (39) et (40), et calculant alors directement les dites intégrales à l'aide de changements de variables.

Toutefois nous devons dire que bien que ces deux méthodes présentent une netteté et par suite une certitude égales, grâce à la distinction des signes des radicaux que nous avons spécifiés dans les définitions (39) et (40), la première méthode nous semble préférable, en raison de ce que les définitions (14) et (38) des douze intégrales complètes sur lesquelles elle est basée n'exigent pas, comme les définitions (39) et (40) sur lesquelles repose la seconde, une convention spéciale relative au chemin suivi par la variable d'intégration, chacun de ces symboles (14) et (38) offrant une signification parfaitement déterminée, quel que soit celui des trois modules que l'on considère, en l'entendant dans le sens habituel propre aux variables réelles (*).

(*) En effet, d'une part, dans les six intégrales du type (14), les deux limites étant uniformément 0 et 1, c'est-à-dire toutes deux réelles, aucune considération n'exige que l'on attribue à la variable d'intégration un autre sens que celui d'une variable réelle. Et d'autre part, pour celles des six intégrales complètes comprises sous les deux types (38) dont l'une des limites tout au moins est imaginaire, et pour lesquelles par conséquent il semble au premier abord que la variable d'intégration ne puisse être envisagée que comme une variable imaginaire dont la notion du chemin suivi dans l'intégration constituera dès lors un élément essentiel de la définition desdits symboles, il y a lieu d'observer qu'au contraire le sens de ces expressions est complètement indépendant en réalité du chemin adopté pour l'intégration, en raison de ce que le résidu de la fonction $\mathrm{sn}^2 z$ étant nul pour l'un quelconque des infinis de $\mathrm{sn}\, z$, l'intégration, quel que soit le chemin suivi

En raison de cette supériorité inhérente à la première définition des douze intégrales complètes (41), et par suite aussi à la méthode basée sur leur considération exclusive, c'est à l'aide de cette première méthode que nous établirons en premier lieu les quatre groupes de relations que nous nous proposons de découvrir; puis, ces relations étant ainsi obtenues une première fois sans restrictions d'aucune sorte, quant à la signification des intégrales, nous les retrouverons ensuite, également sans aucune incertitude quant aux signes, à l'aide de la seconde méthode, qui, considérée isolément, eût peut-être inspiré moins de confiance, en raison des conventions spéciales sur lesquelles elle repose.

Par l'une comme par l'autre méthode, d'ailleurs, nous chercherons d'abord les relations qui pourront exister entre les intégrales de première espèce seulement, puis celles où entreront les intégrales de deuxième espèce; et, dans chacun de ces deux cas, nous arriverons encore à deux groupes de relations distincts, l'un se rapportant à des quantités exclusivement réelles, et l'autre à des quantités imaginaires seulement, parmi les douze intégrales envisagées (41).

(Ire *Méthode.*) Bornons donc tout d'abord notre attention aux six intégrales de première espèce (14) qui fournissent les périodes des différentes fonctions elliptiques relatives à nos trois coordonnées u, v, w.

A. En premier lieu, pour les périodes réelles (*), les formules (21), dans lesquelles le premier membre se reproduit au

---

par la variable z, ne donnera qu'une seule et unique détermination pour l'intégrale envisagée (38). [Voir HERMITE, *Note sur la Théorie des Fonctions Elliptiques* (insérée à la fin du Tome II de la 6e Édition du *Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, de LACROIX, 1862), aux pages 81-82 de cette Note]. D'où il résulte immédiatement que chacun de ces symboles du type (38) pourra être entendu dans le sens propre aux variables réelles, c'est-à-dire comme la différence $f(b) - f(a)$, pour les deux limites a et b de l'intégrale envisagée, de la fonction $f(z) + C$, qui représenterait l'intégrale indéfinie, z étant supposée réelle, de la différentielle $k^2 \operatorname{sn}^2(z, k)\, dz$.

(*) Cette distinction, formulée en ces termes par opposition à l'article B ci-après, semblera peut-être inexacte tout à l'heure, en présence des relations (42) auxquelles nous

signe près, lorsque l'on y fait varier la coordonnée v de la quantité réelle $2K'$, et de même aussi le dernier membre lorsque la même variable v y varie de l'autre quantité réelle $2kK_1$ exigent ainsi que l'on ait simultanément

$$(41^{bis}) \qquad 2K' = m.2kK_1 \qquad \text{et} \qquad 2kK_1 = n\ 2K',$$

m et n étant deux entiers, ou en multipliant membre à membre,

$$4K'.kK_1 = mn.4kK_1.K', \qquad \text{ou} \qquad 1 = mn,$$

condition qui ne peut être satisfaite qu'en prenant $m = n = 1$, du moment que tous les éléments des deux intégrales K_1 et K' étant positifs, de même que le module k par définition, les deux nombres m et n dans les égalités (41bis) sont tous deux forcément positifs. Et par conséquent l'on aura, en permutant les trois quantités a^2, b^2, c^2, ou l^2, m^2, n^2, la première série de relations

$$(42) \qquad K' = kK_1, \qquad K'' = k'K'_1, \qquad K = k''K''_1,$$

laquelle se déduirait également à l'aide d'un raisonnement semblable, de la considération du second groupe de formules (23) (*).

Les trois relations que nous venons d'obtenir si aisément nous

allons arriver, et dont la seconde a lieu précisément entre quantités manifestement imaginaires (page 413, *au bas*). Mais elle tirera sa justification de ce fait que nous établirons dans un instant, à savoir, que ce même groupe (42) étant réuni au groupe suivant analogue (47), ils ne fournissent ensemble que *quatre* équations distinctes seulement au lieu de *six*, en sorte que l'on peut faire abstraction dans chacun d'eux d'une équation, soit l'équation du milieu par exemple : auquel cas les deux équations extrêmes, seules restantes comme distinctes, auront bien lieu cette fois entre quantités, exclusivement réelles pour le premier groupe (42), et de même exclusivement imaginaires pour le second groupe (47).

La même remarque s'appliquera, exactement dans les mêmes termes, pour la distinction semblable que nous serons conduits à formuler pareillement un peu plus loin, à propos des relations analogues, dans lesquelles interviendront les intégrales complètes de deuxième espèce.

(*) En effet, dans ces formules (23), le second membre se reproduisant cette fois en grandeur et en signe lorsque l'on y fait varier la coordonnée w' de la quantité réelle $2k_1K$, et de même aussi le premier membre, lorsque la coordonnée w y varie de $2iK''_1$, ou, ce qui est la même chose, la coordonnée w' de $2K''_1$, il suit encore nécessairement de là,

permettent de compléter sur un point important les résultats déjà acquis relativement aux limites de variation de nos trois coordonnées. En effet, nous avons vu un peu plus haut que l'on atteignait tous les points de l'espace en faisant varier u de $-$ K à $+$ K, v de $-$ K′ à $+$ K′, et w de $- iK''_1$ à $+ iK''_1$. Il était clair, dores et déjà, relativement à la première, le module correspondant k étant réel et plus petit que l'unité, que pour les valeurs positives de cette coordonnée, c'est-à-dire par conséquent pour u compris entre 0 et K, les trois fonctions elliptiques de u, savoir sn u, cn u, et dn u étaient toutes trois positives. Or, ces dernières relations étant rapprochées des formules (21) et (23) montrent qu'une circonstance analogue se produit à l'égard des deux autres coordonnées v et w, ce qui pouvait ne pas sembler évident jusqu'à présent, les deux modules correspondants k' et k'' n'étant plus cette fois canoniques. En effet, v étant compris entre 0 et $K' = kK_1$, $\frac{v}{k}$ varie entre 0 et K_1, et de même $w = iw'$ variant entre 0 et iK''_1, ou w' entre 0 et $K''_1 = \frac{1}{k''} K = k_1 K$, $\frac{w'}{k_1}$ varie entre 0 et K, et il est manifeste, en conséquence à présent, que les numérateurs et dénominateurs des derniers membres de ces deux groupes de formules (21) et (23) sont tous à la fois positifs, ce qui démontre le fait énoncé. Enfin, les mêmes considérations font voir encore que, quelles que soient les valeurs positives

---

K''_1 étant également une quantité réelle (page 424, *au bas*), que l'on aura à la fois

$$2K''_1 = m.2k_1K, \qquad \text{et} \qquad 2k_1K = n.2K''_1,$$

m et n étant encore, comme tout à l'heure, deux entiers positifs, et par suite, en multipliant membre à membre,

$$4K''_1.k_1K = 4mn.k_1K\ K''_1, \qquad \text{ou} \qquad 1 = mn,$$

condition qui exige de nouveau $m = n = 1$, k_1, K, et K''_1 étant encore tous trois positifs, et réduit dès lors les égalités précédentes simplement celle-ci

$$K''_1 = k_1K, \qquad \text{ou} \qquad K = \frac{1}{k_1} K''_1 = k''K''_1,$$

eu égard à la valeur (18) de k_1, et l'on retrouve ainsi la troisième des relations déjà obtenues ci-dessus (42).

ou négatives que prendront les trois coordonnées u, v, w, le cosinus et le delta d'amplitude de ces coordonnées resteront constamment positives, le sinus d'amplitude seul pouvant recevoir des valeurs négatives, en même temps que la coordonnée elle-même.

Nous aurons l'occasion de constater dans la suite l'utilité de cette remarque.

B. On obtiendra encore trois relations analogues, en appliquant un raisonnement semblable à la période imaginaire correspondante au même module k', relativement auquel nous envisagions tout à l'heure la période réelle. En effet, dans ces mêmes formules (21), les périodes relatives aux premiers membres étant K' et iK'_1, et celles relatives aux derniers membres étant de même kK_1 et ikK, on aura donc, en partant de la considération de la période imaginaire iK'_1, puis permutant ensuite, trois égalités de la forme

$$(43)\qquad \left\{ \begin{aligned} &iK'_1 = k(mK_1 + niK), \qquad iK''_1 = k'(mK'_1 + niK'), \\ &iK_1 = k''(mK''_1 + niK''), \end{aligned} \right.$$

m et n étant encore deux entiers, positifs ou négatifs cette fois, qu'il s'agit de déterminer.

A cet effet, d'une part, multipliant la seconde de ces égalités par i, et tenant compte de la précédente, ainsi que de la première (42), l'on trouvera tout d'abord

$$\begin{aligned} -K''_1 = k'm.iK'_1 - k'n.K' &= k'm.k(mK_1 + niK) - k'n\, kK_1 \\ &= kk'(m^2K_1 + mniK - nK_1), \end{aligned}$$

puis, en faisant abstraction des deux membres intermédiaires, multipliant par k'', et faisant tout passer dans le dernier membre,

$$k''K''_1 + kk'k''\left[(m^2 - n)K_1 + mn\, iK\right] = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la première relation (6), et de la dernière (42),

$$K + i\left[(m^2 - n)K_1 + mn\, iK\right] = 0,$$

ou

$$(44) \qquad K(1 - mn) = (n - m^2) i K_1.$$

D'autre part, la troisième (43) peut être écrite successivement, en tenant compte des deux dernières (42), et de la première de ce même groupe (43),

$$iK_1 = m . k'' K_1'' + nik'' . K'' = m . K + nik'' . k' K_1'$$
$$= mK + nk'k'' . iK_1' = mK + nk'k'' . k(mK_1 + niK),$$

c'est-à-dire simplement, eu égard encore à la même relation (6),

$$iK_1 = mK + ni(mK_1 + niK),$$

ou

$$(45) \qquad iK_1(1 - mn) = (m - n^2) K.$$

Or, m et n désignant par hypothèse deux nombres entiers, il est clair que ces deux égalités (44) et (45), dans lesquelles l'un des deux membres est réel tandis que l'autre est imaginaire, ne pourront avoir lieu que si ces deux membres sont nuls l'un et l'autre, c'est-à-dire qu'à la condition d'avoir à la fois :

$$(46) \qquad 1 - mn = 0, \qquad n - m^2 = 0, \qquad m - n^2 = 0.$$

Et dès lors, la première de ces trois équations donnant, par l'élimination de n, celle-ci

$$1 - m^3 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (1 - m)(1 + m + m^2) = 0,$$

dont l'unique racine réelle, savoir $m = 1$, jointe à la valeur $n = 1$ qui en résulte par la seconde équation, vérifient à la fois ces trois mêmes conditions (46), les relations posées de prime abord (43), dans lesquelles les valeurs $m = n = 1$ sont ainsi de nouveau seules admissibles, se réduiront donc par là simplement aux trois suivantes

$$(47) \qquad iK_1' = k(K_1 + iK), \qquad iK_1'' = k'(K_1' + iK'), \qquad iK_1 = k''(K_1'' + iK''),$$

que nous retrouverons également tout à l'heure par une autre voie.

En outre ces mêmes valeurs de m et n transformant en identités chacune des deux égalités (44) et (45), qui, en tant que combinaisons linéaires des deux systèmes (42) et (43), pouvaient remplacer deux équations quelconques de ces systèmes, on voit par là que les six équations (42) et (47) se réduiront nécessairement dès lors à quatre distinctes seulement, qui pourront fournir déjà, comme nous nous le proposions, les valeurs des quatre intégrales de première espèce K', K'_1, K'', K''_1, en fonction des deux homologues canoniques K et K_1.

En effet, considérant seulement la première et la troisième équation de chacun des deux groupes (42) et (47), l'on en déduira, par une combinaison facile, et en ayant égard à la valeur (18) de k_1, ces quatre autres égalités,

$$\left\{\begin{array}{ll} K' = kK_1, & K'_1 = -ik(K_1 + iK) = k(K - iK_1), \\ K''_1 = \dfrac{1}{k''}K = k_1K, & iK_1 = k''K''_1 + ik''K'' = K + \dfrac{i}{k_1}K'', \end{array}\right.$$

desquelles, en intervertissant leur ordre, on tirera finalement les quatre valeurs

$$(48) \qquad \left\{\begin{array}{ll} K' = kK_1 & K'_1 = k(K - iK_1), \\ K'' = k_1(K_1 + iK), & K''_1 = k_1K, \end{array}\right.$$

qui vérifient bien identiquement d'ailleurs, ainsi qu'il est très aisé de le constater, les deux équations du milieu de chacun des groupes (42) et (47), équations que nous n'avons pas fait intervenir dans leur calcul (*).

(*) En effet, si l'on effectue dans ces deux équations la substitution des valeurs (48) que nous venons de trouver, elles deviennent les suivantes

$$k_1(K_1 + iK) = k'\ k(K - iK_1), \qquad ik_1K = k'.[k(K - iK_1) + ikK_1],$$

ou, en ordonnant alors par rapport aux quantités K et K_1,

$$(K - iK_1)(kk' - ik_1) = 0, \qquad K(kk' - ik_1) = 0,$$

dans lesquelles on a, en vertu de la valeur (18) de k_1, et de la dernière relation (6),

$$kk' - ik_1 = kk' - \frac{i}{k'} = 0,$$

ce qui établit le fait énoncé.

C. Passons maintenant aux intégrales de seconde espèce.

Pour celles qui sont réelles tout d'abord (*), remarquant que la dernière des égalités (21) donnera, en y faisant $v = iv_1$, puis ayant égard ensuite successivement à la troisième formule (176bis) et à la première (177bis) du Chapitre III,

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{dn}(v, k') &= \frac{1}{\mathrm{dn}\left(\frac{v}{k}, k_1\right)} = \frac{1}{\mathrm{dn}\left(\frac{iv_1}{k}, k_1\right)} = \frac{\mathrm{cn}\left(\frac{v_1}{k}, k\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{v_1}{k}, k\right)} \\ &= \mathrm{sn}\left(\frac{v_1}{k} + \mathrm{K}, k\right) = -\mathrm{sn}\left(\frac{-iv}{k} - \mathrm{K}, k\right) = \mathrm{sn}\left(\frac{iv}{k} + \mathrm{K}, k\right)\end{aligned}\right.$$

l'on en conclura immédiatement, d'après la première définition (38),

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{K}' - \mathrm{J}' &= \int_0^{\mathrm{K}'} dv - \int_0^{\mathrm{K}'} k'^2 \mathrm{sn}^2(v, k')\,dv = \int_0^{\mathrm{K}'} \left[1 - k'^2 \mathrm{sn}^2(v, k')\right] dv \\ &= \int_0^{\mathrm{K}'} \mathrm{dn}^2(v, k')\,dv = \int_0^{\mathrm{K}'} \mathrm{sn}^2\left(\frac{iv}{k} + \mathrm{K}, k\right) dv.\end{aligned}\right.$$

Si donc l'on fait à présent

$$(51)\quad z = \frac{iv}{k} + \mathrm{K}, \qquad \text{d'où} \qquad dz = \frac{i}{k}\,dv \qquad \text{ou} \qquad dv = -ik\,dz,$$

les nouvelles limites de la variable z, dans la dernière de ces intégrales, étant, eu égard à la valeur (48) de K',

$$\mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad \frac{i\mathrm{K}'}{k} + \mathrm{K} = i\mathrm{K}_1 + \mathrm{K},$$

l'on trouvera donc, en effectuant cette substitution linéaire dans la dernière quadrature des égalités (50), puis tenant compte de la

---

(*) Voir la note de la page 438, *dernier alinéa*.

seconde définition (38),

$$K' - J' = \int_{K}^{K+iK_1} \mathrm{sn}^2(z, k).(-ik)\,dz = \frac{-i}{k}\int_{K}^{K+iK_1} k^2\,\mathrm{sn}^2(z, k)\,dz$$

$$= \frac{-i}{k}.\, iJ_1 = \frac{1}{k} J_1,$$

d'où, par conséquent, les trois nouvelles égalités :

(52) $$J_1 = k(K' - J'), \qquad J'_1 = k'(K'' - J''), \qquad J''_1 = k''(K - J).$$

D. Semblablement, pour les intégrales de seconde espèce qui sont imaginaires, si l'on pose encore, comme dans les égalités (28),

$$w'' = \frac{-iw}{k_1} + K + iK_1, \quad \text{d'où} \quad dw'' = \frac{-i}{k_1} dw, \quad \text{ou} \quad dw = ik_1\,dw'',$$

les valeurs de cette variable w'' étant $K + iK_1$ pour $w = 0$, et pour $w = K''$, eu égard à la valeur (48) de K'', celle-ci

$$\frac{-iK''}{k_1} + K + iK_1 = \frac{-i}{k_1}.\, k_1(K_1 + iK) + K + iK_1 = 2K,$$

la première des définitions (38) donnera donc alors, en tenant compte de la première égalité (29),

$$J'' = \int_0^{K''} k''^2\,\mathrm{sn}^2(w, k'')\,dw = \int_{K+iK_1}^{2K} k''^2\,\mathrm{dn}^2(w'', k).\, ik_1\,dw''$$

$$= -ik'' \int_{2K}^{K+iK_1} k''k_1.\,\mathrm{dn}^2(w'', k)\,dw'',$$

ou plus simplement, en ayant égard de nouveau à la valeur (18) de k_1,

$$J'' = -ik''\int_{2K}^{K+iK_1} \mathrm{dn}^2(w'', k)\,dw'' = -ik''\int_{2K}^{K+iK_1}\left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(w'', k)\right]dw''$$

$$= -ik''\left[\int_{2K}^{K+iK_1} dw'' - \int_{2K}^{K+iK_1} k^2\,\mathrm{sn}^2(w'', k)\,dw''\right]$$

$$= -ik''\left[(K + iK_1 - 2K) - \left(\int_0^{K+iK_1} k^2\,\mathrm{sn}^2(w'', k)\,dw'' - \int_0^{2K} k^2\,\mathrm{sn}^2(w'', k)\,dw''\right)\right]$$

$$= -ik''\left[(iK_1 - K) - (J + iJ_1 - 2J)\right] \quad (*)$$

$$= -ik''\left[i(K_1 - J_1) - (K - J)\right] = k''\left[K_1 - J_1 + i(K - J)\right];$$

d'où l'on conclura, en combinant d'abord la dernière de ces égalités avec la troisième du groupe précédent (52),

$$(53) \qquad J'' = k''(K_1 - J_1) + i.k''(K - J) = k''(K_1 - J_1) + iJ_1'',$$

et de là ensuite, en permutant, le nouveau groupe d'égalités :

$$(54) \quad J - iJ_1 = k(K_1' - J_1'), \quad J' - iJ_1' = k'(K_1'' - J_1''), \quad J'' - iJ_1'' = k''(K_1 - J_1).$$

De même que les six relations (42) et (47) entre les six intégrales de première espèce seules, les six dernières (52) et (54) qui contiennent en plus les six intégrales de seconde espèce, se réduisent de nouveau à quatre distinctes seulement, qui fournissent en conséquence les valeurs demandées des quatre intégrales non canoniques J', J_1', J'', J_1'' ; car, d'une part, les premières équations de chacun de ces deux groupes (52) et (54) étant récrites ainsi qu'il suit

$$K' - J' = \frac{1}{k} J_1, \qquad K_1' - J_1' = \frac{1}{k}(J - iJ_1),$$

(*) En effet, si l'on fait $x = 0$ dans la formule fondamentale relative à la fonction de deuxième espèce, savoir

$$Z(x + 2K) = Z(x) + 2J, \qquad \text{il reste} \qquad Z(2K) = 2J.$$

[Voir Hermite, *Note sur la Théorie des Fonctions Elliptiques* (déjà citée dans la note de la page 437), à la page 84 de ladite Note].

donneront, en tenant compte des valeurs (48) de K' et K'_1,

$$(55)\quad \begin{cases} J' = K' - \frac{1}{k} J_1 = kK_1 - \frac{1}{k} J_1, \\ J'_1 = K'_1 - \frac{1}{k}(J - iJ_1) = k(K - iK_1) - \frac{1}{k}(J - iJ_1) = kK - \frac{1}{k} J - i\left(kK_1 - \frac{1}{k} J_1\right); \end{cases}$$

et, d'autre part, les dernières équations des mêmes groupes donneront de même, ainsi que nous l'avions obtenu en premier lieu tout à l'heure, et eu égard à la valeur (18) de k_1,

$$(56)\qquad J''_1 = \frac{1}{k_1}(K - J), \qquad J'' = \frac{1}{k_1}\left[K_1 - J_1 + i(K - J)\right].$$

Or, ces quatre valeurs étant ainsi obtenues, il est bien facile de nouveau de s'assurer qu'elles vérifient encore identiquement, conjointement avec les valeurs (48) précédemment acquises pour les intégrales de première espèce, les équations du milieu de chacun des deux groupes (52) et (54), équations que nous n'avons point fait intervenir dans le calcul des quatre valeurs en question (55) et (56) (*).

(*) En effet, si l'on effectue la substitution de ces valeurs (48), (55), et (56) dans les deux équations en question, on les transformera par là, quant à la seconde (52), dans celle-ci

$$kK - \frac{1}{k} J - i\left(kK_1 - \frac{1}{k} J_1\right) = k'\left[k_1(K_1 + iK) - \frac{1}{k_1}\left\{K_1 - J_1 + i(K - J)\right\}\right],$$

ou en ordonnant,

$$(\alpha)\qquad (K - iK_1)\left[k - ik'\left(k_1 - \frac{1}{k_1}\right)\right] + (J - iJ_1)\left[\frac{1}{k} + \frac{ik'}{k_1}\right] = 0,$$

et de même, quant à la seconde (54), dans la suivante

$$kK_1 - \frac{1}{k} J_1 - i\left[kK - \frac{1}{k} J - i\left(kK_1 - \frac{1}{k} J_1\right)\right] = k'\left[k_1 K - \frac{1}{k_1}(K - J)\right],$$

ou bien en réduisant, et faisant passer tout dans le second membre,

$$K\left[ik + k'\left(k_1 - \frac{1}{k_1}\right)\right] - J\left[\frac{i}{k} - \frac{k'}{k_1}\right] = 0,$$

En résumé, les quatre intégrales de première espèce non canoniques étant déjà données par les formules (48), les quatre intégrales correspondantes de deuxième espèce le seront de même par celles-ci :

$$(57)\quad \begin{cases} J' = kK_1 - \frac{1}{k} J_1, & J'_1 = kK - \frac{1}{k} J - i\left(kK_1 - \frac{1}{k} J_1\right), \\ J'' = \frac{1}{k_1}\left[K_1 - J_1 + i(K - J)\right], & J''_1 = \frac{1}{k_1}(K - J). \end{cases}$$

Ces deux groupes d'expressions résolvent complètement la question que nous avions en vue dans ce paragraphe, à savoir le calcul numérique de celles des douze intégrales complètes (41) qui ne se présentent pas sous la forme canonique ; car, pour les quatre premières dont les modules sont canoniques, les deux de première espèce étant donnée par les séries très connues

$$(58)\quad \begin{cases} K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots\right], \\ K_1 = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4 + \dots + \left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\right)^2 k_1^{2n} + \dots\right], \end{cases}$$

---

ou encore, en multipliant par $-i$,

$$(\beta)\qquad K\left[k - ik'\left(k_1 - \frac{1}{k_1}\right)\right] - J\left[\frac{1}{k} + \frac{ik'}{k_1}\right] = 0.$$

Or, il est bien aisé de reconnaître que les deux coefficients entre crochets qui sont les mêmes dans ces deux dernières équations (α) et (β) sont séparément nuls, car l'on a, comme ci-dessus dans la note de la page 443, successivement, en vertu des premières relations (13) et (6), ainsi que de la valeur (18) de k_1,

$$\begin{cases} k - ik'\left(k_1 - \frac{1}{k_1}\right) = k - ik'\frac{k_1^2 - 1}{k_1} = k + ik'k''k^2 = ik(-i + kk'k'') = 0, \\ \frac{1}{k} + \frac{ik'}{k_1} = \frac{1}{k} + ik'k'' = \frac{i}{k}\left(-i + kk'k''\right) = 0; \end{cases}$$

d'où il suit que ces mêmes équations (α) et (β) sont vérifiées identiquement, ce qui établit précisément le fait annoncé, relativement aux équations envisagées (52) et (54).

et, de même, les deux de seconde espèce pouvant être représentées semblablement à l'aide des expressions

$$(59)\qquad J = \frac{\pi^2}{2}\mathfrak{J}, \qquad J_1 = \mathfrak{J}\log\frac{4}{k} + 1 - (\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_1) - \frac{2}{3.4}(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_2) - \frac{2}{5.6}(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_3) - \cdots$$

dans lesquelles $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}_n$ désignent respectivement les développements (l'un infini, l'autre fini, de n termes seulement) (*),

$$(60)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{J} &= \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \frac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^6 + \frac{7}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^8 + \cdots\cdots \\ \mathfrak{J}_n &= \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \cdots\cdots + \frac{2n-3}{2n-2}\left(\frac{1.3.\ldots\ldots(2n-5)}{2.4.\ldots\ldots(2n-4)}\right)^2 k^{2n-2} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\,\frac{2n-1}{2n}\left(\frac{1.3.\ldots\ldots(2n-3)}{2.4.\ldots\ldots(2n-2)}\right)^2 k^{2}_{n}, \end{aligned} \right.$$

les valeurs numériques des quatre premières quantités (41) étant supposées calculées à l'aide de ces développements (58) et (59)-(60) avec telle approximation que l'on voudra, il suffira, dès lors, de reporter les valeurs ainsi obtenues dans les expressions en question (48) et (57) pour avoir dans les mêmes conditions, celles des huit autres quantités (41), qu'il s'agissait de calculer.

Nous possédons donc désormais tous les éléments nécessaires à l'introduction dans les calculs, à la place des coordonnées rectilignes, de nos coordonnées u, v, w, dans les conditions où les formules de transformation (11) nous les présentent, c'est-à-dire engagées sous des fonctions elliptiques de modules respectif k, k', k'', et nous sommes maintenant en mesure de nous servir, pour ces calculs, de toutes les formules de la théorie des fonctions elliptiques, aussi bien celles qui ont rapport aux fonctions de seconde espèce que celles qui concernent les fonctions de première espèce, et dans l'un comme dans l'autre cas, la

(*) HERMITE, *Note sur la Théorie des Fonctions Elliptiques* (citée plus haut dans la note de la page 437), pp. 83-84 de cette Note.

facilité de l'interprétation numérique des résultats de ces calculs nous est garantie par les expressions que nous venons d'obtenir.

L'importance du premier groupe (48) de ces expressions, relatif aux intégrales complètes de première espèce, ressort déjà avec évidence de ce fait que K' et K_1'' marquent, comme nous l'avons vu, les limites respectives des variations en valeur absolue des coordonnées géométriques v et w'. Nous aurons dans la suite l'occasion de constater également, sur plusieurs exemples, l'intérêt du second groupe (57), ou ce qui est la même chose, des deux séries de formules (52) et (54), relatives aux intégrales complètes de deuxième espèce.

Enfin ce premier calcul, préliminaire indispensable de l'utilisation pratique et sûre de nos coordonnées u, v, w, suffit déjà à lui seul pour faire comprendre le service que peut rendre dans cette théorie la permutation circulaire des modules réalisée par nos formules, puisque nous avons pu, grâce à cette seule permutation, et sans avoir recours aux formules générales de la transformation des fonctions elliptiques, résoudre aisément toute une série de problèmes, qui semblaient essentiellement tributaires de cette théorie beaucoup plus élevée.

(IIe *Méthode.*) On peut encore établir les mêmes relations en partant de la définition des douze intégrales complètes sous forme d'intégrales de différentielles algébriques, c'est-à-dire des définitions (39) [ou (14)] et (40), et les transformant à l'aide de changements de variables convenablement choisis.

A titre de confirmation des résultats qui précèdent, nous allons les retrouver de nouveau par cette seconde méthode, en ayant soin de considérer successivement les mêmes quantités (41) encore dans le même ordre où nous les avons déjà envisagées tout à l'heure.

A. Pour les intégrales complètes de première espèce K' et K_1'' (33) et (34), dont tous les éléments sont réels, on pourra leur appliquer l'un ou l'autre des deux procédés de transformation suivants, qui nous seront également utiles en vue des résultats subséquents.

a) Pour la période réelle K′ (33), rappelant les valeurs (13) et (17) de k_1^2, ainsi que la seconde égalité (5), qui donnent

$$k^2 + k_1^2 = 1\,, \qquad k^2k''^2 = \frac{-1}{k''^2} = -k_1^2, \qquad k_1^2 + k^2k''^2 = 0,$$

nous considérerons la transformation

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned}
&z = \frac{kx}{\sqrt{1-k_1^2x^2}}, \qquad dz = k\,\frac{\sqrt{1-k_1^2x^2}+\dfrac{k_1^2x^2}{\sqrt{1-k_1^2x^2}}}{1-k_1^2x^2}\,dx = \frac{k\,dx}{(1-k_1^2x^2)^{\frac{3}{2}}},\\
&z^2(1-k_1^2x^2) = k^2x^2, \qquad z^2 = (k^2+k_1^2z^2)\,x^2, \qquad x = \frac{z}{\sqrt{k^2+k_1^2z^2}},\\
&1-z^2 = 1-\frac{k^2x^2}{1-k_1^2x^2} = \frac{1-(k_1^2+k^2)\,x^2}{1-k_1^2x^2} = \frac{1-x^2}{1-k_1^2x^2},\\
&1-k''^2z^2 = 1-k''^2\,\frac{k^2x^2}{1-k_1^2x^2} = \frac{1-(k_1^2+k''^2k^2)\,x^2}{1-k_1^2x^2} = \frac{1}{1-k_1^2x^2},\\
&\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k''^2z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1-x^2}{1-k_1^2x^2}\right)\left(\dfrac{1}{1-k_1^2x^2}\right)}}\,\frac{k\,dx}{(1-k_1^2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k.dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}},
\end{aligned}\right.$$

laquelle donnant, d'après la dernière équation de la seconde ligne de ce tableau, $x = 0$ pour $z = 0$, et $x = 1$ pour $z = 1$, fournira dès lors immédiatement la valeur

$$\mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k''^2z^2)}} = k\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}} = k\mathrm{K}_1;$$

d'où, en permutant les trois relations

(62) $\qquad \mathrm{K}' = k\mathrm{K}_1, \qquad \mathrm{K}'' = k'\mathrm{K}_1', \qquad \mathrm{K} = k''\mathrm{K}_1'',$

qui reproduisent les relations déjà trouvées (42).

b) Si l'on aime mieux calculer, à la place de K′, l'autre intégrale réelle K_1'' (34), l'on pourra prendre à cet effet, d'abord la

transformation réelle (le module k' étant, on s'en souvient, purement imaginaire), basée sur la valeur (17) de $k_1''^2$ qui donne $k'^2 k_1''^2 = 1$, savoir

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned}
& z = \frac{-ik'x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad dz = -ik' \frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\, dx = \frac{-ik'.dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
& z^2(1-x^2) = -k'^2x^2, \qquad z^2 = (z^2 - k'^2)x^2, \qquad x = \frac{z}{\sqrt{z^2 - k'^2}}, \\
& 1 - z^2 = 1 + \frac{k'^2x^2}{1-x^2} = \frac{1 - x^2 + k'^2x^2}{1-x^2} = \frac{1-(1-k'^2)x^2}{1-x^2} = \frac{1-k_1'^2x^2}{1-x^2}, \\
& 1 - k_1''^2z^2 = 1 + k_1''^2 \frac{k'^2x^2}{1-x^2} = \frac{1 - x^2 + k_1''^2k'^2x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}, \\
& \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1''^2z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1-k_1'^2x^2}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)}} \frac{-ik'.dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-ik'.dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1'^2x^2)}},
\end{aligned}\right.$$

laquelle donnant cette fois, encore d'après la dernière équation de la seconde ligne et la valeur (18) de k_1', $x = 0$ pour $z = 0$, et pour $z = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2}} = \frac{1}{k'_1} = k$, fournira donc en premier lieu la valeur

$$(64)\qquad K_1'' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1''^2z^2)}} = -ik' \int_0^k \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1'^2x^2)}}.$$

Puis faisant alors, dans la seconde intégrale, en tenant compte encore une fois de la valeur (18) de k_1',

$$(65)\qquad y = k_1'x = \frac{x}{k}, \qquad x = ky, \qquad dx = k\,dy,$$

l'on obtiendra de nouveau, eu égard à la dernière égalité (6), cette autre expression

$$K_1'' = -ik' \int_0^1 \frac{k\,dy}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}} = -ik'.k \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{1}{k''} K,$$

c'est-à-dire la troisième des relations précédentes (62), de laquelle on déduirait encore, comme tout à l'heure, les deux autres.

B. Semblablement pour les périodes imaginaires telles que iK'_1, partant de la définition de droite (14) pour K'_1, savoir

$$(65^{bis})\qquad K'_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2_1x^2)}},$$

dans laquelle le radical est supposé pris avec la détermination positive, nous appliquerons à cette intégrale la transformation très simple, basée sur la valeur (18) de k'_1,

$$(65^{ter})\quad \left\{\begin{array}{l} x = kz = \dfrac{z}{k'_1}, \qquad dx = kdz, \qquad z = \dfrac{x}{k} = k'_1x, \\ \text{pour } x = 0, \quad z = 0, \qquad \text{pour } x = 1, \quad z = \dfrac{1}{k}; \\ \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2_1x^2)}} = \dfrac{kdz}{\sqrt{(1-k^2z^2)(1-z^2)}}, \end{array}\right.$$

par l'effet de laquelle cette intégrale deviendra :

$$K'_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2_1x^2)}} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{kdz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$= k\left[\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\right].$$

Or, le radical étant pris positivement par hypothèse dans toutes ces intégrales, il résulte immédiatement des définitions (39) et des conventions admises à leur sujet, relativement aux déterminations des radicaux qui y figurent, que les deux dernières de ces intégrales représentent, sans aucune ambiguité de signe, la première la quantité K, et la seconde la quantité $-iK_1$; c'est-

à-dire, qu'en faisant abstraction du membre intermédiaire, l'on aura l'égalité

$$K'_1 = k(K - iK_1),$$

d'où, en multipliant enfin par i, la première des trois relations

$$iK'_1 = k(K_1 + iK), \qquad iK''_1 = k'(K'_1 + iK'), \qquad iK_1 = k''(K''_1 + iK'').$$

C. On pourra de même obtenir les relations qui contiennent les intégrales complètes réelles de seconde espèce, en employant de nouveau l'un ou l'autre des deux procédés de transformation auxquels nous avons eu recours un peu plus haut (pp. 451-452), pour celle de première espèce.

a) Tirant des définitions de gauche (39) et (40), dans lesquelles le radical est supposé pris avec la détermination positive,

$$K' - J' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} - \int_0^1 \frac{k'^2z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$$
$$= \int_0^1 (1-k'^2z^2)\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

appliquons à cette intégrale réelle la transformation (61), déjà considérée à l'occasion de l'intégrale K'; les deux dernières lignes de ce tableau nous donneront évidemment, cette fois, les limites de z étant de nouveau 0 et 1 comme alors, l'expression

$$(66)\quad \begin{cases} K' - J' = \displaystyle\int_0^1 (1-k'^2z^2)\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = \int_0^1 \frac{1}{1-k_1^2x^2}\frac{k.dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}} \\ \qquad = k\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-k_1^2x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x^2}}, \text{(*)} \end{cases}$$

(*) Cette intégrale est bien finie et déterminée, car des quatre infinis de son élément, le seul compris dans les limites de l'intégration, savoir $x = 1$, est de l'ordre d'infinité $\frac{1}{2}$, et quant aux deux autres $x = \pm \frac{1}{k_1}$ dont l'ordre d'infinité est $\frac{3}{2}$, le module k étant cano-

le radical qui figure dans cette dernière expression étant donc pris encore avec la détermination positive.

Partant, d'autre part, de la définition de droite (40) de la quantité iJ_1, dans laquelle le radical est supposé pris cette fois avec la détermination négative, savoir

$$(67) \qquad iJ_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

appliquons à cette intégrale la transformation suivante, dans laquelle nous ne considérerons que des valeurs positives de z,

$$(68) \left\{ \begin{aligned} & t = \frac{1}{\sqrt{1-k_1^2z^2}} = (1-k_1^2z^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad dt = (1-k_1^2z^2)^{-\frac{3}{2}}.k_1^2zdz = \frac{k_1^2zdz}{(1-k_1^2z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & t^2(1-k_1^2z^2) = 1, \qquad t^2-1 = k_1^2t^2.z^2, \qquad z = \frac{\sqrt{t^2-1}}{k_1t}, \\ & 1-t^2 = 1 - \frac{1}{1-k_1^2z^2} = \frac{1-k_1^2z^2-1}{1-k_1^2z^2} = \frac{-k_1^2z^2}{1-k_1^2z^2}, \\ & 1-k^2t^2 = 1 - \frac{k^2}{1-k_1^2z^2} = \frac{1-k_1^2z^2-k^2}{1-k_1^2z^2} = \frac{(1-k^2)-k_1^2z^2}{1-k_1^2z^2} = \frac{k_1^2(1-z^2)}{1-k_1^2z^2}, \\ & \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{-k_1^2z^2}{1-k_1^2z^2}\right)\left(\frac{k_1^2(1-z^2)}{1-k_1^2z^2}\right)}} \frac{k_1^2zdz}{(1-k_1^2z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dz}{\sqrt{-(1-z^2)(1-k_1^2z^2)}}, \end{aligned} \right.$$

et qui donne, encore d'après la dernière équation de la seconde ligne, $z=0$ pour $t=1$, et pour $t=\frac{1}{k}$ la valeur $z=\frac{1}{k}\frac{\sqrt{1-k^2}}{k_1.\frac{1}{k}}=1$;

les première et dernière équations de ce tableau fourniront donc

---

nique, ils sont évidemment, aussi bien que le quatrième $x=-1$, situés en dehors du champ d'intégration. (Voir, si l'on veut, JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome II, § 76, page 85.)

alors pour l'intégrale ci-dessus (67) l'expression

$$iJ_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 t^2 . dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^1 \frac{k^2}{1-k_1^2 z^2} \frac{dz}{\sqrt{-(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}},$$

le radical étant donc encore supposé pris négativement; c'est-à-dire, sous forme explicite, en introduisant de nouveau la détermination positive du même radical, en vue de faciliter la comparaison avec les résultats qui précèdent,

$$iJ_1 = \int_0^1 \frac{k^2}{1-k_1^2 z^2} \frac{dz}{-i\sqrt{(1-z^2)(1-k_1^2 z^2)}},$$

et par conséquent, en divisant par i, puis comparant à la dernière expression (66), la détermination du radical étant alors la même de part et d'autre, on trouvera, sans ambiguité de signe, l'égalité

$$(69) \qquad J_1 = k^2 \int_0^1 \frac{dz}{(1-k_1^2 z^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-z^2}} = k.(K' - J'),$$

d'où, en permutant, les trois nouvelles relations :

$$(70) \qquad J_1 = k(K' - J'), \qquad J'_1 = k'(K'' - J''), \qquad J''_1 = k''(K - J).$$

b) On les retrouvera également, en employant les deux transformations successives dont nous nous sommes déjà servi précédemment (page 452) pour calculer l'intégrale de première espèce K''_1, savoir : en appliquant d'abord la première transformation (63) à la valeur de la quantité analogue de deuxième espèce J''_1 que l'on déduit immédiatement par double permutation circulaire de celle (69) obtenue tout à l'heure pour J_1, c'est-à-dire

$$J''_1 = k''^2 \int_0^1 \frac{dz}{(1-k''^2_1 z^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-z^2}},$$

le radical étant par conséquent encore supposé positif, transformation qui donnera cette fois, eu égard aux deux dernières lignes de ce tableau (63), les limites de z étant encore les mêmes que pour la quantité précitée K_1'' (64), cette autre valeur

$$J_1''=k''^2\int_0^1 \frac{1}{1-k_1''^2z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_1''^2z^2)}}=k''^2\int_0^k (1-x^2)\frac{-ik'.dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}};$$

puis, cela fait, en appliquant de même à ce résultat la seconde transformation (65), laquelle, en tenant compte de la première relation (6), qui donne $-ikk'k''=1$, fournira la nouvelle expression

$$J_1''=k''^2\int_0^1 (1-k^2y^2)\frac{-ik'.kdy}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}}=-ikk'k''.k''\int_0^1\frac{(1-k^2y^2)\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

$$=k''\left[\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}-\int_0^1\frac{k^2y^2dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right]=k''(K-J),$$

eu égard à la détermination supposée positive du radical dans les deux dernières intégrales : ce qui est, en ne considérant que les membres extrêmes seulement, la troisième des relations déjà obtenues tout à l'heure (70).

D. Pour les intégrales complètes imaginaires de deuxième espèce, enfin, appliquons encore au module k' les définitions (39) et (40), qui donnent

$$\left\{\begin{aligned} K' &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}, &\qquad J' &= \int_0^1 \frac{k'^2z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},\\ iK_1' &= \int_1^{\frac{1}{k'}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}, & iJ_1' &= \int_1^{\frac{1}{k'}} \frac{k'^2z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},\end{aligned}\right.$$

la détermination du radical étant d'après nos conventions la

même pour les deux expressions, séparément dans chacune des deux lignes que nous venons d'écrire ; nous obtiendrons dès lors, en retranchant membre à membre, respectivement dans chaque ligne, les égalités

$$\left\{\begin{aligned} K'-J' &= \int_0^1 \frac{(1-k'^2z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \\ i(K'_1-J'_1) &= \int_1^{\frac{1}{k'}} \frac{(1-k'^2z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = \int_1^{\frac{1}{k'}} \frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \end{aligned}\right.$$

le radical inférieur étant supposé pris positivement dans la première ligne, et négativement dans la seconde. D'où il suit, qu'en multipliant ces deux suites d'égalités respectivement par i et $-i$, puis faisant abstraction des membres intermédiaires, ce qui les changera dans celles-ci

$$i(K'-J') = \int_0^1 i\,\frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \qquad -i^2(K'_1-J'_1) = \int_1^{\frac{1}{k'}} -i\,\frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz,$$

dont la seconde deviendra, étant récrite comme la première avec la détermination supposée positive des deux radicaux,

$$K'_1-J'_1 = \int_1^{\frac{1}{k'}} i\,\frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz,$$

l'on aura donc, sans aucune ambiguité de signe, avec cette détermination positive des radicaux, en ajoutant à la première des égalités précédentes, et réunissant enfin les deux intégrales qui ne diffèrent alors que par les limites,

$$(71) \qquad K'_1-J'_1+i(K'-J') = \int_0^{\frac{1}{k'}} i\,\frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz.$$

Cela posé, rappelant les valeurs (13) et (17) de $k_1'^2$, appliquons maintenant à cette intégrale la transformation purement imaginaire, dans laquelle nous n'envisagerons que des valeurs positives de t,

$$(72)\quad \left\{\begin{array}{l}
z = \frac{1}{k'}\sqrt{1-t^2}, \qquad dz = \frac{-tdt}{k'\sqrt{1-t^2}}, \\
k'^2z^2 = 1-t^2, \qquad t^2 = 1-k'^2z^2, \qquad t = \sqrt{1-k'^2z^2}, \\
1-z^2 = 1-\frac{1-t^2}{k'^2} = \frac{k'^2-(1-t^2)}{k'^2} = \frac{-[(1-k'^2)-t^2]}{k'^2} = \frac{-(k_1'^2-t^2)}{k'^2}, \\
\sqrt{1-z^2} = \sqrt{\frac{-\left(\frac{1}{k^2}-t^2\right)}{k'^2}} = \sqrt{\frac{-(1-k^2t^2)}{k^2k'^2}} = \frac{\sqrt{-(1-k^2t^2)}}{kk'}, \\
\frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{t}{\frac{\sqrt{-(1-k^2t^2)}}{kk'}} = \frac{kk't}{\sqrt{-(1-k^2t^2)}}, \\
i\frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}dz = i\frac{kk't}{\sqrt{-(1-k^2t^2)}}\,\frac{-tdt}{k'\sqrt{1-t^2}} = \frac{-ikt^2dt}{\sqrt{-(1-k^2)(1-k^2t^2)}},
\end{array}\right.$$

laquelle donnant, toujours d'après la dernière équation de la seconde ligne, $t = 1$ pour $z = 0$, et $t = 0$ pour $z = \frac{1}{k'}$, transformera dès lors, sans aucune incertitude encore quant aux signes, l'intégrale en question (71), dans laquelle les radicaux sont supposés pris positivement, dans l'expression suivante

$$\int_0^{\frac{1}{k'}} i\frac{\sqrt{1-k'^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}dz = \int_1^0 \frac{-ikt^2dt}{+i\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{k^2t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{1}{k}\mathrm{J};$$

et par conséquent, on aura, en reportant cette expression dans

l'égalité précédente (71), et renversant les deux membres,

$$J = k\left[K'_1 - J'_1 + i(K' - J')\right],$$

d'où, en ayant égard au groupe précédent (70), et permutant encore une fois, le dernier type de relations :

$$J - iJ_1 = k(K'_1 - J'_1), \qquad J' - iJ'_1 = k'(K''_1 - J''_1), \qquad J'' - iJ''_1 = k''(K - J).$$

Notre seconde méthode nous a donc bien conduit, ainsi que cela devait arriver, sans aucune incertitude à aucun instant quant aux signes, exactement aux mêmes résultats que la première méthode.

Expression de l'élément de masse (ou de volume) dans les trois systèmes : des coordonnées elliptiques λ, μ, ν; des coordonnées thermométriques u, v, w; et des coordonnées coniques du second ordre u, v, et r. — La réalité et les conditions pratiques de l'emploi de nos nouvelles formules de transformation (10) ou (11) étant désormais assurées, il ne nous reste plus qu'à en montrer l'utilité par des exemples, choisis de telle sorte qu'ils se prêtent, pour certains cas particuliers, à des vérifications faciles. C'est ce que nous allons faire à présent, en choisissant pour ces exemples un genre de questions qui se présente dans toutes les sciences d'application, à savoir le calcul d'intégrales triples, telles que celles qui expriment la masse ou les moments principaux d'inertie en Mécanique, les quantités de chaleur ou la dilatation totale d'une masse donnée en Physique Mathématique, etc. (*).

Pour cela, il nous sera nécessaire de posséder tout d'abord l'expression de l'élément de volume analogue à $dxdydz$ dans ledit système de coordonnées u, v, w; mais comme le meilleur

---

(*) Voir, par exemple, les équations (14) et (20) du Chap. I de cet Ouvrage, et aussi notre Étude sur le mouvement permanent des fluides (*Thèse de Mécanique*, 1874), pp. 27, en haut, et 44-45.

moyen d'apprécier justement la facilité procurée pour les calculs en question par ce nouveau système de coordonnées consistera évidemment à recommencer les mêmes calculs avec les autres systèmes actuellement employés, et à comparer la suite et le développement correspondants de ces divers calculs, nous allons chercher en même temps, afin de nous permettre une semblable comparaison, l'expression analogue de l'élément de volume dans les deux systèmes précédemment envisagés, savoir celui des Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν, et celui des Coordonnées Coniques du Second Ordre u, v, et r.

1° (*Coordonnées Elliptiques*). — Rappelant encore une fois que ces coordonnées ne sont autre chose, par définition, que les trois fonctions Φ, Ψ, Π déterminées dans notre Chapitre IV, avec la particularisation de la constante d qui figure dans nos résultats par l'hypothèse $d=1$, les formules (73) et (74) de ce même Chapitre nous donneront dès lors, avec ce changement de notation et cette supposition, pour les trois quantités

$$H_1 = \Delta_1^{-2}\lambda, \qquad K_1 = \Delta_1^{-2}\mu, \qquad J_1 = \Delta_1^{-2}\nu,$$

déjà considérées relativement à ce système, les expressions (*)

$$(73) \qquad H_1 = \frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)}, \quad K_1 = \frac{1}{4}\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{f(\mu)}, \quad J_1 = \frac{1}{4}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{f(\nu)}.$$

Avec ces valeurs, les éléments de normale aux trois surfaces coordonnées étant, comme dans les formules (19) de notre Chapitre I,

$$\left\{\begin{aligned} dn &= \Delta_1^{-1}\lambda . d\lambda = H_1^{\frac{1}{2}} . d\lambda, \qquad dn' = \Delta_1^{-1}\mu . d\mu = K_1^{\frac{1}{2}} . d\mu, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad dn'' = \Delta_1^{-1}\nu . d\nu = J_1^{\frac{1}{2}} . d\nu, \end{aligned}\right.$$

(*) Nous désignons, à la vérité, deux de ces quantités par les mêmes lettres K_1 et J_1 qui nous ont déjà servi pour deux des intégrales complètes envisagées dans le paragraphe précédent; mais, le Lecteur étant prévenu, il ne saurait se produire en aucun endroit des calculs qui vont suivre, aucune confusion de notations, entre ces deux couples de quantités représentées par les mêmes symboles.

l'élément de volume aura donc pour expression, en employant de nouveau la notation (115) de notre Chapitre V,

$$dndn'dn'' = H_1^{\frac{1}{2}} d\lambda . K_1^{\frac{1}{2}} d\mu . J_1^{\frac{1}{2}} d\nu = (H_1 K_1 J_1)^{\frac{1}{2}} d\lambda d\mu d\nu$$

$$= \left[\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)} . \frac{1}{4}\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{f(\mu)} . \frac{1}{4}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{f(\nu)}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda d\mu d\nu$$

$$= \left[\frac{-1}{(2^2)^3}\frac{(\mu-\nu)^2(\nu-\lambda)^2(\lambda-\mu)^2}{f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda d\mu d\nu.$$

$$= \frac{i\Theta}{2^3}\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}\frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}\frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}},$$

et par conséquent, si l'on fait attention que le produit Θ peut aisément être présenté sous forme de déterminant, ainsi qu'il suit

(74) $$\Theta = -\left[(\mu-\nu)\lambda^2 + (\nu-\lambda)\mu^2 + (\lambda-\mu)\nu^2\right] = \begin{vmatrix} 1, & \lambda, & \lambda^2 \\ 1, & \mu, & \mu^2 \\ 1, & \nu, & \nu^2 \end{vmatrix},$$

et que l'on convienne de désigner par D la densité du corps, l'on aura dès lors pour l'élément de masse $d\mathfrak{M}$ cette première expression :

(75) $$d\mathfrak{M} = \frac{iD}{2^3}\begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, & \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, & \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} \\ \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}, & \frac{\mu d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}, & \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} \\ \frac{d\nu}{\sqrt{f(\nu)}}, & \frac{\nu d\nu}{\sqrt{f(\nu)}}, & \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{f(\nu)}} \end{vmatrix}.$$

2° (*Coordonnées Thermométriques*).— Désignant de même par H_2, K_2, J_2, les quantités analogues dans ce système à H, K, J, et à H_1, K_1, J_1, c'est-à-dire les expressions

$$H_2 = \Delta_1^{-2} u, \qquad K_2 = \Delta_1^{-2} v, \qquad J_2 = \Delta_1^{-2} w,$$

qui donneront, en comparant les valeurs du même élément d'arc ds, soit avec les coordonnées φ, ψ, ϖ, soit avec nos coordonnées u, v, w,

$$ds^2 = H d\varphi^2 + K d\psi^2 + J d\varpi^2 = H_2 du^2 + K_2 dv^2 + J_2 dw^2,$$

nous aurons donc, en raisonnant de nouveau exactement comme nous l'avons fait à la fin de notre Chapitre IV pour les quantités précédentes H_1, K_1, J_1, et tenant compte des définitions (1) de u, v, w,

$$H d\varphi^2 + K d\psi^2 + J d\varpi^2 = H_2 . g^2 d\varphi^2 + K_2 . g'^2 d\psi^2 + J_2 . g''^2 d\varpi^2,$$

et nous en conclurons

$$H = H_2 g^2, \qquad K = K_2 g'^2, \qquad J = J_2 g''^2,$$

les valeurs des quantités H, K, J, étant les expressions (69) du Chapitre IV, dans lesquelles Φ, Ψ, Π doivent être, eu égard au changement de notation rappelé tout à l'heure dans le numéro précédent, remplacés par λ, μ, ν, c'est-à-dire, par conséquent, les quantités

$$H = 6\gamma(\nu - \lambda)(\lambda - \mu). \qquad K = \gamma\alpha(\lambda - \mu)(\mu - \nu),$$
$$J = \alpha 6(\mu - \nu)(\nu - \lambda).$$

En reportant alors ces valeurs dans les égalités précédentes, nous en tirerons donc pour la première, par exemple, en tenant compte des valeurs (67) et (74) dudit Chapitre IV, ainsi que des définitions (2) de celui-ci,

$$H_2 = \Delta_1^{-2} u = \frac{H}{g^2} = \frac{6\gamma}{\dfrac{1}{l^2 m^2}\dfrac{s}{\alpha}}(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)$$
$$= \frac{1}{n^2}\frac{\alpha 6\gamma . l^2 m^2 n^2}{s}(\nu - \lambda)(\lambda - \mu) = \frac{1}{n^2 d^2}(\nu - \lambda)(\lambda - \mu);$$

et du moment que nous avons reconnu à la fin du Chapitre précédent que l'on pouvait, sans restreindre en quoi que ce soit la généralité des résultats, supposer la constante $d = 1$, l'on voit

donc que nous obtiendrons de cette façon définitivement les trois valeurs

$$(76)\qquad H_2=\frac{1}{n^2}(\nu-\lambda)(\lambda-\mu),\quad K_2=\frac{1}{l^2}(\lambda-\mu)(\mu-\nu),\quad J_2=\frac{1}{m^2}(\mu-\nu)(\nu-\lambda),$$

dans lesquelles λ, μ, ν tiennent lieu, pour abréger, respectivement des trois fonctions de u, v, w définies par les égalités (3), et qui correspondent, avec cette acception, aux trois expressions (73) de H_1, K_1, J_1 obtenues tout à l'heure pour le système des Coordonnées Elliptiques.

Avec ces valeurs, les éléments de normale aux trois surfaces coordonnées étant encore, comme tout à l'heure,

$$\left\{\begin{array}{ll} dn=\Delta_1^{-1}u.du=H_2^{\frac{1}{2}}.du, & dn'=\Delta_1^{-1}v.dv=K_2^{\frac{1}{2}}.dv, \\ & dn''=\Delta_1^{-1}w.dw=J_2^{\frac{1}{2}}.dw, \end{array}\right.$$

l'élément de volume sera donc semblablement

$$(76^{bis})\qquad \left\{\begin{aligned} dn\,dn'\,dn'' &= H_2^{\frac{1}{2}}du.K_2^{\frac{1}{2}}dv.J_2^{\frac{1}{2}}dw=(H_2K_2J_2)^{\frac{1}{2}}du\,dv\,dw \\ &= \left[\frac{1}{l^2m^2n^2}(\mu-\nu)^2(\nu-\lambda)^2(\lambda-\mu)^2\right]^{\frac{1}{2}}du\,dv\,dw \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{l^2m^2n^2}}(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)\right]du\,dv\,dw=\frac{\Theta}{\sqrt{G}}du\,dv\,dw, \end{aligned}\right.$$

en faisant usage de nouveau de la notation (70) du Chapitre IV. Si donc l'on prend encore pour le produit Θ l'expression déjà introduite tout à l'heure (74), et que l'on désigne encore par D la densité du corps, l'on voit ainsi que l'élément de masse sera représenté, dans notre système de coordonnées u, v, w, par cette autre expression, analogue à (75),

$$(77)\qquad d\mathfrak{M}=\frac{D}{\sqrt{G}}\begin{vmatrix} du, & \lambda du, & \lambda^2du \\ dv, & \mu dv, & \mu^2dv \\ dw, & \nu dw, & \nu^2dw \end{vmatrix},$$

λ, μ, ν tenant lieu cette fois, pour abréger, des trois fonctions (3) des coordonnées u, v, w.

3° (*Coordonnées Coniques du Second Ordre.*) — Enfin, nous aurions semblablement l'expression de l'élément de volume, dans le système des Coordonnées Coniques u, v, r, défini par les formules ci-dessus (32), en calculant les valeurs des trois quantités analogues à H, K, J dans ce système, savoir

$$H_3 = \Delta_1^{-2} u, \qquad K_3 = \Delta_1^{-2} v, \qquad J_3 = \Delta_1^{-2} r,$$

valeurs que l'on conclurait aisément de l'expression de l'élément d'arc ds à l'aide des mêmes procédés qui nous ont permis de déduire lesdites formules (32) comme limites des formules précédentes (10) relatives au Système Ellipsoïdal (*), car c'est

(*) En effet, il résulte des valeurs obtenues tout à l'heure (76) pour le système des Coordonnées Thermométriques u, v, w, que le carré de l'élément d'arc aura pour expression dans ce système

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = H_2 du^2 + K_2 dv^2 + J_2 dw^2 &= \frac{1}{n^2}(\nu-\lambda)(\lambda-\mu).du^2 + \frac{1}{l^2}(\lambda-\mu)(\mu-\nu).dv^2 + \frac{1}{m^2}(\mu-\nu)(\nu-\lambda).dw^2 \\ &= (\lambda-\mu)\left[\frac{1}{n^2}(\nu-\lambda)\,du^2 + \frac{1}{l^2}(\mu-\nu)\,dv^2\right] + (\mu-\nu)(\nu-\lambda)\,.\,\frac{dw^2}{m^2}. \end{aligned} \right.$$

Partant de là, l'on remarquera, d'une part, qu'en faisant, comme dans l'équation (24),

$$(\beta) \qquad v = k(v' - K_1), \qquad \text{d'où} \qquad dv = k dv',$$

auquel cas l'on aura, par la première formule (26) : $\operatorname{sn}(v, k') = -\operatorname{cn}(v', k_1)$, les deux premières équations de gauche (8), qui pourront s'écrire tout aussi bien

$$\lambda = -a^2 + l^2 \operatorname{sn}^2(u, k), \qquad \mu = -b^2 + m^2 \operatorname{sn}^2(v, k')$$

donneront, eu égard aux premières égalités (2) et (5),

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= -(a^2 - b^2) + l^2 \operatorname{sn}^2(u, k) - m^2 \operatorname{sn}^2(v, k') \\ &= -l^2 + l^2 \operatorname{sn}^2(u, k) - m^2 [1 - \operatorname{sn}^2(v', k_1)] \\ &= -(l^2 + m^2) + l^2 \operatorname{sn}^2(u, k) + m^2 \operatorname{sn}^2(v', k_1) \\ &= n^2 \left[1 + \frac{l^2}{n^2} \operatorname{sn}^2(u, k) + \frac{m^2}{n^2} \operatorname{sn}^2(v', k_1)\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on aura, en tenant compte encore des valeurs (3) de k^2 et (16) de k_1^2,

$$(\gamma) \qquad \lambda - \mu = n^2 N, \qquad N = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) - k_1^2 \operatorname{sn}^2(v', k_1).$$

ainsi, l'on s'en souvient, que nous avons obtenu ces mêmes quantités dans notre *Mémoire sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes* (pp. 79-80) pour le système des coordonnées λ, μ, r,

---

D'autre part, la troisième équation de gauche (8) donnant successivement, en ayant égard aux valeurs (2) de m^2 et n^2, ainsi qu'à la valeur (3) de k''^2,

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 w &= \frac{\nu + c^2}{n^2}, \qquad \operatorname{cn}^2 w = 1 - \frac{\nu + c^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}[n^2 - (\nu + c^2)] = \frac{-(\nu + a^2)}{n^2}, \\ \operatorname{dn}^2 w &= 1 - k''^2 \operatorname{sn}^2 w = 1 + \frac{n^2}{m^2}\,\frac{\nu + c^2}{n^2} = \frac{1}{m^2}[m^2 + (\nu + c^2)] = \frac{\nu + b^2}{m^2}, \end{aligned}\right.$$

puis, tirant, par le moyen de ces valeurs, de la différentiation de la même équation (8),

$$\left\{\begin{aligned} d\nu &= n^2 . 2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w \, dw, \\ d\nu^2 &= n^4 . 4 \operatorname{sn}^2 w \operatorname{cn}^2 w \operatorname{dn}^2 w \, dw^2 = n^4 . 4 \, \frac{\nu + c^2}{n^2} . \frac{-(\nu + a^2)}{n^2} . \frac{\nu + b^2}{m^2} . dw^2 \\ &= -4 (\nu + a^2)(\nu + b^2)(\nu + c^2) . \frac{dw^2}{m^2}, \end{aligned}\right.$$

l'on en déduira la valeur

$$(\delta) \qquad \frac{dw^2}{m^2} = -\frac{1}{4}\,\frac{d\nu^2}{(\nu + a^2)(\nu + b^2)(\nu + c^2)},$$

de sorte qu'en substituant les valeurs (γ), (6), et (δ) dans l'expression obtenue en premier lieu (x), celle-ci deviendra :

$$ds^2 = \mathrm{N}\left[(\nu - \lambda)\, du^2 + \frac{n^2}{l^2}(\mu - \nu)(k\, dv')^2\right] - \frac{1}{4}\,\frac{(\mu - \nu)(\nu - \lambda) . d\nu^2}{(\nu + a^2)(\nu + b^2)(\nu + c^2)} .$$

Cela posé, si l'on y change encore, comme plus haut (p. 423), a^2, b^2, c^2, λ, μ, et ν en $\varepsilon^2 a^2$, $\varepsilon^2 b^2$, $\varepsilon^2 c^2$, $\varepsilon^2 \lambda$, $\varepsilon^2 \mu$, r^2, comme, eu égard à la valeur (3) de k^2, elle se trouvera transformée par là dans la suivante

$$ds^2 = \mathrm{N}\left[(r^2 - \varepsilon^2 \lambda)\, du^2 - \frac{1}{k^2}(\varepsilon^2 \mu - r^2) . k^2 dv'^2\right] - \frac{1}{4}\,\frac{(\varepsilon^2 \mu - r^2)(r^2 - \varepsilon^2 \lambda) . 4 r^2 dr^2}{(r^2 + \varepsilon^2 a^2)(r^2 + \varepsilon^2 b^2)(r^2 + \varepsilon^2 c^2)},$$

il est bien clair, qu'en faisant enfin dans cette dernière $\varepsilon = 0$, et remplaçant en même temps N par sa valeur de définition (γ), cette égalité se réduira définitivement, en effaçant alors l'accent de v, à la suivante

$$ds^2 = [1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) - k_1^2 \operatorname{sn}^2(v, k_1)] . r^2 (du^2 + dv^2) + dr^2 = \mathrm{H}_2 du^2 + \mathrm{K}_2 dv^2 + \mathrm{J}_2 dw^2,$$

d'où l'on conclura, par conséquent, pour le Système des Coordonnées Coniques u, v, r, les valeurs

$$\mathrm{H}_2 = \mathrm{K}_2 = r^2 [1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) - k_1^2 \operatorname{sn}^2(v, k_1)], \qquad \mathrm{J}_2 = 1,$$

qui reproduisent exactement celles que nous allons obtenir un peu plus loin, à l'aide d'un autre procédé plus rapide.

qui ne diffère du système actuellement envisagé u, v, r qu'en ce que les premières ne sont pas des coordonnées thermométriques. Toutefois, le calcul sera plus simple et plus rapide dans le cas actuel, en déterminant directement ces quantités H_3, K_3, J_3 à l'aide des formules de définition du système considéré (32), et nous servant à cet effet des trois dernières formules de la note de la page 23 de notre Chapitre I (page 24).

En effet, les formules précitées (32) donnant, étant différentiées en u,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= r.\mathrm{cn}\,(u,\,k)\,\mathrm{dn}\,(u,\,k).\mathrm{dn}\,(v,\,k_1),\\ \frac{dy}{du} &= r.\big[-\mathrm{dn}\,(u,\,k)\,\mathrm{sn}\,(u,\,k)\big].\mathrm{cn}\,(v,\,k_1),\\ \frac{dz}{du} &= r.\big[-k^2\,\mathrm{sn}\,(u,\,k)\,\mathrm{cn}\,(u,\,k)\big].\mathrm{sn}\,(v,\,k_1),\end{aligned}\right.$$

si l'on élève au carré ces trois dernières égalités, et qu'on fasse, pour un instant, en vue d'abréger les écritures, comme à la page 246 du Chapitre III,

$$\text{(78)}\qquad \mathrm{sn}\,(u,\,k) = \mathrm{U},\qquad\qquad \mathrm{sn}\,(v,\,k_1) = \mathrm{V},$$

puis qu'on les ajoute ensuite membre à membre, l'on obtiendra de la sorte, en vertu des formules précitées

$$\begin{aligned} H_3 = \Delta_1^{-2}u &= \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2\\ &= r^2.(1-\mathrm{U}^2)(1-k^2\mathrm{U}^2).(1-k_1^2\mathrm{V}^2)\\ &\quad + r^2.(1-k^2\mathrm{U}^2)\,\mathrm{U}^2.(1-\mathrm{V}^2) + r^2.k^4\mathrm{U}^2(1-\mathrm{U}^2).\mathrm{V}^2\\ &= r^2\big[\{1-(1+k^2)\,\mathrm{U}^2+k^2\mathrm{U}^4\}(1-k_1^2\mathrm{V}^2)\\ &\quad + (\mathrm{U}^2-k^2\mathrm{U}^4)(1-\mathrm{V}^2)+(k^4\mathrm{U}^2-k^4\mathrm{U}^4)\,\mathrm{V}^2\big],\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en réduisant, puis ordonnant par rapport à U et V,

$$\begin{aligned} H_3 = r^2\big[1 - k^2\mathrm{U}^2 - k_1^2\mathrm{V}^2 + \{k_1^2(1+k^2) - 1 + k^4\}\,\mathrm{U}^2\mathrm{V}^2\\ - (k_1^2k^2 - k^2 + k^4)\,\mathrm{U}^4\mathrm{V}^2\big],\end{aligned}$$

expression dont les deux derniers coefficients sont nuls, car l'on trouve aisément

$$\begin{cases} k_1^2(1+k^2)-1+k^4=k_1^2+k^2(k_1^2+k^2)-1=k_1^2+k^2-1=0, \\ k_1^2k^2-k^2+k^4=k^2(k_1^2+k^2-1)=0\,, \end{cases}$$

et qui se réduit, en conséquence, à l'une ou à l'autre des deux expressions suivantes

$$H_3=r^2(1-k^2U^2-k_1^2V^2)=r^2\left[(1-k^2U^2)+(1-k_1^2V^2)-1\right],$$

c'est-à-dire, en vertu des définitions (78) de U et V, simplement à celles-ci :

$$(79)\qquad \begin{cases} H_3=r^2\left[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u,k)-k_1^2\,\mathrm{sn}^2(v,k_1)\right] \\ \quad =r^2\left[\mathrm{dn}^2(u,k)+\mathrm{dn}^2(v,k_1)-1\right]. \end{cases}$$

Pour avoir de même l'expression du second coefficient K_3, il ne sera pas nécessaire de recommencer ce calcul, car ces dernières expressions auxquelles nous venons d'arriver pour H_3 ne changeant pas, de même que les formules originaires (32), lorsqu'on y change à la fois u en v, et k en k_1, représentent dès lors aussi bien la valeur dudit coefficient $K_3=\Delta_1^{-2}v$. Enfin, les mêmes formules (32) qui sont linéaires et homogènes en r, donnant par conséquent

$$\frac{dx}{dr}=\frac{1}{r}x,\qquad \frac{dy}{dr}=y,\qquad \frac{dz}{dr}=\frac{1}{r}z,$$

il en résulte immédiatement pour le troisième coefficient J_3 la valeur évidente

$$J_3=\Delta_1^{-2}r=\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\frac{1}{r^2}(x^2+y^2+z^2)=1,$$

et l'élément de volume, en conséquence, sera représenté, dans ce système de coordonnées, par l'expression

$$dn\,dn'\,dn''=H_3^{\frac{1}{2}}\,du\,.\,K_3^{\frac{1}{2}}\,dv\,.\,J_3^{\frac{1}{2}}\,dr=H_3\,du\,dv\,.\,dr,$$

de laquelle, en la multipliant par la densité D, et tenant compte alors des valeurs trouvées tout à l'heure (79) pour H_3, l'on déduira par suite l'expression correspondante de l'élément de masse sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(80)\quad \begin{cases} d\mathfrak{M} = D.r^2\left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(u, k) - k_1^2\,\mathrm{sn}^2(v, k_1)\right] du\,dv\,dr \\ \quad\;\; = D.r^2\left[\mathrm{dn}^2(u, k) + \mathrm{dn}^2(v, k_1) - 1\right] du\,dv\,dr. \end{cases}$$

Semblablement le produit plus simple

$$(81)\qquad dn\,dn' = H_3^{\frac{1}{2}}du\,.\,K_3^{\frac{1}{2}}dv = H_3\,du\,dv$$

représentera l'élément de surface sur la sphère de rayon r, et conduira, en particulier, par une intégration immédiate, à une expression que nous voulons signaler de l'aire S découpée sur cette surface par deux cônes de chaque famille u et v, c'est-à-dire celle comprise entre les surfaces coordonnées u_1 et u_2 d'une part, et v_1 et v_2 d'autre part.

En effet, il est bien clair que l'on obtiendra l'aire en question en intégrant ledit élément (81) entre les limites u_1 et u_2 pour u, et v_1 et v_2 pour v, c'est-à-dire entre les limites constantes et données pour chacune des quadratures relatives, soit à u, soit à v, opération dont le résultat, en prenant pour H_3 la première des valeurs (79), sera dès lors représenté par la formule

$$(82)\quad \begin{cases} S = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} r^2\left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(u, k) - k_1^2\,\mathrm{sn}^2(v, k_1)\right] du\,dv \\ \;\;\; = r^2\left[\int_{u_1}^{u_2} du\,.\int_{v_1}^{v_2} dv - \int_{v_1}^{v_2} dv\,.\int_{u_1}^{u_2} k^2\,\mathrm{sn}^2(u, k)\,du \right. \\ \qquad\qquad \left. - \int_{u_1}^{u_2} du\,.\int_{v_1}^{v_2} k_1^2\,\mathrm{sn}^2(v, k_1)\,dv\right], \end{cases}$$

c'est-à-dire, en faisant usage de la notation abréviative très connue

$$[f(z)]_1^2 = f(z_2) - f(z_1),$$

que l'on obtiendra pour cette aire, l'expression simple et remarquable :

(83) $$S = r^2 \left[(u)_1^2 (v)_1^2 - (v)_1^2 \left[Z(u, k)\right]_1^2 - (u)_1^2 \left[Z(v, k_1)\right]_1^2 \right].$$

Comme vérification de cette formule, remarquons qu'elle devra fournir l'aire de la portion de la surface de cette sphère comprise dans l'angle trièdre des coordonnées positives, c'est-à-dire la huitième partie de la surface totale de la sphère, aire partielle que nous désignerons par (S), en assignant à la variation des coordonnées u et v séparément toute l'amplitude dont elle est susceptible pour les valeurs positives des coordonnées x, y, z, c'est-à-dire, eu égard aux observations présentées dans un paragraphe précédent (page 433), en faisant $u_1 = 0$, $u_2 = K$, $v_1 = 0$, $v_2 = K_1$, hypothèses d'où résulteront les valeurs

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u)_1^2 = K, & \left[Z(u, k)\right]_1^2 = \left[Z(u, k)\right]_0^K = Z(K, k), \\ (v)_1^2 = K_1, & \left[Z(v, k_1)\right]_1^2 = \left[Z(v, k_1)\right]_0^{K_1} = Z(K_1, k_1), \end{array} \right.$$

auquel cas cette formule (83) deviendra :

(84) $$(S) = r^2 \left[KK_1 - K_1 Z(K, k) - K Z(K_1, k_1) \right].$$

Or, si l'on substitue alors, pour les fonctions elliptiques de seconde espèce, à la notation précédente, qui est celle de Jacobi, la notation antérieure de Legendre, ayant alors, comme on sait, pour les intégrales complètes

$$E(k) = K - Z(K, k), \quad (*) \quad E(k_1) = K_1 - Z(K_1, k_1),$$

(*) La première de ces deux égalités n'est que la traduction, soit dans un mode de notation, soit dans l'autre, de l'identité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int_0^1 \frac{1 - k^2 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}\, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} - \int_0^1 \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

et de même pour la seconde, en y changeant seulement k en k_1.

l'on en conclura, en premier lieu, par une combinaison facile,

$$K_1 E(k) + K E(k_1) = 2KK_1 - K_1 Z(K, k) - K Z(K_1, k_1),$$

et de là, en faisant à présent le même changement de notation pour les intégrales complètes de première espèce, à l'aide des égalités $K = F(k)$ et $K_1 = F(k_1)$, cette seconde relation :

$$F(k_1)E(k) + F(k)E(k_1) - F(k)F(k_1) = KK_1 - K_1 Z(K, k) - K Z(K_1, k_1).$$

L'expression obtenue tout à l'heure (84) sera donc, étant écrite avec les notations de Legendre,

$$(85) \qquad (S) = r^2 \left[F(k)E(k_1) + F(k_1)E(k) - F(k)F(k_1)\right] = \frac{\pi}{2} r^2,$$

ainsi qu'on devait le trouver, car l'on a, en vertu d'une formule connue du *Traité des Fonctions Elliptiques* (*) :

$$F(k)E(k_1) + F(k_1)E(k) - F(k)F(k_1) = \frac{\pi}{2}.$$

La formule obtenue ci-dessus (82) étant étendue, ainsi que nous venons de le faire à tout l'angle trièdre des coordonnées positives, représente sous ces conditions, traduite dans notre système de notation, la formule finale du § CIV des *Leçons sur les Fonctions Inverses* (page 134), mais elle est infiniment plus claire, comme l'on voit, à cause qu'elle ne renferme que des éléments analytiques connus, circonstance qui nous a permis, en premier lieu, l'accomplissement effectif, réalisé par la formule suivante (83), des quadratures simplement indiquées par la formule en question (82), puis, en second lieu, sa vérification immédiate mise en évidence par la dernière formule (85), opérations qui échappaient aussi bien l'une que l'autre, avec les types de transcendantes adoptés par Lamé pour la définition de ses Coordonnées Thermométriques.

(*) LEGENDRE, *Traité des Fonctions Elliptiques*, Tome I, Chapitre XII, page 61.

Application des coordonnées thermométriques u, v, w au calcul d'intégrales triples analogues a celles que l'on rencontre en mécanique. — Les expressions de l'élément de volume, et par suite aussi de l'élément de masse, que nous venons de donner, permettent de calculer à la fois dans les trois systèmes de coordonnées curvilignes, successivement envisagés tout à l'heure, les intégrales triples, relatives à un corps homogène quelconque, telles que

$$\mathrm{S}\,d\mathfrak{M}, \quad \mathrm{S}\,x\,d\mathfrak{M}, \quad \mathrm{S}\,x^2\,d\mathfrak{M}, \quad \ldots \quad \mathrm{S}\,yz\,d\mathfrak{M}, \quad \ldots$$

qui serviront à la détermination de la masse, du centre de gravité, des moments ou des plans principaux d'inertie de ce corps, à l'aide de celui de ces systèmes que l'on aura choisi, en remplaçant à la fois dans ces diverses sommes les coordonnées x, y, z par l'une des valeurs fournies par les équations (9), (10), ou (32), en même temps que l'élément $d\mathfrak{M}$ par l'expression relative à ce système, puis effectuant ensuite l'intégration dans toute l'étendue du corps.

L'emploi simultané de ces trois systèmes de coordonnées à un même calcul de ce genre démontrera dans beaucoup de cas, croyons-nous, la supériorité du système de coordonnées u, v, w, que nous proposons pour tenir lieu de celui de Lamé, et qui réunit seul les trois avantages que nous avons signalés au début du présent Chapitre. Nous ferons ressortir encore mieux cette supériorité en déterminant complètement, par le moyen de ces coordonnées, une classe d'intégrales triples analogues, mais d'un ordre plus élevé, savoir celles qui rentrent dans les types

$$(86) \qquad \mathrm{S}\,x^{\alpha}\,d\mathfrak{M}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{S}\,(yz)^{2\alpha+1}\,d\mathfrak{M}, \quad \ldots\ldots$$

l'exposant α étant un entier positif quelconque, et le volume envisagé étant choisi de telle sorte que, comme pour le calcul précédent qui nous a conduit à la formule (82), les limites d'in-

tégration soient encore constantes pour les trois variables simultanément, hypothèse qui équivaut évidemment à prendre pour ce volume le parallélipipède curviligne découpé par trois couples de surfaces appartenant chacun à une famille coordonnée différente, ainsi que dans le calcul précité.

La simplification introduite par cette hypothèse, aussi bien avec l'un des systèmes de coordonnées qu'avec l'autre, sera de double nature, et permettra, sans trop de peine, de pousser jusqu'au bout, pour l'évaluation de sommes telles que celles (86), le développement effectif des calculs, qui seraient sans cela d'une extrême complication.

En effet, dans les formules précitées (9) ou (10), l'expression de chaque coordonnée rectiligne étant composée de trois facteurs dépendant exclusivement chacun d'une coordonnée différente u, v, w, ou λ, μ, ν, il en sera évidemment de même des coefficients x^α ou $(yz)^{2\alpha+1}$ de l'élément différentiel $d\mathfrak{M}$, dans chacune des sommes (86). Or, cet élément pouvant être pris, d'après les formules (75) et (77), sous la forme d'un déterminant dont chaque ligne ne dépend que d'une seule coordonnée curviligne, il en sera donc évidemment de même des produits tels que $x^\alpha d\mathfrak{M}$ ..... $(yz)^{2\alpha+1} d\mathfrak{M}$, qui s'offriront en conséquence sous la forme de déterminants dont chaque élément sera composé de trois facteurs ne dépendant chacun que d'une seule coordonnée, et qui pourront ainsi être représentés par des sommes telles que

$$(87) \qquad \sum (\mathrm{A}d\lambda.\mathrm{M}d\mu.\mathrm{N}d\nu), \qquad \text{ou bien} \qquad \sum(\mathrm{U}du.\mathrm{V}dv.\mathrm{W}dw),$$

suivant que l'on partira des expressions (9) et (75), ou bien de celles (10) et (77).

Cela posé, les limites de l'intégration étant constantes par hypothèse pour chacune des coordonnées curvilignes, il est bien clair que le résultat de la triple intégration ou λ, μ, ν, ou u, v, w, opérée sur les expressions précédentes (87), sera figurée de la même façon par celles-ci

$$\sum\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\mathrm{A}d\lambda.\int_{\mu_1}^{\mu_2}\mathrm{M}d\mu.\int_{\nu_1}^{\nu_2}\mathrm{N}d\nu\right), \quad \text{ou} \quad \sum\left(\int_{u_1}^{u_2}\mathrm{U}du.\int_{v_1}^{v_2}\mathrm{V}dv.\int_{w_1}^{w_2}\mathrm{W}dw\right),$$

c'est-à-dire encore par des déterminants dont tous les éléments seront les résultats de quadratures effectuées séparément par rapport à une seule variable, et dont chaque ligne ne comportera de nouveau que des quadratures relatives à la même coordonnée.

Ainsi donc, réduction des intégrales triples à des intégrales simples, et mise en évidence de prime abord des résultats sous forme de déterminants, de manière à pouvoir profiter, pour leur évaluation définitive, des nombreux procédés de calcul propres à ce puissant instrument analytique, telles sont, comme on le voit, les simplifications qui résulteront, pour les calculs que nous nous proposons d'effectuer, de la délimitation très particulière du volume auquel nous supposerons expressément que s'étendront nos intégrations.

De là, pour chaque cas, deux séries d'opérations entièrement distinctes, l'une de calcul intégral, l'autre simplement algébrique, que nous allons accomplir successivement, et qui feront ressortir, aussi bien l'une que l'autre, les avantages pratiques de nos coordonnées u, v, w.

Détermination des quadratures auxquelles se ramènent lesdites intégrales triples. — En vue de faciliter tout à l'heure autant que possible l'une et l'autre de ces deux opérations, nous substituerons provisoirement comme variables, pour le calcul de l'une des intégrales de chaque type (86), à nos coordonnées u, v, w elles-mêmes, les fonctions très simples de ces variables (*)

$$(88)\qquad p = l.\mathrm{sn}(u,k), \qquad q = \pm\, l.\mathrm{dn}(v,k'), \qquad r = \pm\, in\; \mathrm{cn}(w,k''),$$

avec la condition expresse de prendre exclusivement dans les deux dernières de ces définitions le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que la variable correspondante v ou w sera

(*) Le Lecteur verra un peu plus loin comment l'on se trouve amené tout naturellement à ce changement de variables.

elle-même positive ou négative. On reconnaîtra plus loin l'utilité de cette distinction de signe dans ces définitions.

Toutefois ces mêmes définitions appellent nécessairement deux observations essentielles.

En premier lieu, à la vérité, les nouvelles variables que nous venons d'introduire ne satisfont pas *entre elles* (*), quant aux équations qui les définissent, à la loi de permutation circulaire constamment observée par nous jusqu'ici, à laquelle nous semblons ainsi renoncer provisoirement. Mais ce défaut apparent se trouve racheté, comme on le verra, par un avantage très grand pour le calcul effectif des déterminants sus-mentionnés, dont nous nous proposons de trouver l'expression.

Cet inconvénient, d'ailleurs, qu'on est naturellement amené à leur reprocher au premier abord, ne constitue pas en réalité une pierre d'achoppement pour la réalisation du programme que nous nous sommes tracé, car il est bien clair qu'une intégrale de chaque type (86), en particulier, étant supposée obtenue à l'aide des variables auxiliaires p, q, r, rien n'empêchera d'exprimer de nouveau à ce moment, par la substitution des valeurs (88), le résultat en question à l'aide des variables primitives u, v, w, lesquelles permettront alors, pour le calcul des autres intégrales du même type, la permutation circulaire que nous avions escomptée comme l'un des avantages principaux de ce système de coordonnées pour la réalisation des calculs liés à la considération de trois axes coordonnés.

En second lieu, il résulte, il est vrai, de la convention posée au sujet du signe qu'il faudra prendre dans lesdites expres-

(*) Nous disons *entre elles*, car il est clair que l'on pourra aussi bien, lorsque l'on y trouvera un avantage quelconque, introduire simultanément deux autres séries de variables auxiliaires, déduites de celle-ci par permutation circulaire de tous les éléments qui y figurent, savoir

$$\left\{\begin{array}{lll} p' = m\,\mathrm{sn}(v, k'), & q' = \pm m\,\mathrm{dn}(w, k''), & r' = \pm il\,\mathrm{cn}(u, k), \\ p'' = n\,\mathrm{sn}(w, k''), & q'' = \pm n\,\mathrm{dn}(u, k), & r'' = \pm im\,\mathrm{cn}(v, k'), \end{array}\right.$$

et qui joueront évidemment un rôle analytique complètement analogue.

sions (88) de q et de r, que ces variables, considérées comme fonctions de v et de w, subissent l'une et l'autre une discontinuité manifeste pour la valeur 0 de ces coordonnées; car, lorsque celles-ci passeront, en croissant, par la valeur 0, il résulte de cette convention que la variable q sautera brusquement de $-lk'_1$ à $+lk'_1$, et la variable r sautera semblablement de $-in$ à $+in$: en sorte que l'on peut craindre au premier abord que cette discontinuité ne crée, en général, un obstacle irréductible à l'emploi de ces variables auxiliaires pour l'opération de l'intégration triple que nous avons précisément en vue. Il nous faut donc, avant d'aller plus loin, indiquer d'abord comment l'on devra s'y prendre dans chaque cas pour éluder cette grave difficulté.

Dans cette pensée, marquons sur le plan des yz, par les chiffres 1, 2, 3, 4 placés dans l'ordre amené par une rotation *directe* (c'est-à-dire de y vers z), les quatre régions de ce plan séparées par les axes coordonnés ; puis considérons ces quatre régions commes les bases ou sections médianes de quatre prismes parallèles aux x, infinis dans les deux sens, et embrassant ensemble dès lors tout l'espace, lesquels seront, avec ces conventions, suffisamment définis par les mêmes numéros 1, 2, 3, 4.

z	
2	1
o	y
3	4

Cela posé, il est bien clair à présent que toute intégrale triple, telle que $\mathbf{S}\,F(u, v, w)du dv dw$, $F(u, v, w)$, désignant une fonction continue quelconque des trois coordonnées u, v, w, toute intégrale semblable, disons-nous, supposée étendue à un volume tel que les limites de v ou de w, correspondantes à ce volume pour l'opération de l'intégration triple, soient l'une négative et l'autre positive, pourra toujours être décomposée en quatre sommes partielles, correspondant chacune à une portion du champ d'intégration ou volume donné comprise en entier dans l'un des quatre prismes que nous venons de définir, selon que l'indique l'égalité suivante :

$$(88^{bis})\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{S}\,F(u,v,w)\,du\,dv\,dw = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} F(u,v,w)\,du\,dv\,dw \\ &= \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{0}\int_{w_1}^{0} F\,du\,dv\,dw + \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{0}\int_{0}^{w_2} F\,du\,dv\,dw \\ &+ \int_{u_1}^{u_2}\int_{0}^{v_2}\int_{w_1}^{0} F\,du\,dv\,dw + \int_{u_1}^{u_2}\int_{0}^{v_2}\int_{0}^{w_2} F\,du\,dv\,dw. \end{aligned}\right.$$

Or, dans chacune de ces quatre sommes partielles, pour l'étendue des coordonnées v ou w qui y est envisagée, les deux variables auxiliaires q et r sont alors l'une et l'autre des fonctions continues de ces coordonnées. En admettant donc que la fonction $\mathcal{F}(p, q, r)$, dans laquelle se sera transformée la fonction $F(u, v, w)$, soit elle-même une fonction continue des variables p, q, r entre les limites correspondantes aux limites données de u, v, w, dans ces conditions, disons-nous, rien ne fera plus obstacle à l'emploi desdites variables auxiliaires p, q, r pour le calcul de chacune des quatre sommes partielles en particulier, et par conséquent, en suivant cette voie, à celle de la somme totale proposée elle-même.

Nous supposerons donc dans toutes les applications que nous allons présenter que l'on ait effectué, toutes les fois qu'il en sera besoin, la décomposition que nous venons de spécifier.

Cela posé, l'on déduira immédiatement des définitions (88) des variables p, q, r, et (3) des modules k, k', k'', en ayant égard en outre à la relation de gauche (5), en premier lieu, ces autres valeurs

$$(89)\quad \begin{cases} \operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u = 1 - \dfrac{p^2}{l^2} = \dfrac{l^2 - p^2}{l^2}, \\ \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 + \dfrac{l^2}{n^2}\cdot\dfrac{p^2}{l^2} = 1 + \dfrac{p^2}{n^2} = \dfrac{n^2 + p^2}{n^2}, \\ dp = l \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \,.\, du = l \left(\pm\dfrac{1}{l}\sqrt{l^2 - p^2}\right)\left(\pm\dfrac{1}{n}\sqrt{n^2 + p^2}\right).\, du \\ \qquad = \pm\dfrac{1}{n}\sqrt{(l^2 - p^2)(n^2 + p^2)}\,.\, du; \end{cases}$$

$$(90)\quad \begin{cases} q^2 = (\pm l)^2 \operatorname{dn}^2 v = l^2(1 - k'^2 \operatorname{sn}^2 v) = l^2\left(1 + \dfrac{m^2}{l^2}\operatorname{sn}^2 v\right) = l^2 + m^2 \operatorname{sn}^2 v, \\ \operatorname{sn}^2 v = \dfrac{q^2 - l^2}{m^2}, \qquad \operatorname{cn}^2 v = 1 - \dfrac{q^2 - l^2}{m^2} = \dfrac{m^2 + l^2 - q^2}{m^2} = \dfrac{-n^2 - q^2}{m^2}, \\ dq = \pm l\,(-k'^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v)\,.\, dv \\ \qquad = \pm l \,.\, \dfrac{m^2}{l^2}\left(\pm\dfrac{1}{m}\sqrt{q^2 - l^2}\right)\left(\pm\dfrac{1}{m}\sqrt{-n^2 - q^2}\right).\, dv \\ \qquad = \pm\dfrac{1}{l}\sqrt{(l^2 - q^2)(n^2 + q^2)}\,.\, dv; \end{cases}$$

$$(91)\quad \begin{cases} r^2 = (\pm in)^2 \operatorname{cn}^2 w = -n^2(1 - \operatorname{sn}^2 w) = -n^2 + n^2 \operatorname{sn}^2 w, \\ \operatorname{sn}^2 w = \dfrac{n^2 + r^2}{n^2}, \\ \operatorname{dn}^2 w = 1 - k''^2 \operatorname{sn}^2 w = 1 + \dfrac{n^2}{m^2}\,\dfrac{n^2 + r^2}{n^2} = 1 + \dfrac{n^2 + r^2}{m^2} \\ \qquad = \dfrac{m^2 + n^2 + r^2}{m^2} = \dfrac{-l^2 + r^2}{m^2}, \\ dr = \pm in\,(-\operatorname{dn} w \operatorname{sn} w)\,.\, dw \\ \qquad = \pm in\left(\pm\dfrac{1}{m}\sqrt{-l^2 + r^2}\right)\left(\pm\dfrac{1}{n}\sqrt{n^2 + r^2}\right).\, dw \\ \qquad = \pm\dfrac{1}{m}\sqrt{(l^2 - r^2)(n^2 + r^2)}\,.\, dw; \end{cases}$$

d'où l'on conclura, en vertu de la dernière équation de chacun de ces trois groupes, pour les différentielles du, dv, dw, les trois expressions, de même forme, à un facteur constant près,

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} du &= \frac{\pm ndp}{\sqrt{(l^2-p^2)(n^2+p^2)}}, \qquad dv = \frac{\pm ldq}{\sqrt{(l^2-q^2)(n^2+q^2)}},\\ dw &= \frac{\pm mdr}{\sqrt{(l^2-r^2)(n^2+r^2)}}.\end{aligned}\right.$$

Puis, en second lieu, par le moyen des formules (10), et en ayant égard de nouveau à la valeur (3) de k'^2, ces deux suites d'égalités, dans lesquelles les doubles signes sont expressément ceux introduits par les définitions (88) des variables q et r,

$$(93)\quad x = l\,\mathrm{sn}\,u.\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,w = \frac{1}{l.in}.l\,\mathrm{sn}\,u.l\,\mathrm{dn}\,v.in\,\mathrm{cn}\,w = \frac{-i}{l.n}.p.(\pm q).(\pm r),$$

$$(93^{bis})\quad \left\{\begin{aligned} yz &= m\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{cn}\,u.n\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,v = mn.\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u.\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v.\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{sn}\,w\\ &= \frac{mn}{k'^2}\cdot \mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u.(-k'^2\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v).(-\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{sn}\,w)\\ &= \frac{mn}{\frac{-m^2}{l^2}}\cdot\frac{d\mathrm{sn}\,u}{du}\cdot\frac{d\mathrm{dn}\,v}{dv}\cdot\frac{d\mathrm{cn}\,w}{dw} = \frac{1}{-im}\cdot\frac{d.l\,\mathrm{sn}\,u}{du}\cdot\frac{d.l\,\mathrm{dn}\,v}{dv}\cdot\frac{d.in\,\mathrm{cn}\,w}{dw}\\ &= \frac{i}{m}\cdot\frac{dp}{du}\cdot\left(\pm\frac{dq}{dv}\right)\cdot\left(\pm\frac{dr}{dw}\right),\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, par conséquent, finalement les deux expressions

$$(94)\qquad x = \frac{\mp i}{ln}pqr, \qquad yz = \frac{\pm i}{m}\,\frac{dp}{du}\,\frac{dq}{dv}\,\frac{dr}{dw},$$

le signe supérieur correspondant dès lors manifestement à l'hypothèse de la concordance des signes dans les deux expressions (88) de q et de r; c'est-à-dire, d'après nos conventions, à celle des signes des coordonnées v et w elles-mêmes, et le signe inférieur étant de même expressément relatif à celle de la discordance des signes entre les mêmes variables.

Enfin, en troisième lieu, en retranchant deux à deux, l'une de l'autre, celles des équations (8) qui contiennent la constante a^2 dans leur premier membre, l'on obtiendra ces nouvelles égalités

$$\left\{\begin{array}{l} \mu - \nu = a^2 + \mu - (a^2 + \nu) = l^2 \operatorname{dn}^2 v - (in)^2 \operatorname{cn}^2 w = q^2 - r^2, \\ \nu - \lambda = a^2 + \nu - (a^2 + \lambda) = (in)^2 \operatorname{cn}^2 w - l^2 \operatorname{sn}^2 u = r^2 - p^2, \\ \lambda - \mu = a^2 + \lambda - (a^2 + \mu) = l^2 \operatorname{sn}^2 u - l^2 \operatorname{dn}^2 v = p^2 - q^2, \end{array}\right.$$

d'où l'on conclura dès lors, pour le produit Θ, cette nouvelle expression de même forme en p^2, q^2, r^2 que la précédente (74) en λ, μ, ν, savoir :

$$(95)\qquad \Theta = (\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu) = (q^2 - r^2)(r^2 - p^2)(p^2 - q^2) = \begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix}.$$

Ces résultats préliminaires étant acquis, revenons maintenant à nos sommes proposées (86), que nous conviendrons, pour plus de facilité, de représenter par les notations

$$(96)\qquad \mathrm{I}_x^{(\alpha)} = \mathsf{S}\, x^{\alpha} d\mathfrak{M}, \qquad \mathrm{J}_x^{(\alpha)} = \mathsf{S}\, (yz)^{2\alpha+1} d\mathfrak{M},$$

et de même pour les quatre autres analogues, issues de celles-là par la permutation des trois coordonnées x, y, z. Et nous proposant de calculer à la fois les six sommes représentées par ces deux types pour le volume particulier que nous avons défini, occupons-nous tout d'abord du second de ces types, dont le calcul mettra tout de suite en évidence le très grand avantage de nos variables p, q, r.

A. [*Intégrale* $\mathrm{J}_x^{(\alpha)}$]. A cet effet, remarquant, d'une part, que la seconde expression de la première ligne (93 *bis*) donnera, étant élevée au carré, puis en ayant égard aux valeurs (89), (90), et (91),

$$y^2z^2 = m^2n^2 . \operatorname{dn}^2 u \operatorname{cn}^2 u . \operatorname{cn}^2 v \operatorname{sn}^2 v . \operatorname{dn}^2 w \operatorname{sn}^2 w$$

$$= m^2n^2 . \frac{n^2+p^2}{n^2}\frac{l^2-p^2}{l^2} . \frac{-n^2-q^2}{m^2}\frac{q^2-l^2}{m^2} . \frac{-l^2+r^2}{m^2}\frac{n^2+r^2}{n^2}$$

$$= \frac{-1}{m^2 . l^2m^2n^2}(l^2-p^2)(n^2+p^2).(l^2-q^2)(n^2+q^2).(l^2-r^2)(n^2+r^2),$$

nous ferons, quel que soit t,

$$(97) \qquad T = (l^2 - t^2)(n^2 + t^2) = l^2n^2 + (l^2 - n^2)t^2 - t^4,$$

et nous conviendrons, en vue d'abréger les écritures, de représenter par P, Q, R, ce que devient ce trinôme T lorsqu'on y écrit successivement p, q, r, à la place de t : auquel cas l'égalité précédente s'écrira simplement, à l'aide de ces notations, ainsi que de la quantité G déjà réintroduite plus haut (page 464) :

$$y^2z^2 = \frac{-1}{m^2G} PQR = \left(\frac{\pm i}{m\sqrt{G}}\right)^2 PQR.$$

D'autre part, en tenant compte de nouveau de l'expression de droite (94), de celle (76bis) de l'élément de volume, et de la dernière valeur (95) de Θ, l'on trouvera pareillement celle-ci

$$yz\, d\mathfrak{M} = yz . D\, dn\, dn' dn'' = \frac{\pm i}{m}\frac{dp}{du}\frac{dq}{dv}\frac{dr}{dw} . \frac{D}{\sqrt{G}}\begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix} du\, dv\, dw$$

$$= \frac{\pm iD}{m\sqrt{G}}\begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix} dp\, dq\, dr = \frac{\pm iD}{m\sqrt{G}}\begin{vmatrix} dp, & p^2dp, & p^4dp \\ dq, & q^2dq, & q^4dq \\ dr, & r^2dr, & r^4dr \end{vmatrix}$$

de telle sorte que, par le moyen de ces deux dernières suites d'égalités, la seconde des sommes (96) se présentera sous la forme

$$(98)\quad \begin{cases} J_x^{(\alpha)} = \mathbf{S}(yz)^{2\alpha+1} d\mathfrak{M} = \mathbf{S}(y^2z^2)^\alpha . yz d\mathfrak{M} \\ = \mathbf{S}\left(\frac{\pm i}{m\sqrt{G}}\right)^{2\alpha} P^\alpha Q^\alpha R^\alpha \cdot \frac{\pm iD}{m\sqrt{G}} \begin{vmatrix} dp, & p^2dp, & p^4dp \\ dq, & q^2dq, & q^4dq \\ dr, & r^2dr, & r^4dr \end{vmatrix} \\ = \mathbf{S}\left(\frac{\pm i}{m\sqrt{G}}\right)^{2\alpha+1} D \begin{vmatrix} P^\alpha dp, & P^\alpha p^2dp, & P^\alpha p^4dp \\ Q^\alpha dq, & Q^\alpha q^2dq, & Q^\alpha q^4dq \\ R^\alpha dr, & R^\alpha r^2dr, & R^\alpha r^4dr \end{vmatrix}, \end{cases}$$

c'est-à-dire sous celle d'un déterminant dont les différents éléments seront des intégrales simples prises entre des limites constantes données, puisque par hypothèse celles de u, v, w le sont elles-mêmes, d'après les considérations exposées un peu plus haut (pages 473-474), en sorte que l'on aura

$$(99)\quad J_x^{(\alpha)} = \left(\frac{\pm i}{m\sqrt{G}}\right)^{2\alpha+1} D \begin{vmatrix} \int P^\alpha dp, & \int P^\alpha p^2dp, & \int P^\alpha p^4dp \\ \int Q^\alpha dq, & \int Q^\alpha q^2dq, & \int Q^\alpha q^4dq \\ \int R^\alpha dr, & \int R^\alpha r^2dr, & \int R^\alpha r^4dr \end{vmatrix},$$

les intégrales qui formeront les éléments de ce dernier déterminant étant toutes des intégrales définies dont les limites seront respectivement pour chaque ligne les quantités p_1 et p_2, q_1 et q_2, r_1 et r_2, correspondant aux limites données u_1 et u_2, v_1 et v_2, w_1 et w_2, en vertu des égalités de définition (88).

Dans l'expression (99) que nous venons d'obtenir, le double signe qui figure dans le premier coefficient constant étant introduit par l'égalité de droite (94), a donc expressément la même signification que dans cette égalité, c'est-à-dire que le signe supérieur se rapportera ainsi exclusivement au cas où les deux coordonnées v et w seront de même signe, et le signe inférieur au cas où elles seront de signes contraires.

Chacune des quantités P^α, Q^α, R^α étant entière en p, q, r, toute difficulté, quant à l'intégration proprement dite, a donc

ainsi disparu, et la question se trouve ramenée par le fait à un simple calcul algébrique, à savoir celui qui consistera à développer d'abord, puis à ordonner suivant la puissance de t, la puissance entière α du trinôme T(97), c'est-à-dire à calculer les divers coefficients du développement

$$(100) \qquad T^\alpha = A_0 + A_1 t^2 + A_2 t^4 + \ldots + A_{2\alpha-1} t^{4\alpha-2} + A_{2\alpha} t^{4\alpha},$$

que nous obtiendrons, sans trop de peine, en opérant comme il suit.

Partons de la formule connue, pour l'exposant entier et positif n,

$$(a+b+c)^n = \sum \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.2\ldots\ldots\alpha\,1.2\ldots\ldots 6.1.2\ldots\ldots\gamma} a^\alpha b^6 c^\gamma, \quad (^*)$$

cette somme étant formée en prenant de toutes les manières possibles les trois exposants entiers et positifs α, 6, γ sous la condition $\alpha + 6 + \gamma = n$, et avec la convention que lorsque l'on attribuera la valeur 0 à l'un de ces exposants, l'on écrira pour ce même exposant 1 à la place de 0 au dénominateur du coefficient numérique du terme envisagé. Nous trouverons donc, sous ces conditions, en écrivant ax^2 au lieu de a, et bx à la place de b, pour le développement de $(ax^2+bx+c)^n$, la formule

$$(ax^2+bx+c)^n = \sum \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\ldots 6.1.2\ldots\ldots\gamma}(ax^2)^\alpha (bx)^6 c^\gamma$$
$$= \sum \frac{n!}{\alpha!\,6!\,\gamma!} a^\alpha b^6 c^\gamma x^{2\alpha+6},$$

en adoptant, pour simplifier l'écriture, la notation abréviative $1.2.3.\ldots m = m!$; et, par conséquent, si nous posons

$$(101) \qquad (ax^2+bx+c)^n = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 x + \mathcal{A}_2 x^2 + \ldots + \mathcal{A}_i x^i + \ldots + \mathcal{A}_{2n} x^{2n},$$

(*) Voir, si l'on veut, les *Leçons d'Algèbre* de LEFEBURE DE FOURCY, 7e édition (1862), page 181.

le coefficient $\mathcal{A}_i$ du terme général sera représenté par la nouvelle somme $\sum n!\,\frac{a^\alpha}{\alpha!}\,\frac{b^\beta}{\beta!}\,\frac{c^\gamma}{\gamma!}$, formée cette fois en prenant de toutes les manières possibles les deux exposants entiers et positifs α et β sous la condition

$$2\alpha + \beta = i \qquad \text{ou} \qquad \beta = i - 2\alpha.$$

laquelle donnera, par conséquent,

$$\alpha + \beta = i - \alpha \qquad \text{et} \qquad \gamma = n - (\alpha + \beta) = n - i + \alpha,$$

en sorte que ladite somme pourra être écrite, sous forme condensée, l'argument α recevant, par hypothèse, toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $\frac{i}{2}$ ou $\frac{i-1}{2}$, suivant que i sera pair ou impair,

$$(102) \qquad \mathcal{A}_i = \sum_\alpha n!\,\frac{a^\alpha}{\alpha!}\,\frac{b^{i-2\alpha}}{(i-2\alpha)!}\,\frac{c^{n-i+\alpha}}{(n-i+\alpha)!},$$

étant entendu alors, quant aux dénominateurs des différents termes de cette somme, que lorsque l'exposant α recevra la valeur 0, c'est dans le seul premier dénominateur $\alpha!$ que l'on devra écrire 1 à la place de 0, et non dans les deux suivants qui tiennent lieu de $\beta!$ et de $\gamma!$, la même convention que devant étant d'ailleurs maintenue pour ces deux derniers dénominateurs relativement aux facteurs $\beta = i - \alpha$ et $\gamma = n - i + \alpha$ eux-mêmes.

D'ailleurs, de même que pour la formule du binôme dont il est issu, les $2n+1$ coefficients du développement (101) se ramèneront très aisément aux $n+1$ premiers d'entre eux, qu'il sera en conséquence seuls nécessaire de calculer. Car si nous désignons, pour un instant, par $(\mathcal{A}_i)$ ce que devient le coefficient $\mathcal{A}_i$ lorsque l'on y permute les deux lettres a et c, on aura donc, d'une part, en tenant compte à la fois de la formule (101) et de cette dernière définition, le développement

$$(cx^2 + bx + a)^n = (\mathcal{A}_0) + (\mathcal{A}_1)x + \cdots + (\mathcal{A}_i)x^i + \cdots + (\mathcal{A}_{2n-1})x^{2n-1} + (\mathcal{A}_{2n})x^{2n},$$

ou, en changeant x en $\frac{1}{x}$,

$$\left(c\frac{1}{x^2}+b\frac{1}{x}+a\right)^n=(\mathcal{A}_0)+(\mathcal{A}_1)\frac{1}{x}+\cdots+(\mathcal{A}_i)\frac{1}{x^i}+\cdots+(\mathcal{A}_{2n-1})\frac{1}{x^{2n-1}}+(\mathcal{A}_{2n})\frac{1}{x^{2n}},$$

et enfin, en multipliant par x^{2n},

$$(c+bx+ax^2)^n=(\mathcal{A}_0)x^{2n}+(\mathcal{A}_1)x^{2n-1}+\cdots+(\mathcal{A}_i)x^{2n-i}+\cdots+(\mathcal{A}_{2n-1})x+(\mathcal{A}_{2n}),$$

développement dont la comparaison avec celui de l'expression identique (101) d'où nous sommes parti fournira, par conséquent, les égalités

$$(103)\qquad \mathcal{A}_{2n}=(\mathcal{A}_0),\quad \mathcal{A}_{2n-1}=(\mathcal{A}_1),\ \ldots\ldots\ \mathcal{A}_{2n-i}=(\mathcal{A}_i),\ \ldots$$

qui ramèneront dès lors le calcul des $2n+1$ coefficients $\mathcal{A}_i$ à la possession des $n+1$ premiers $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ seulement.

Pour tenir compte de cette remarque et simplifier autant que possible l'écriture des résultats qui précèdent, nous mettrons alors l'expression (102) du coefficient général $\mathcal{A}_i$, en y écrivant j comme indice à la place de α, et tenant compte de la signification du symbole $m!$, sous la forme équivalente

$$(104)\qquad \mathcal{A}_i=\sum_j n!\,\frac{a^j}{j!}\,\frac{b^{i-2j}}{(i-2j)!}\,\frac{c^{n-i}.\,c^j}{j!(j+1)(j+2)\ldots(j+n-i)}=c^{n-i}\bar{\mathcal{A}}_i,$$

en faisant

$$(105)\qquad \bar{\mathcal{A}}_i=\sum_j\frac{n!}{(j+1)(j+2)\ldots(j+n-i)}\,\frac{a^j}{j!}\,\frac{b^{i-2j}}{(i-2j)!}\,\frac{c^j}{j!};$$

et comme l'élément de cette dernière somme $\bar{\mathcal{A}}_i$ est symétrique en a et c, l'on aura donc ainsi à la fois, en vertu de la définition même du symbole $(\mathcal{A}_i)$,

$$\mathcal{A}_i=c^{n-i}\bar{\mathcal{A}}_i,\qquad\qquad (\mathcal{A}_i)=a^{n-i}\bar{\mathcal{A}}_i,$$

d'où résultera par conséquent, par les égalités précédentes (103),

la forme très simple et très symétrique des diverses égalités (104)

$$(106)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_0 = c^n \overline{\mathcal{A}}_0, \quad \mathcal{A}_1 = c^{n-1} \overline{\mathcal{A}}_1, \quad \mathcal{A}_2 = c^{n-2} \overline{\mathcal{A}}_2, \ldots\ldots \mathcal{A}_i = c^{n-i} \overline{\mathcal{A}}_i, \\ \mathcal{A}_{2n} = a^n \overline{\mathcal{A}}_0, \quad \mathcal{A}_{2n-1} = a^{n-1} \overline{\mathcal{A}}_1, \quad \mathcal{A}_{2n-2} = a^{n-2} \overline{\mathcal{A}}_2, \ldots\ldots \mathcal{A}_{2n-i} = a^{n-i} \overline{\mathcal{A}}_i, \end{cases}$$

qui fournit l'expression définitive des coefficients demandés de la formule générale (101).

Pour faire usage à présent de ces résultats pour le développement (100) qui nous intéresse dans la question proposée, convenant de faire désormais, en vue d'abréger l'écriture des résultats ultérieurs,

$$(107)\qquad g^2 = l^2 n^2, \qquad h = l^2 - n^2,$$

notations qui donneront alors pour notre quantité T (97) l'expression simple

$$(108)\qquad \mathrm{T} = g^2 + ht^2 - t^4,$$

pour avoir le développement demandé (100) de l'expression T^α, il suffira de faire, dans les formules (105) et (106) que nous venons d'obtenir, $a = -1$, $b = h$, $c = g^2$, $n = \alpha$, auquel cas ces formules donneront, pour les différents coefficients de ce développement, les valeurs

$$(109)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_0 = g^{2\alpha} \overline{\mathrm{A}}_0, \quad \mathrm{A}_1 = g^{2(\alpha-1)} \overline{\mathrm{A}}_1, \quad \mathrm{A}_2 = g^{2(\alpha-2)} \overline{\mathrm{A}}_2, \ldots\ldots \mathrm{A}_i = g^{2(\alpha-i)} \overline{\mathrm{A}}_i, \\ \mathrm{A}_{2\alpha} = (-1)^\alpha \overline{\mathrm{A}}_0, \quad \mathrm{A}_{2\alpha-1} = (-1)^{\alpha-1} \overline{\mathrm{A}}_1, \quad \mathrm{A}_{2\alpha-2} = (-1)^{\alpha-2} \overline{\mathrm{A}}_2, \ldots\ldots \\ \qquad\qquad \mathrm{A}_{2\alpha-i} = (-1)^{\alpha-i} \overline{\mathrm{A}}_i, \end{cases}$$

$$(110)\qquad \overline{\mathrm{A}}_i = \sum_j \frac{\alpha!}{(j+1)(j+2)\ldots\ldots(j+\alpha-i)} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{h^{i-2j}}{(i-2j)!} \frac{g^{2j}}{j!},$$

l'argument j prenant encore dans cette dernière somme, de même que l'argument α dans la somme (102), toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $\frac{i}{2}$ ou $\frac{i-1}{2}$, suivant que i sera pair ou impair.

De ces expressions l'on conclura en particulier, en ayant égard

aux conventions admises relativement aux dénominateurs, pour les cinq termes extrêmes, de part et d'autre, les valeurs de la quantité $\overline{A}_i$ (110)

$$\left\{\begin{aligned}
&\overline{A}_0 = \frac{\alpha!}{1.2.3\ldots\alpha} = 1, \qquad \overline{A}_1 = \frac{\alpha!}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}\frac{h}{1} = \alpha h,\\
&\overline{A}_2 = \frac{\alpha!}{(\alpha-2)!}\frac{h^2}{2} + \frac{\alpha!}{(\alpha-1)!}\frac{-1}{1}\frac{g^2}{1} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}h^2 - \alpha g^2,\\
&\overline{A}_3 = \frac{\alpha!}{(\alpha-3)!}\frac{h^3}{3!} + \frac{\alpha!}{(\alpha-2)!}\frac{-1}{1}\frac{h}{1}\frac{g^2}{1} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}h^3 - \alpha(\alpha-1)hg^2,\\
&\overline{A}_4 = \frac{\alpha!}{(\alpha-4)!}\frac{h^4}{4!} + \frac{\alpha!}{(\alpha-3)!}\frac{-1}{1}\frac{h^2}{1.2}\frac{g^2}{1} + \frac{2\alpha!}{(\alpha-2)!}\frac{(-1)^2}{1.2}\frac{g^4}{1.2}\\
&\quad = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3.4}h^4 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2}h^2g^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}g^4,
\end{aligned}\right.$$

lesquelles, étant remises dans les égalités (106), redonnent bien effectivement, pour les coefficients de ces termes extrêmes, les mêmes valeurs que l'on trouve, sans trop de peine, pour ceux-là, en appliquant itérativement la formule du binôme au développement de l'expression $\left[(g^2 + hz) - z^2\right]^\alpha$, ce qui permet de vérifier suffisamment, si on le désire, l'exactitude des calculs que nous venons de présenter.

L'expression complète du développement (100) étant ainsi obtenue, et ayant, d'après cette formule même, pour toutes les valeurs entières de l'indice i, depuis 0 jusqu'à 2α,

$$T^\alpha = \sum_i A_i t^{2i}, \qquad T^\alpha t^2 = \sum_i A_i t^{2i+2}, \qquad T^\alpha t^4 = \sum_i A_i t^{2i+4},$$

les éléments de chaque colonne du déterminant en question (99) appartiendront donc ainsi respectivement aux trois types

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} T^\alpha dt = \sum_i \frac{A_i}{2i+1}(t^{2i+1})_{t_1}^{t_2}, \qquad \int_{t_1}^{t_2} T^\alpha t^2 dt = \sum_i \frac{A_i}{2i+3}(t^{2i+3})_{t_1}^{t_2},\\
&\int_{t_1}^{t_2} T^\alpha t^4 dt = \sum_i \frac{A_i}{2i+5}(t^{2i+5})_{t_1}^{t_2},
\end{aligned}\right.$$

desquels l'on conclura par suite, en faisant successivement $t = p, q, r$, tous les éléments dudit déterminant; et par conséquent, le problème sera réduit désormais au seul calcul effectif de ce déterminant, en tenant compte de toutes les réductions qui pourront s'offrir : question que nous allons traiter et résoudre de même complètement un peu plus loin.

A titre d'exemple, examinons le cas simple relatif à l'hypothèse $\alpha = 1$.

Dans ce cas, les différents éléments du déterminant qui figure dans l'expression (99) de $J_x^{(\alpha)}$, appartiendront alors, pour les première, deuxième, et troisième colonne, respectivement aux trois types suivants

$$(112)\quad \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{T}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (g^2 + ht^2 - t^4)\, dt = g^2 (t)_1^2 + \frac{1}{3} h(t^3)_1^2 - \frac{1}{5} (t^5)_1^2, \\ \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{T} t^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} (g^2 t^2 + ht^4 - t^6)\, dt = \frac{1}{3} g^2 (t^3)_1^2 + \frac{1}{5} h(t^5)_1^2 - \frac{1}{7} (t^7)_1^2, \\ \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{T} t^4 dt = \int_{t_1}^{t_2} (g^2 t^4 + ht^6 - t^8)\, dt = \frac{1}{5} g^2 (t^5)_1^2 + \frac{1}{7} h(t^7)_1^2 - \frac{1}{9} (t^9)_1^2, \end{cases}$$

desquels on déduira, comme nous l'avons dit, en faisant dans ces trois dernières égalités successivement $t = p, q, r$, tous les éléments du déterminant demandé.

B. [*Intégrale* $I_x^{(\alpha)}$]. Venons maintenant au premier type de somme (96), et dans ce but, commençons par exprimer de nouveau l'élément $d\mathfrak{M}$ à l'aide de nos variables auxiliaires p, q, r.

A cet effet, récrivant les dernières valeurs (89), (90), et (91), ainsi que les expressions des différentielles (92), à l'aide de la notation convenue (97), comme il suit

$$(113)\qquad dp = \pm \frac{\sqrt{\mathrm{P}}}{n} du, \qquad dq = \pm \frac{\sqrt{\mathrm{Q}}}{l} dv, \qquad dr = \pm \frac{\sqrt{\mathrm{R}}}{m} dw,$$

$$(114)\qquad du = \pm \frac{ndp}{\sqrt{\mathrm{P}}}, \qquad dv = \pm \frac{ldq}{\sqrt{\mathrm{Q}}}, \qquad dw = \pm \frac{mdr}{\sqrt{\mathrm{R}}},$$

nous commencerons par observer que le signe de ces expressions n'étant évidemment pas arbitraire, il est nécessaire, avant d'en faire usage, de décider, en tenant compte des distinctions de signe admises à l'occasion des variables p, q, r (88), quel signe l'on devra prendre dans chacune de ces expressions, chaque radical étant entendu toujours, comme nous l'avons dit, expressément dans le sens de la détermination positive.

Pour la première, l'expression de la dérivée

$$(115) \qquad \frac{d\,(l \operatorname{sn} u)}{du} = l \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \mathrm{U}$$

étant une fonction paire réelle qui reste positive quel que soit le signe de la coordonnée u $(-\mathrm{K} < u < \mathrm{K})$, montre immédiatement : en premier lieu, que, dans la première équation (113), le rapport $\frac{\sqrt{\mathrm{P}}}{n}$ est une quantité réelle positive (c'est-à-dire que la quantité $\sqrt{\mathrm{P}}$ est une quantité purement imaginaire, de manière que l'imaginaire i disparaisse dans ce rapport, ainsi que dans le rapport inverse $\frac{n}{\sqrt{\mathrm{P}}}$) ; et en second lieu, que c'est dès lors le signe $+$ qu'il faudra prendre constamment dans cette équation, et par conséquent aussi dans l'expression de la première différentielle (114), quel que soit le signe de la coordonnée u.

Pour les deux autres de ces différentielles, il sera nécessaire d'examiner séparément l'hypothèse des deux signes relativement à chacune des coordonnées v ou w.

Pour la seconde de ces expressions, en effet, la valeur de la dérivée

$$(116) \qquad \frac{d\,(l \operatorname{dn} v)}{dv} = l\,(-k'^2) \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v = \mathrm{V}$$

étant, au contraire, une fonction impaire de même signe que $v\,(-\mathrm{K}' < v < \mathrm{K}')$, eu égard à la valeur (3) de k'^2 qui est négative, il résulte de là que l'on aura, d'après nos définitions (88), suivant l'hypothèse,

$$\left\{\begin{array}{llll} v > 0, & \mathrm{V} > 0, & q = + l \operatorname{dn} v, & \dfrac{dq}{dv} = + \mathrm{V}, \\ v < 0, & \mathrm{V} < 0, & q = - l \operatorname{dn} v, & \dfrac{dq}{dv} = - \mathrm{V}, \end{array}\right.$$

la valeur de la dérivée $\frac{dq}{dv}$ étant ainsi toujours une quantité positive : d'où il suit que, dans la seconde équation (113), et par conséquent aussi dans l'expression de la seconde différentielle (114), c'est de nouveau constamment le signe + qu'il faudra prendre à l'exclusion de l'autre.

Pour la dernière de ces mêmes expressions enfin, l'on voit, en tenant compte de la définition (7) de n, ainsi que de la première et de la dernière formule (23), que la dérivée

$$(117) \quad \frac{d\,(in \operatorname{cn} w)}{dw} = in\,(-\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w) = -\sqrt{a^2 - c^2}\,.\,\frac{-ik_1 \operatorname{sn}\left(\frac{w'}{k_1}, k\right)}{\operatorname{cn}^2\left(\frac{w'}{k_1}, k\right)} = \mathrm{W}$$

est encore une fonction impaire de même signe que w', et par conséquent que $w = iw'$: d'où il suit de nouveau, la définition admise pour la variable r donnant semblablement, suivant l'hypothèse,

$$\left\{\begin{array}{llll} w > 0, & \mathrm{W} > 0, & r = +\,in \operatorname{cn} w, & \dfrac{dr}{dw} = +\,\mathrm{W}, \\ w < 0, & \mathrm{W} < 0, & r = -\,in \operatorname{cn} w, & \dfrac{dr}{dw} = -\,\mathrm{W}, \end{array}\right.$$

que la valeur de la dérivée $\frac{dr}{dw}$ (*) sera encore une quantité positive dans l'un et l'autre cas ; et par conséquent, c'est encore le signe + qu'il faudra prendre constamment, à l'exclusion de l'autre, dans la dernière équation (113), et par suite aussi dans l'expression de la troisième différentielle (114).

En résumé, le signe — devant être rejeté à la fois dans les

(*) Nous disons expressément ici la valeur de la dérivée $\frac{dr}{dw}$, et non pas celle de la dérivée inverse $\frac{dw}{dr}$. Cette distinction, qui serait sans intérêt à propos des deux premières expressions (113) ou (114), lesquelles sont toutes les deux réelles, ainsi que le montrent les égalités (115) et (116), est essentielle, au contraire, quant à la troisième des mêmes groupes qui est purement imaginaire ; car l'égalité (117) montrant que la valeur de la dérivée précitée $\frac{dr}{dw}$ est de la forme $i\mathrm{W}'$, W' étant réel, la dérivée inverse $\frac{dw}{dr} = \frac{1}{i\mathrm{W}'} = \frac{-i}{\mathrm{W}'}$ est alors comme on voit, de signe contraire à W', et par conséquent aussi à la dérivée en question $\frac{dr}{dw} = i\mathrm{W}'$.

six égalités (113) et (114), l'on aura donc définitivement, sans incertitude, quel que soit le signe des coordonnées u, v, w, les trois valeurs

$$(118) \qquad du = \frac{ndp}{\sqrt{P}}, \qquad dv = \frac{ldq}{\sqrt{Q}}, \qquad dw = \frac{mdr}{\sqrt{R}},$$

chaque radical étant entendu expressément dans le sens de la détermination positive (*).

Ce point essentiel étant élucidé, en remettant donc à la fois ces dernières valeurs et celle (95) de Θ dans l'expression (76 bis) de l'élément de volume, celle-ci deviendra, étant exprimée à l'aide des variables p, q, r, avec la même interprétation des radicaux,

$$dndn'dn'' = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix} \frac{ndp}{\sqrt{P}} \frac{ldq}{\sqrt{Q}} \frac{mdr}{\sqrt{R}},$$

et l'on aura dès lors, pour l'élément de masse, en supprimant haut et bas le facteur constant $\sqrt{G} = \sqrt{l^2m^2n^2} = lmn$, cette nouvelle expression, sous la forme d'un déterminant dont chaque ligne ne dépend encore que d'une seule variable,

$$(119) \qquad d\mathfrak{M} = D \begin{vmatrix} \frac{dp}{\sqrt{P}}, & \frac{p^2dp}{\sqrt{P}}, & \frac{p^4dp}{\sqrt{P}} \\ \frac{dq}{\sqrt{Q}}, & \frac{q^2dq}{\sqrt{Q}}, & \frac{q^4dq}{\sqrt{Q}} \\ \frac{dr}{\sqrt{R}}, & \frac{r^2dr}{\sqrt{R}}, & \frac{r^4dr}{\sqrt{R}} \end{vmatrix},$$

(*) C'est précisément en vue d'arriver à ce résultat qui, supprime des distinctions de signe embarrassantes dans les calculs que nous nous proposons de développer et l'interprétation des formules qui en ressortiront, que nous avons introduit, dans la définition de nos variables auxiliaires q et r (88), la distinction de signe que nous avons dite, suivant le signe des coordonnées correspondantes v ou w elles-mêmes.

chacun des radicaux étant toujours entendu dans le sens arithmétique.

Ces préliminaires étant acquis, l'on aura donc, eu égard à l'expression de gauche (94), en employant cette dernière formule (119),

$$I_x^{(\alpha)}=\mathbf{S}\,x^\alpha d\mathfrak{M}=\mathbf{S}\left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha p^\alpha q^\alpha r^\alpha.\mathrm{D}\begin{vmatrix}\dfrac{dp}{\sqrt{P}}, & \dfrac{p^2dp}{\sqrt{P}}, & \dfrac{p^4dp}{\sqrt{P}}\\ \dfrac{dq}{\sqrt{Q}}, & \dfrac{q^2dq}{\sqrt{Q}}, & \dfrac{q^4dq}{\sqrt{Q}}\\ \dfrac{dr}{\sqrt{R}}, & \dfrac{r^2dr}{\sqrt{R}}, & \dfrac{r^4dr}{\sqrt{R}}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha \mathrm{D}.\,\mathbf{S}\begin{vmatrix}\dfrac{p^\alpha dp}{\sqrt{P}}, & \dfrac{p^{\alpha+2}dp}{\sqrt{P}}, & \dfrac{p^{\alpha+4}dp}{\sqrt{P}}\\ \dfrac{q^\alpha dq}{\sqrt{Q}}, & \dfrac{q^{\alpha+2}dq}{\sqrt{Q}}, & \dfrac{q^{\alpha+4}dq}{\sqrt{Q}}\\ \dfrac{r^\alpha dr}{\sqrt{R}}, & \dfrac{r^{\alpha+2}dr}{\sqrt{R}}, & \dfrac{r^{\alpha+4}dr}{\sqrt{R}}\end{vmatrix},$$

expression qui se décomposera de nouveau en intégrales simples, d'après les explications fournies une fois pour toutes (p. 473), et qui pourra dès lors, en convenant de nouveau de désigner, pour $t = p, q, r$, par T_α l'intégrale définie

$$(120)\qquad \mathrm{T}_\alpha=\int_{t_1}^{t_2}\frac{t^\alpha dt}{\sqrt{\mathrm{T}}}=\int_{t_1}^{t_2}\frac{t^\alpha dt}{\sqrt{n^2l^2+(l^2-n^2)\,t^2-t^4}},$$

le radical étant expressément, comme pour chacun de ceux de la formule (119), supposé pris avec la détermination positive, être représentée, à l'aide de cette notation, par la formule simple

$$(121)\qquad I_x^{(\alpha)}=\left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha \mathrm{D}\begin{vmatrix}\mathrm{P}_\alpha, & \mathrm{P}_{\alpha+2}, & \mathrm{P}_{\alpha+4}\\ \mathrm{Q}_\alpha, & \mathrm{Q}_{\alpha+2}, & \mathrm{Q}_{\alpha+4}\\ \mathrm{R}_\alpha, & \mathrm{R}_{\alpha+2}, & \mathrm{R}_{\alpha+4}\end{vmatrix},$$

les symboles P_α, Q_α, R_α désignant encore, par définition, comme pour la formule (97), ce que devient l'expression T_α (120), lorsque l'on y écrit respectivement p, q, r à la place de t.

Dans cette expression, comme dans celle précédemment acquise (99) de l'autre somme $J_z^{(\alpha)}$, et pour les mêmes raisons, le signe supérieur se rapporte encore expressément au cas où les deux coordonnées v et w seront de même signe, et de même le signe inférieur à l'hypothèse contraire.

D'ailleurs le signe des coordonnées v et w changeant respectivement avec celui des coordonnées y et z, il est clair que dans les intégrations triples, ce seront les plans coordonnés zx et xy eux-mêmes qui délimiteront les portions du champ d'intégration pour lesquelles il faudra prendre expressément ainsi l'un ou l'autre des deux signes. Et comme, d'après ce que nous avons eu soin de faire observer précisément dans ce but, le signe de la coordonnée v est toujours celui de la coordonnée y (p. 431), tandis que, à l'opposé, le signe de la coordonnée w' ou w est le signe contraire de la coordonnée z (p. 432), les portions du champ d'intégration pour lesquelles v et w seront de même signe sont donc celles pour lesquelles les coordonnées rectilignes y et z seront de signe contraire, et inversement; d'où la règle suivante :

Règle pratique. — « *Pour employer les formules* (99) *et* (121),
» *après avoir décomposé, comme il a été dit* (pages 476-477), *la*
» *somme proposée en quatre sommes partielles correspondant aux*
» *quatre prismes infinis parallèles aux* x, *il faudra prendre le*
» *signe supérieur pour celles de ces sommes qui seront relatives*
» *aux prismes infinis de rang pair, et le signe inférieur pour*
» *celles relatives aux prismes de rang impair.* »

La question est donc ainsi ramenée de nouveau tout entière au calcul de la seule quadrature (120), qui est de celles que l'on sait opérer; car une formule de réduction très facile à obtenir permettra sans trop de difficulté de la ramener par de simples opérations algébriques aux deux éléments les plus simples de même parité, c'est-à-dire à des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce, comme nous allons le montrer.

En effet, partons de l'identité

$$\frac{d}{dt}(t^{\alpha-1}\sqrt{T}) = (\alpha - 1)\, t^{\alpha-2}.\sqrt{T} + t^{\alpha-1}.\frac{T'}{2\sqrt{T}}$$
$$= \frac{t^{\alpha-2}}{\sqrt{T}}\left[(\alpha-1)\,T + t.\frac{1}{2}T'\right],$$

dans laquelle la dérivée T′ du trinôme T (97) ou (108) étant l'expression

$$T' = (l^2 - n^2).\,2t - 4t^3 = 2t\,(h - 2t^2),$$

le facteur entre crochets sera dès lors, en réduisant et ordonnant,

$$(\alpha-1)\,T + t.\frac{1}{2}T' = (\alpha-1)(g^2 + ht^2 - t^4) + t^2(h - 2t^2)$$
$$= (\alpha-1)\,g^2 + \alpha h t^2 - (\alpha+1)\,t^4,$$

identité qui deviendra, par conséquent, en y remettant cette dernière valeur,

$$\frac{d}{dt}(t^{\alpha-1}\sqrt{T}) = (\alpha-1)\,g^2.\frac{t^{\alpha-2}}{\sqrt{T}} + \alpha h.\frac{t^{\alpha}}{\sqrt{T}} - (\alpha+1)\frac{t^{\alpha+2}}{\sqrt{T}}.$$

Si on la multiplie alors par dt, et qu'on l'intègre entre les limites t_1 et t_2, l'égalité obtenue par là s'écrira, avec notre notation (120),

$$(t^{\alpha-1}\sqrt{T})_1^2 = (\alpha-1)\,g^2.T_{\alpha-2} + \alpha h.T_{\alpha} - (\alpha+1)\,T_{\alpha+2},$$

et donnera par conséquent la formule de réduction

$$(122)\qquad T_{\alpha+2} = \frac{1}{\alpha+1}\left[-(t^{\alpha-1}\sqrt{T})_1^2 + \alpha h T_{\alpha} + (\alpha-1)g^2 T_{\alpha-2}\right],$$

qui ramènera de proche en proche le calcul de l'intégrale $T_{\alpha+2}$ aux trois seules dernières, savoir, si α est pair, à

$$T_0 = \int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{\sqrt{T}} \qquad \text{et} \qquad T_2 = \int_{t_1}^{t_2}\frac{t^2dt}{\sqrt{T}},$$

et, si α est impair, à la seule intégrale

$$(123) \qquad T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{tdt}{\sqrt{T}},$$

car l'intégrale T_3 sera donnée elle-même par ladite formule (122) en fonction des éléments irréductibles T_1 et T_{-1}, dont le premier interviendra seul en réalité dans l'expression de T_3 ainsi fournie pour $\alpha = 1$ par cette formule (122), puisque le second T_{-1} y serait affecté du coefficient $\alpha - 1 = 0$.

La détermination de ces trois éléments ultimes T_0, T_1, T_2 s'imposant dès lors en premier lieu, envisageons d'abord, dans ce but, les deux quantités d'indice pair, T_0 et T_2, dont *a priori* les expressions en u, v, w ne sauraient dépendre du signe que l'on adoptera dans les valeurs (88) des variables p, q, r, puisque la variable t ne figure dans l'expression de leur différentielle que par son carré. Pour celles-là, ces mêmes valeurs de définition (88), étant introduites dans l'expression des différentielles en question ainsi que celles (118) que nous avons obtenues un peu plus haut pour les différentielles des mêmes variables, donneront, en tenant compte en même temps des valeurs (3) des différents modules, successivement pour les hypothèses de $t = p, q, r$,

$$(124) \quad \left\{ \begin{aligned} P_0 &= \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{1}{n}\int_{p_1}^{p_2} \frac{ndp}{\sqrt{P}} = \frac{1}{n}\int_{u_1}^{u_2} du = \frac{1}{n}(u)_1^2, \\ Q_0 &= \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{l}\int_{q_1}^{q_2} \frac{ldq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{l}\int_{v_1}^{v_2} dv = \frac{1}{l}(v)_1^2, \\ R_0 &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m}\int_{r_1}^{r_2} \frac{mdr}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m}\int_{w_1}^{w_2} dw = \frac{1}{m}(w)_1^2; \end{aligned} \right.$$

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned}
P_2 &= \int_{p_1}^{p_2} \frac{p^2 dp}{\sqrt{P}} = \frac{1}{n}\int_{p_1}^{p_2} p^2 \cdot \frac{n dp}{\sqrt{P}} = \frac{1}{n}\int_{u_1}^{u_2} (l \operatorname{sn} u)^2 . du \\
&= -n\int_{u_1}^{u_2} \left(-\frac{l^2}{n^2}\right) \operatorname{sn}^2 u\, du \\
&= -n\int_{u_1}^{u_2} k^2 \operatorname{sn}^2 (u, k)\, du = -n\left[Z(u, k)\right]_1^2, \\
Q_2 &= \int_{q_1}^{q_2} \frac{q^2 dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{l}\int_{q_1}^{q_2} q^2 \cdot \frac{l dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{l}\int_{v_1}^{v_2} (\pm l \operatorname{dn} v)^2 . dv \\
&= \frac{1}{l}\int_{v_1}^{v_2} l^2\left[1 - k'^2 \operatorname{sn}^2 (v, k')\right] dv \\
&= l\int_{v_1}^{v_2} dv - l\int_{v_1}^{v_2} k'^2 \operatorname{sn}^2 (v, k')\, dv = l(v)_1^2 - l\left[Z(v, k')\right]_1^2, \\
R_2 &= \int_{w_1}^{w_2} \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m}\int_{w_1}^{w_2} r^2 \cdot \frac{m dr}{\sqrt{R}} = \frac{1}{m}\int_{w_1}^{w_2} (\pm in \operatorname{cn} w)^2 . dw \\
&= -\frac{n^2}{m}\int_{w_1}^{w_2} (1 - \operatorname{sn}^2 w)\, dw \\
&= -\frac{n^2}{m}\int_{w_1}^{w_2} dw - m\int_{w_1}^{w_2} \left(-\frac{n^2}{m^2}\right) \operatorname{sn}^2 w\, dw \\
&= -\frac{n^2}{m}(w)_1^2 - m\int_{w_1}^{w_2} k''^2 \operatorname{sn}^2 (w, k'')\, dw \\
&= -\frac{n^2}{m}(w)_1^2 - m\left[Z(w, k'')\right]_1^2.
\end{aligned}\right.$$

Semblablement, pour les éléments d'indice impair du type T_1, dont les expressions en u, v, w dépendront, au contraire, pour

une raison analogue (quant à deux d'entre elles, il s'entend), du signe adopté dans les définitions (88) de q ou r, l'on trouvera sans peine, en interprétant dans les formules qui vont suivre les doubles signes ainsi que nous l'avons fait à l'occasion desdites définitions, c'est-à-dire le signe supérieur correspondant exclusivement à l'hypothèse des coordonnées v ou w positives, et le signe inférieur de même à l'hypothèse contraire, l'on trouvera, disons-nous, en tenant compte de nouveau des mêmes valeurs (88) et (114), ainsi que de la formule (29bis), les trois expressions :

(126)

$$\mathrm{P}_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p\,dp}{\sqrt{\mathrm{P}}} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{p}{n}\cdot\frac{n\,dp}{\sqrt{\mathrm{P}}} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{l\,\mathrm{sn}\,u}{n}\cdot du \overset{(*)}{=} \int_{u_1}^{u_2} \frac{-ik\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\,du$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \frac{ik\;d\,\mathrm{cn}\,u}{\sqrt{1-k^2(1-\mathrm{cn}^2 u)}} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{d.ik\,\mathrm{cn}\,u}{\sqrt{k_1^2-(ik\,\mathrm{cn}\,u)^2}}$$

$$= \left[\arcsin\left(\frac{ik}{k_1}\,\mathrm{cn}\,u\right)\right]_1^2 = \left[\arcsin\left(\frac{il}{m}\,\mathrm{cn}\,u\right)\right]_1^2,$$

$$\mathrm{Q}_1 = \int_{q_1}^{q_2} \frac{q\,dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{q}{l}\cdot\frac{l\,dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}} = \pm\int_{v_1}^{v_2} \mathrm{dn}\,v\,.dv = \pm\int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{cn}\,v}\,dv$$

$$= \pm\int_{v_1}^{v_2} \frac{d.\mathrm{sn}\,v}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 v}} = \pm\left[\arcsin(\mathrm{sn}\,v)\right]_1^2,$$

$$\mathrm{R}_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{m}\cdot\frac{m\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}}} = \pm\int_{w_1}^{w_2} \frac{in\,\mathrm{cn}\,w}{m}\,.\,dw$$

$$\overset{(**)}{=} \pm\int_{w_1}^{w_2} \frac{-k''\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{dn}\,w}\,dw = \mp\int_{w_1}^{w_2} \frac{d.k''\,\mathrm{sn}\,w}{\sqrt{1-k''^2\mathrm{sn}^2 w}}$$

$$= \mp\left[\arcsin(k''\,\mathrm{sn}\,w)\right]_1^2 = \mp\left[\arcsin\left(\frac{-in}{m}\,\mathrm{sn}\,w\right)\right]_1^2.$$

(*) En effet, eu égard aux valeurs (3) de k^2 et (7) de n, le module k étant *positif* par

Ces expressions des divers éléments appartenant aux trois types irréductibles T_0, T_1, T_2 étant ainsi désormais acquises, occupons-nous donc à présent d'obtenir, à l'aide de ces quantités et par le moyen de la formule de réduction (122), la valeur explicite de l'intégrale demandée T_α pour un indice entier et positif quelconque.

A cet effet, convenant de faire, en vue de simplifier les écritures, dans la formule en question (122), pour $n \geqq 3$,

$$(127) \qquad \overline{T}_n = -(t^{n-3}\sqrt{T})_1^2, \qquad A'_n = (n-2)h, \qquad A''_n = (n-3)g^2,$$

puis chassant les dénominateurs, et n'y gardant au second membre que les termes intégrés ou connus du type $\overline{T}_n$, cette même formule, étant supposée récrite de proche en proche en y réduisant à chaque fois l'indice α de deux unités, fournira de cette façon la suite d'équations

$$(128) \left\{ \begin{array}{ll|l}
(\alpha-1)T_\alpha - A'_\alpha \cdot T_{\alpha-2} - A''_\alpha \cdot T_{\alpha-4} = \overline{T}_\alpha, & & 1 \\
(\alpha-3)T_{\alpha-2} - A'_{\alpha-2} \cdot T_{\alpha-4} - A''_{\alpha-2} \cdot T_{\alpha-6} = \overline{T}_{\alpha-2}, & & B_{\alpha,1} \\
(\alpha-5)T_{\alpha-4} - A'_{\alpha-4} \cdot T_{\alpha-6} - A''_{\alpha-4} \cdot T_{\alpha-8} = \overline{T}_{\alpha-4}, & & B_{\alpha,2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots \\
(\alpha-2i+1)T_{\alpha-2i+2} - A'_{\alpha-2i+2} \cdot T_{\alpha-2i} - A''_{\alpha-2i+2} \cdot T_{\alpha-2i-2} = \overline{T}_{\alpha-2i+2}, & & B_{\alpha,i-1} \\
(\alpha-2i-1)T_{\alpha-2i} - A'_{\alpha-2i} \cdot T_{\alpha-2i-2} - A''_{\alpha-2i} \cdot T_{\alpha-2i-4} = \overline{T}_{\alpha-2i}, & & B_{\alpha,i} \\
(\alpha-2i-3)T_{\alpha-2i-2} - A'_{\alpha-2i-2} \cdot T_{\alpha-2i-4} - A''_{\alpha-2i-2} \cdot T_{\alpha-2i-6} = \overline{T}_{\alpha-2i-2}, & & B_{\alpha,i+1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots
\end{array} \right.$$

---

définition, sa valeur est donc sans incertitude $k = \frac{il}{n} = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}$, et non pas la valeur $k = \frac{l}{in} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{-\sqrt{a^2-c^2}}$; d'où il suit, en multipliant la première de ces égalités par $-i$, que l'on a, toujours sans incertitude, l'égalité $-ik = \frac{l}{n}$, et non pas cette autre : $ik = \frac{l}{n}$ qui résulterait au contraire de la seconde valeur rejetée pour k.

(**) Pour la même raison que tout à l'heure, étant donné la valeur (3) de k''^2, savoir $k''^2 = -\frac{n^2}{m^2}$, des deux expressions de signes contraires $\frac{in}{m}$ et $\frac{n}{im} = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$, c'est la seconde qui est positive et qui représente en conséquence la valeur de k''; en sorte que l'on a $k'' = \frac{n}{im} = \frac{-in}{m}$, ou $-k'' = \frac{in}{m}$, ainsi que nous l'écrivons ci-dessus dans chacune des deux dernières lignes de ces équations (126).

les deux dernières équations de la série étant, si $\alpha = 2\nu$,

$$\left\{\begin{aligned} &5T_6 - A'_6 . T_4 - A''_6 T_2 = \overline{T}_6, &\quad& \Big| \; B_{\alpha,\nu-3} \\ &3T_4 - A'_4 . T_2 - A''_4 T_0 = \overline{T}_4, &\quad& \Big| \; B_{\alpha,\nu-2} \end{aligned}\right.$$

ou bien, si $\alpha = 2\nu + 1$,

$$\left\{\begin{aligned} &4T_5 - A'_5 . T_3 - A''_5 . T_1 = \overline{T}_5, &\quad& \Big| \; B_{\alpha,\nu-2} \\ &2T_3 - A'_3 . T_1 - \;\; 0 \;\; = \overline{T}_3. &\quad& \Big| \; B_{\alpha,\nu-1} \end{aligned}\right.$$

Cela posé, si l'on ajoute ensemble ces différentes équations respectivement multipliées, la première par l'unité, et les suivantes par les coefficients indéterminés $B_{\alpha,1}$, $B_{\alpha,2}$, ... $B_{\alpha,i}$ ..., inscrits en marge en regard de chacune, de manière à former la combinaison

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha-1)T_\alpha + \left[(\alpha-3)B_{\alpha,1} - A'_\alpha\right]T_{\alpha-2} + \left[(\alpha-5)B_{\alpha,2} - A'_{\alpha-2}B_{\alpha,1} - A''_\alpha\right]T_{\alpha-4} \\ &\quad + \cdots + \left[(\alpha-2i-3)B_{\alpha,i+1} - A'_{\alpha-2i}B_{\alpha,i} - A''_{\alpha-2i+2}B_{\alpha,i-1}\right]T_{\alpha-2i-2} \\ &\quad + \cdots = \overline{T}_\alpha + B_{\alpha,1}\overline{T}_{\alpha-2} + B_{\alpha,2}\overline{T}_{\alpha-4} + \cdots + B_{\alpha,i}\overline{T}_{\alpha-2i} + \cdots\cdots, \end{aligned}\right.$$

il est clair *a priori* que l'on pourra toujours assigner aux coefficients actuellement indéterminés $B_{\alpha,1}$, $B_{\alpha,2}$, ... $B_{\alpha,i}$ ... des valeurs telles que, dans le premier membre, toutes les quantités du type T_α disparaissent, sauf la première que nous nous proposons de déterminer, et la seule dernière T_1 si α est impair, ou les deux seules T_2 et T_0 si α est pair. En effet, la série des conditions à poser pour cela, savoir

$$(\alpha-3)B_{\alpha,1} - A'_\alpha = 0, \qquad (\alpha-5)B_{\alpha,2} - A'_{\alpha-2}B_{\alpha,1} - A''_\alpha = 0,$$

. . . .

$$(130)\quad (\alpha-2i-3)B_{\alpha,i+1} - A'_{\alpha-2i}B_{\alpha,i} - A''_{\alpha-2i+2}B_{\alpha,i-1} = 0,$$

. . . .

déterminant séparément et successivement, en premier lieu $B_{\alpha,1}$, puis, cette valeur acquise, $B_{\alpha,2}$, puis, à l'aide de ces deux valeurs,

de proche en proche toutes les autres quantités analogues, fournira donc de la sorte, sans que l'on ait à redouter aucune impossibilité ni indétermination, toute la série des coefficients $B_{\alpha,i}$ qui vérifieront ces conditions; de manière qu'avec lesdites valeurs, l'équation formée tout à l'heure (129) fournira elle-même immédiatement l'expression demandée de la quantité T_{α}, en fonction des quantités intégrées du type $\overline{T}_{n}$, et des seules quantités T_1 ou T_0 et T_2, suivant la parité de α.

On trouvera sans peine, en agissant ainsi, et tenant compte des définitions (127) des coefficients A, pour les trois premiers coefficients en question $B_{\alpha,i}$, les valeurs

$$\left\{\begin{aligned}
B_{\alpha,1} &= \frac{\alpha-2}{\alpha-3}h, \qquad B_{\alpha,2} = \frac{(\alpha-2)(\alpha-4)h^2+(\alpha-3)^2g^2}{(\alpha-3)(\alpha-5)} \\
&= \frac{(\alpha-2)(\alpha-4)}{(\alpha-3)(\alpha-5)}\left[h^2+\frac{(\alpha-3)^2}{(\alpha-2)(\alpha-4)}g^2\right], \\
B_{\alpha,3} &= \frac{(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha-6)h^3+[(\alpha-6)(\alpha-3)^2+(\alpha-2)(\alpha-5)^2]hg^2}{(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha-7)} \\
&= \frac{(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha-6)}{(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha-7)}\left[h^3+\left(\frac{(\alpha-3)^2}{(\alpha-2)(\alpha-4)}+\frac{(\alpha-5)^2}{(\alpha-4)(\alpha-6)}\right)hg^2\right].
\end{aligned}\right.$$

Quant à l'expression du coefficient $B_{\alpha,i}$ du terme général, qui est sensiblement plus difficile à obtenir, on peut la représenter, ainsi que nous allons le montrer, par les formules connexes

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned}
&B_{\alpha,i} = M_{\alpha,i}N_{\alpha,i}, \qquad M_{\alpha,i} = \frac{(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha-6)\ldots(\alpha-2i)}{(\alpha-3)(\alpha-5)(\alpha-7)\ldots(\alpha-2i-1)}, \\
&N_{\alpha,i} = h^i + B^{(1)}_{\alpha,i}h^{i-2}g^2 + B^{(2)}_{\alpha,i}h^{i-4}g^4 + \cdots\cdots + B^{(j)}_{\alpha,i}h^{i-2j}g^{2j} + \cdots,
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles, l'indice j étant au plus égal au plus grand nombre entier compris dans $\frac{i}{2}$, c'est-à-dire étant supposé recevoir successivement toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à $\frac{i}{2}$ ou $\frac{i-1}{2}$ suivant que i sera pair ou impair, la définition des

nouveaux coefficients $B^{(j)}_{\alpha,i}$ du polynôme entier $N_{\alpha,i}$ est la suivante.

Supposons que l'on ait écrit toutes les fractions numériques du type $\frac{(\alpha-2k-1)^2}{(\alpha-2k)(\alpha-2k-2)}$, pour toutes les valeurs entières de k depuis 1 jusqu'à $i-1$ telles que chacun des facteurs qui y figurent, $\alpha-2k$, $\alpha-2k-1$, $\alpha-2k-2$ soient positifs : la quantité $B^{(j)}_{\alpha,i}$ sera la somme de tous les produits j à j de semblables fractions prises de telle sorte que, dans chacun des produits ainsi formés, chaque facteur du dénominateur n'entre qu'à la première puissance seulement.

De cette définition très nette résulteront, en premier lieu, les valeurs des trois premiers coefficients $B_{\alpha,i}$

$$B^{(1)}_{\alpha,i}=\frac{(\alpha-3)^2}{(\alpha-2)(\alpha-4)}+\frac{(\alpha-5)^2}{(\alpha-4)(\alpha-6)}+\cdots+\frac{(\alpha-2i+1)^2}{(\alpha-2i+2)(\alpha-2i)},$$

$$\begin{aligned}B^{(2)}_{\alpha,i}=&\frac{(\alpha-3)^2}{(\alpha-2)(\alpha-4)}\,\frac{(\alpha-7)^2}{(\alpha-6)(\alpha-8)}+\frac{(\alpha-3)^2}{(\alpha-2)(\alpha-4)}\,\frac{(\alpha-9)^2}{(\alpha-8)(\alpha-10)}\\&+\cdots\cdots\cdots\qquad+\frac{(\alpha-3)^2}{(\alpha-2)(\alpha-4)}\,\frac{(\alpha-2i+1)^2}{(\alpha-2i+2)(\alpha-2i)}\\&+\frac{(\alpha-5)^2}{(\alpha-4)(\alpha-6)}\,\frac{(\alpha-9)^2}{(\alpha-8)(\alpha-10)}+\cdots+\frac{(\alpha-5)^2}{(\alpha-4)(\alpha-6)}\,\frac{(\alpha-2i+1)^2}{(\alpha-2i+2)(\alpha-2i)}\\&+\frac{(\alpha-7)^2}{(\alpha-6)(\alpha-8)}\,\frac{(\alpha-11)^2}{(\alpha-10)(\alpha-12)}+\cdots\cdots\cdots\\&+\cdots\cdots\cdots\qquad+\frac{(\alpha-2i+5)^2}{(\alpha-2i+6)(\alpha-2i+4)}\,\frac{(\alpha-2i+1)^2}{(\alpha-2i+2)(\alpha-2i)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^{(3)}_{\alpha,i}=&\frac{(\alpha-3)^2}{(\alpha-2)(\alpha-4)}\,\frac{(\alpha-7)^2}{(\alpha-6)(\alpha-8)}\,\frac{(\alpha-11)^2}{(\alpha-10)(\alpha-12)}+\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{(\alpha-2i+9)^2}{(\alpha-2i+10)(\alpha-2i+8)}\,\frac{(\alpha-2i+5)^2}{(\alpha-2i+6)(\alpha-2i+4)}\,\frac{(\alpha-2i+1)^2}{(\alpha-2i+2)(\alpha-2i)};\end{aligned}$$

puis, en second lieu, les relations évidentes entre les quanti-

tés $B^{(j)}_{\alpha,i}$ relatives à trois valeurs consécutifs de i,

$$(132)\quad \left\{\begin{aligned} B^{(1)}_{\alpha,i+1} &= B^{(1)}_{\alpha,i} + \frac{(\alpha-2i-1)^2}{(\alpha-2i)(\alpha-2i-2)},\\ B^{(2)}_{\alpha,i+1} &= B^{(2)}_{\alpha,i} + \frac{(\alpha-2i-1)^2}{(\alpha-2i)(\alpha-2i-2)}\,B^{(1)}_{\alpha,i-1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ B^{(j)}_{\alpha,i+1} &= B^{(j)}_{\alpha,i} + \frac{(\alpha-2i-1)^2}{(\alpha-2i)(\alpha-2i-2)}\,B^{(j-1)}_{\alpha,i-1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

analogues à celles que l'on rencontrerait en algèbre entre les sommes de produits d'ordres consécutifs relatifs aux racines de deux équations algébriques de degrés $i-1$ et i, dont la seconde ne différerait de la première que par l'introduction d'un seul facteur nouveau (*).

En partant de ces relations il est aisé de vérifier l'exactitude de l'expression générale (131) donnée tout à l'heure pour le coefficient $B_{\alpha,i}$.

En effet, le facteur $M_{\alpha,i}$ qui y figure satisfaisant manifestement aux relations

$$M_{\alpha,i+1} = M_{\alpha,i}\frac{\alpha-2i-2}{\alpha-2i-3}, \qquad M_{\alpha,i} = M_{\alpha,i-1}\frac{\alpha-2i}{\alpha-2i-1},$$

qui multipliées entre elles fourniront par conséquent celle-ci

$$M_{\alpha,i+1} = M_{\alpha,i-1}\frac{(\alpha-2i)(\alpha-2i-2)}{(\alpha-2i-1)(\alpha-2i-3)},$$

pour que l'expression en question $B_{\alpha,i} = M_{\alpha,i}N_{\alpha,i}$ vérifie, comme

(*) Voir, si l'on veut, à titre d'exemple, les équations de gauche (8) de notre Note *Sur une expression explicite de l'intégrale algébrique d'un système hyperelliptique de la forme la plus générale.* (COMPTES RENDUS, 6 février 1893.)

qu'il est demandé, la condition (130), ou, en d'autres termes, en tenant compte de la définition (127) des coefficients A, pour que l'on ait

$$(\alpha - 2i - 3)\, M_{\alpha,i+1} N_{\alpha,i+1} - (\alpha - 2i - 2)\, h\,.\, M_{\alpha,i}\,.\, N_{\alpha,i} \\ - (\alpha - 2i - 1)\, g^2\,.\, M_{\alpha,i-1} N_{\alpha,i-1} = 0,$$

il sera donc nécessaire et suffisant, eu égard aux valeurs précédentes, que l'on ait

$$(\alpha - 2i - 3)\,.\, M_{\alpha,i-1}\, \frac{(\alpha - 2i)(\alpha - 2i - 2)}{(\alpha - 2i - 1)(\alpha - 2i - 3)}\,.\, N_{\alpha,i+1}$$

$$- (\alpha - 2i - 2)\, h\,.\, M_{\alpha,i-1}\, \frac{\alpha - 2i}{\alpha - 2i - 1}\,.\, N_{\alpha,i} - (\alpha - 2i - 1)\, g^2\,.\, M_{\alpha,i-1} N_{\alpha,i-1} = 0,$$

c'est-à-dire, en supprimant le facteur commun $M_{\alpha,i-1}$, et multipliant ensuite par $\alpha - 2i - 1$,

$$(\alpha - 2i)(\alpha - 2i - 2)\,.\, N_{\alpha,i+1} - (\alpha - 2i)(\alpha - 2i - 2)\, h\,.\, N_{\alpha,i} \\ - (\alpha - 2i - 1)^2\, g^2\,.\, N_{\alpha,i-1} = 0,$$

ou, en séparant en deux membres :

$$N_{\alpha,i+1} = h\,.\, N_{\alpha,i} + \frac{(\alpha - 2i - 1)^2}{(\alpha - 2i)(\alpha - 2i - 2)}\, g^2\,.\, N_{\alpha,i-1}\,.$$

Or, il résulte à première vue de la définition (131) du facteur $N_{\alpha,i}$ que cette quantité vérifie bien effectivement la condition à laquelle nous venons d'arriver, car, en vertu de cette définition, ladite condition équivaut à la suivante

$$h^{i+1} + B^{(1)}_{\alpha,i+1} h^{i-1} g^2 + B^{(2)}_{\alpha,i+1} h^{i-3} g^4 + \cdots\cdots \quad + B^{(j)}_{\alpha,i+1} h^{i-2j+1} g^{2j} + \cdots$$

$$= h\left[h^i + B^{(1)}_{\alpha,i} h^{i-2} g^2 + B^{(2)}_{\alpha,i} h^{i-4} g^4 + \cdots\cdots \quad + B^{(j)}_{\alpha,i} h^{i-2j} g^{2j} + \cdots\right]$$

$$+ \frac{(\alpha - 2i - 1)^2}{(\alpha - 2i)(\alpha - 2i - 2)}\, g^2\,.\left[h^{i-1} + B^{(1)}_{\alpha,i-1} h^{i-3} g^2 + \cdots + B^{(j-1)}_{\alpha,i-1} h^{i-2j+1} g^{2(j-1)} + \cdots\right],$$

laquelle est manifestement vérifiée lorsqu'on admet que les relations (132) le sont elles-mêmes, ce qui a lieu effectivement, ainsi que nous l'avons remarqué, en vertu des définitions ci-dessus posées pour les coefficients $B^{(j)}_{\alpha,i}$.

En entendant donc désormais que le symbole $B_{\alpha,i}$ représente l'expression définie par les égalités (131) avec cette signification précise du symbole $B^{(j)}_{\alpha,i}$, l'équation obtenue en premier lieu (129) se réduira donc alors simplement, savoir : si $\alpha = 2\nu$, à celle-ci

$$(132^{\text{bis}})\quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - 1)\,T_\alpha - (A'_4 B_{\alpha,\nu-2} + A''_6 B_{\alpha,\nu-3}).T_2 - A''_4 B_{\alpha,\nu-2}.T_0 \\ &\quad = \overline{T}_\alpha + B_{\alpha,1}.\overline{T}_{\alpha-2} + B_{\alpha,2}\,\overline{T}_{\alpha-4} + \cdots + B_{\alpha,i}.\overline{T}_{\alpha-2i} + \cdots \\ &\qquad + B_{\alpha,\nu-3}.\overline{T}_6 + B_{\alpha,\nu-2}.\overline{T}_4, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, en tenant compte des valeurs (127) des coefficients A, que l'on aura, pour ce cas, définitivement la formule

$$(133)\quad \left\{ \begin{aligned} T_{2\nu} = \frac{1}{2\nu - 1}\Big[&\overline{T}_{2\nu} + B_{2\nu,1}.\overline{T}_{2(\nu-1)} + B_{2\nu,2}.\overline{T}_{2(\nu-2)} + \cdots\cdots \\ &+ B_{2\nu,i}.\overline{T}_{2(\nu-i)} + \cdots + B_{2\nu,\nu-3}.\overline{T}_6 + B_{2\nu,\nu-2}.\overline{T}_4 \\ &+ (3g^2 B_{2\nu,\nu-3} + 2h\,B_{2\nu,\nu-2}).T_2 + g^2 B_{2\nu,\nu-2}.T_0\Big]; \end{aligned} \right.$$

et de même, si $\alpha = 2\nu + 1$, la même équation se réduisant alors à la suivante

$$\begin{aligned} &(\alpha - 1)\,T_\alpha - (A'_3 B_{\alpha,\nu-1} + A''_5 B_{\alpha,\nu-2}).T_1 \\ &\quad = \overline{T}_\alpha + B_{\alpha,1}\,\overline{T}_{\alpha-2} + B_{\alpha,2}.\overline{T}_{\alpha-4} + \cdots\cdots + B_{\alpha,i}.\overline{T}_{\alpha-2i} \\ &\qquad + B_{\alpha,\nu-2}.\overline{T}_5 + B_{\alpha,\nu-1}.\overline{T}_3, \end{aligned}$$

donnera, eu égard encore aux valeurs (127) des A, la formule analogue

$$(134)\quad \left\{ \begin{aligned} T_{2\nu+1} = \frac{1}{2\nu}\Big[&\overline{T}_{2\nu+1} + B_{2\nu+1,1}.\overline{T}_{2\nu-1} + B_{2\nu+1,2}.\overline{T}_{2\nu-3} + \cdots \\ &+ B_{2\nu+1,i}.\overline{T}_{2(\nu-i)+1} + \cdots + B_{2\nu+1,\nu-2}.\overline{T}_5 + B_{2\nu+1,\nu-1}\,\overline{T}_3 \\ &+ (2g^2 B_{2\nu+1,\nu-2} + h\,B_{2\nu+1,\nu-1}).T_1\Big], \end{aligned} \right.$$

le symbole $\overline{\mathrm{T}}_{n}$ tenant lieu toujours, dans ces formules, de la quantité connue ou intégrée (127), et les symboles T_0, T_1, T_2 représentant pareillement, suivant la détermination adoptée pour la variable t, les expressions obtenues en premier lieu (124), (126), et (125) (*).

(*) Le calcul que nous venons de développer n'offre pas d'intérêt seulement quant à l'objet spécial en vue duquel nous avons été amenés à la présenter; mais il fournit en même temps, par le moyen d'un simple changement de constantes, un résultat important de Calcul Intégral, à savoir l'expression explicite de la quadrature

$$\int_0^{\omega} \mathrm{sn}^m\,\omega\, d\omega = \Omega_m,$$

pour toute valeur entière et positive de l'exposant m, expression dont il sera facile ensuite de conclure, ainsi que nous le montrons dans la Note VI qui termine cet ouvrage, celle des quadratures connexes

$$\int_0^{\omega} \mathrm{cn}^m\,\omega\, d\omega \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\omega} \mathrm{dn}^m\,\omega\, d\omega.$$

En effet, l'expression (108) de T étant récrite ainsi

$$\mathrm{T} = g^2 + ht^2 - t^4 = g^2\left(1 + \frac{h}{g^2}t^2 - \frac{1}{g^2}t^4\right),$$

l'on voit qu'il suffira de faire

$$(\alpha) \qquad \frac{h}{g^2} = -(1+k^2), \quad -\frac{1}{g^2} = k^2, \qquad \text{ou} \qquad g^2 = -\frac{1}{k^2}, \quad h = -g^2.(1+k^2) = \frac{1+k^2}{k^2},$$

pour que le radical $\sqrt{\mathrm{T}}$ prenne la forme canonique

$$\sqrt{\mathrm{T}} = g\sqrt{1-(1+k^2)t^2+k^2t^4} = \frac{i}{k}\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)},$$

auquel cas, si l'on pose alors $t = \mathrm{sn}\,\omega$, et que l'on convienne de prendre dans la formule (120), pour les limites t_1 et t_2 de l'intégrale, les valeurs 0 et $\mathrm{sn}\,\omega$, d'une part ladite quantité T_ν se changera dans la suivante

$$\mathrm{T}_\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^\alpha dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} = \int_0^{\omega} \mathrm{sn}^\alpha\,\omega\,\frac{d\omega}{\frac{i}{k}} = \frac{k}{i}\int_0^{\omega} \mathrm{sn}^\alpha\,\omega\, d\omega = -ik.\Omega_\alpha,$$

Possédant donc ainsi désormais l'expression complète de l'intégrale T_α pour toute valeur entière et positive de α, il suffira

---

d'autre part, le symbole $\overline{T}_n$ (127) et les quantités intégrées T_0, T_1, T_2 deviendront respectivement

$$(\text{б})\qquad \overline{T}_n = -(t^{n-3}\sqrt{T})_1^2 = -\left(\mathrm{sn}^{n-3}\omega \cdot \frac{i}{k}\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\right)_0^\omega = \frac{-i}{k}\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega \,.\, \mathrm{sn}^{n-3}\omega,$$

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} T_0 = -ik\,.\,\Omega_0 = -ik.\displaystyle\int_0^\omega d\omega = -ik\,.\,\omega, \\ T_2 = -ik\,.\,\Omega_2 = -ik.\displaystyle\int_0^\omega \mathrm{sn}^2\omega\, d\omega = \frac{-i}{k}\int_0^\omega k^2\,\mathrm{sn}^2\omega\, d\omega = \frac{-i}{k}\,Z(\omega), \end{cases}$$

$$(\delta)\qquad \begin{cases} T_1 = -ik.\Omega_1 = -ik.\displaystyle\int_0^\omega \mathrm{sn}\,\omega\, d\omega = \int_0^\omega \frac{-ik\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega}{\mathrm{dn}\,\omega}\,d\omega \\ = \displaystyle\int_0^\omega \frac{ik(-\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega . d\omega)}{\sqrt{1-k^2(1-\mathrm{cn}^2\omega)}} = \int_0^\omega \frac{ik\,d\ \mathrm{cn}\,\omega}{\sqrt{k_1^2-(ik\,\mathrm{cn}\,\omega)^2}} = \left[\arcsin\left(\frac{ik}{k_1}\mathrm{cn}\,\omega\right)\right]_0^\omega; \end{cases}$$

et dès lors, en substituant à la fois ces différentes valeurs (б), (α), et (γ) ou (δ) dans les deux formules trouvées ci-dessus (133) et (134), puis les multipliant alors l'une et l'autre par le facteur $\frac{i}{k}$, l'on obtiendra de cette façon l'expression de l'intégrale $\Omega_\alpha = \int_0^\omega \mathrm{sn}^\alpha\omega\, d\omega$, pour toutes les valeurs entières et positives de l'exposant α, savoir : si $\alpha = 2\nu$, celle-ci

$$(\varepsilon)\qquad \begin{cases} \Omega_{2\nu} = \dfrac{1}{(2\nu-1)k^2}\Big[\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\,(\mathrm{sn}^{2\nu-3}\omega + B_{2\nu,1}\,\mathrm{sn}^{2\nu-5}\omega + B_{2\nu,2}\,\mathrm{sn}^{2\nu-7}\omega + \cdots \\ \qquad + B_{2\nu,i}\,\mathrm{sn}^{2\nu-2i-3}\omega + \cdots + B_{2\nu,\nu-3}\,\mathrm{sn}^3\omega + B_{2\nu,\nu-2}\,\mathrm{sn}\,\omega) \\ \qquad - \dfrac{1}{k^2}\left(3B_{2\nu,\nu-3} - 2(1+k^2)B_{2\nu,\nu-2}\right)Z(\omega) - B_{2\nu,\nu-2}\,.\,\omega\Big]; \end{cases}$$

et si $\alpha = 2\nu + 1$, la suivante

$$(\eta)\qquad \begin{cases} \Omega_{2\nu+1} = \dfrac{1}{2\nu\,.\,k^2}\Big[\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\,(\mathrm{sn}^{2\nu-2}\omega + B_{2\nu+1,1}\,\mathrm{sn}^{2\nu-4}\omega + B_{2\nu+1,2}\,\mathrm{sn}^{2\nu-6}\omega + \cdots \\ \qquad + B_{2\nu+1,i}\,\mathrm{sn}^{2\nu-2i-2}\omega + \cdots + B_{2\nu+1,\nu-2}\,\mathrm{sn}^2\omega + B_{2\nu+1,\nu-1}) \\ \qquad + \dfrac{1}{k}\left(-2B_{2\nu+1,\nu-2} + \dfrac{1+k^2}{k^2}B_{2\nu+1,\nu-1}\right).\,i\left[\arcsin\left(\dfrac{ik}{k_1}\mathrm{cn}\,\omega\right)\right]_0^\omega\Big] \end{cases}$$

l'expression générale des coefficients $B_{\alpha,i}$ étant donnée par les formules ci-dessus (130bis) ou (131), dans lesquelles les constantes h et g^2 représenteront alors les valeurs

dès lors, pour avoir tous les éléments du déterminant proposé (121), de changer successivement dans l'une ou l'autre de

---

de droite (α), le symbole $B_{\alpha,0}$ tenant lieu toujours de l'unité, d'après la manière même dont nous avons introduit dans nos raisonnements le symbole $B_{\alpha,i}$ (page 498).

Comme exemples d'application de ces nouvelles formules, considérons pour l'une et l'autre le cas de $\nu = 3$, qui est, d'un côté, assez compliqué pour faire intervenir dans le calcul un élément analytique tout au moins de chaque type, parmi ceux qui constituent l'ensemble des formules en question, et qui est, d'un autre côté, assez simple pour permettre d'une façon suffisamment sûre la vérification directe des résultats qu'elles nous fourniront.

Cette hypothèse donnera, en tenant compte de la valeur susmentionnée $B_{\alpha,0} = 1$, quant à la première formule (ε), l'expression

$$\Omega_6 = \frac{1}{5k^2}\left[\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega (\operatorname{sn}^3\omega + B_{6,1} \operatorname{sn}\omega) - \frac{1}{k^2}\{3 - 2(1+k^2) B_{6,1}\} Z(\omega) - B_{6,1}.\omega\right],$$

dans laquelle le coefficient $B_{6,1}$ aura pour valeur, d'après la première formule (130bis) et la valeur (α) de h,

$$B_{6,1} = \frac{6-2}{6-3} h = \frac{4}{3}\frac{1+k^2}{k^2},$$

et qui sera par conséquent sous forme définitive, en réduisant à un dénominateur unique,

$$(\theta)\left\{\begin{aligned}\Omega_6 = \int_0^{\omega} \operatorname{sn}^6\omega\, d\omega = \frac{1}{15k^4}\Big[&\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega \{3k^4 \operatorname{sn}^3\omega + 4k^2(1+k^2)\operatorname{sn}\omega\} \\ &- \{9k^2 - 8(1+k^2)^2\} Z(\omega) - 4k^2(1+k^2).\omega\Big];\end{aligned}\right.$$

et de même quant à la seconde formule (η) cet autre résultat

$$\begin{aligned}\Omega_7 = \frac{1}{6k^2}\Big[&\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega (\operatorname{sn}^4\omega + B_{7,1} \operatorname{sn}^2\omega + B_{7,2}) \\ &+ \left(-2B_{7,1} + \frac{1+k^2}{k^2} B_{7,2}\right). i\left[\arcsin\left(\frac{ik}{k_1}\operatorname{cn}\omega\right)\right]_0^{\omega}\Big],\end{aligned}$$

dans lequel les deux coefficients $B_{7,1}$, $B_{7,2}$, auront de même pour expressions, en vertu des mêmes formules (130bis) et des valeurs (α) de h et de g^2,

$$\left\{\begin{aligned}B_{7,1} &= \frac{7-2}{7-3} h = \frac{5}{4}\frac{1+k^2}{k^2}, \\ B_{7,2} &= \frac{(7-2)(7-4)h^2 + (7-3)^2 g^2}{(7-3)(7-5)} = \frac{1}{4.2}\left(5.3h^2 + 4^2 g^2\right) \\ &= \frac{1}{8}\left[15\left(\frac{1+k^2}{k^2}\right)^2 - \frac{4^2}{k^2}\right] = \frac{1}{8k^4}\left[15(1+k^2)^2 - 16k^2\right],\end{aligned}\right.$$

ces deux dernières formules, suivant la parité de α, en premier lieu α d'abord en $\alpha + 2$, puis en $\alpha + 4$, et en second lieu, dans les trois expressions ainsi obtenues, t successivement en p, p. r; et, cela fait, le problème se trouvera réduit, par conséquent, à un simple calcul algébrique, dont nous allons tout à l'heure nous occuper et donner également les résultats définitifs.

---

et qui par conséquent se réduiront de la même façon, après que l'on y aura remis ces valeurs, à l'expression définitive :

$$(\zeta)\left\{\begin{aligned} \Omega_7 = \int_0^{\omega} \mathrm{sn}^7\,\omega\, d\omega = \frac{1}{48\,k^7}\Big[\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\,\{\,8k^5\,\mathrm{sn}^4\,\omega + 10\,k^3(1+k^2)\,\mathrm{sn}^2\,\omega \\ + 15k(1+k^2) - 16k^3\,\} - \{\,36k^2(1+k^2) - 15(1+k^2)^3\,\}\,.\,i\left[\arcsin\left(\frac{ik}{k_1}\mathrm{cn}\,\omega\right)\right]_0^{\omega}\Big]. \end{aligned}\right.$$

Or, l'on parvient sans trop de peine à vérifier directement l'exactitude de ces deux derniers résultats (θ) et (ζ), si l'on prend la dérivée des deux membres de ces égalités, en observant que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega}(\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega) &= \mathrm{cn}\,\omega\; d.\mathrm{dn}\,\omega + \mathrm{dn}\,\omega\; d.\mathrm{cn}\,\omega \\ &= \mathrm{cn}\,\omega\,(-k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega) + \mathrm{dn}\,\omega\,(-\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega) \\ &= -\mathrm{sn}\,\omega(k^2\,\mathrm{cn}^2\,\omega + \mathrm{dn}^2\,\omega) = -\mathrm{sn}\,\omega\,\{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\omega) + k^2(1-\mathrm{sn}^2\,\omega)\} \\ &= -\mathrm{sn}\,\omega\,(1 + k^2 - 2k^2\,\mathrm{sn}^2\,\omega), \end{aligned}$$

et si l'on écrit ensuite partout, pour la facilité de la lecture, t à la place de $\mathrm{sn}\,\omega$. On reconnaît ainsi, sans grande difficulté, que les seconds membres de ces deux formules, qui sont alors des polynômes en t, de degré 6 pour la première et 7 pour la seconde, ne contenant chacun que des termes de même parité, c'est-à-dire par conséquent respectivement de la forme

$$A'_0 + A'_1 t^2 + A'_2 t^4 + A'_3 t^6 \qquad \text{ou} \qquad A''_0 t + A''_1 t^3 + A''_2 t^5 + A''_3 t^7,$$

se réduisent l'un et l'autre exclusivement à leur dernier terme, dont le coefficient A'_3 ou A''_3 est précisément égal à l'unité.

Observons enfin en terminant que le second facteur du dernier terme de la deuxième formule (ζ), qui, eu égard à l'équivalence des deuxième et dernier membres de la suite d'égalité (δ), représente exactement la quantité $k\,\Omega_1 = k\int_0^{\omega}\mathrm{sn}\,\omega\,d\omega$, est donc par conséquent assurément réel, nonobstant la double présence de l'imaginaire i dans son écriture (ce qui provient de ce que l'arc sinus est comme le sinus une fonction impaire, ainsi qu'en témoigne son développement connu en série). Il est facile d'ailleurs de donner à cette même expression une autre forme dans laquelle ne figure plus l'imaginaire i, car l'on trouve aussi aisément l'autre formule de quadrature

Afin de permettre au Lecteur d'apprécier exactement le service rendu dans le calcul des intégrales triples du genre (86) par nos coordonnées u, v, w, ou les variables intermédiaires p, q, r que nous leurs substituons à titre provisoire, examinons rapidement, avant d'aller plus loin, quelles opérations eût exigées, pour le calcul de cette même somme $I_x^{(\alpha)}$, l'emploi des Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν (*).

Pour cela, la première des équations (9) devenant, étant récrite à l'aide des notations (2), puis élevée à la puissance $\frac{1}{2}\alpha$,

$$x^{\alpha} = \frac{1}{l^{\alpha}(in)^{\alpha}}(a^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}\alpha}(a^2 + \mu)^{\frac{1}{2}\alpha}(a^2 + \nu)^{\frac{1}{2}\alpha},$$

$$k\Omega_1 = k\int_0^{\omega} \operatorname{sn}\omega\, d\omega = \int_0^{\omega} k\frac{2\operatorname{sn}\frac{1}{2}\omega \operatorname{cn}\frac{1}{2}\omega \operatorname{dn}\frac{1}{2}\omega}{1 - k^2\operatorname{sn}^4\frac{1}{2}\omega}\, d\omega$$

$$= \int_0^{\omega} k.2\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}\omega \operatorname{cn}\tfrac{1}{2}\omega \operatorname{dn}\tfrac{1}{2}\omega . \left(\frac{1}{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}\omega} + \frac{1}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}\omega}\right) . \tfrac{1}{2}\, d\omega$$

$$= \int_0^{\omega} \frac{k.2\operatorname{sn}\frac{1}{2}\omega \operatorname{cn}\frac{1}{2}\omega \operatorname{dn}\frac{1}{2}\omega . \frac{1}{2}d\omega}{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}\omega} - \int_0^{\omega} \frac{-k.2\operatorname{sn}\frac{1}{2}\omega \operatorname{cn}\frac{1}{2}\omega \operatorname{dn}\frac{1}{2}\omega . \frac{1}{2}d\omega}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}\omega}$$

$$= \log(1 + k\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}\omega) - \log(1 - k\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}\omega) = \log\left(\frac{1 + k\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}\omega}{1 - k\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}\omega}\right),$$

expression que l'on pourra substituer aussi bien, si on la préfère, à la place du dernier facteur de ladite formule (ζ).

(*) C'est en se posant une question toute semblable à propos de la seconde somme (96) $J_x^{(\alpha)}$ que l'on est conduit tout naturellement, pour faciliter les intégrations, à introduire le système des variables auxiliaires (88) p, q, r, dont nous avons fait choix plus haut.

En effet, pour celle-là, la seconde et la troisième des équations (9) donnant, en tenant compte des définitions (2), et introduisant de nouveau la constante $G = l^2m^2n^2$,

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} y^2z^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{m^2.(-l^2)}\ \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{n^2.(-m^2)} \\ &= \frac{1}{m^2G}(b^2+\lambda)(c^2+\lambda).(b^2+\mu)(c^2+\mu).(b^2+\nu)(c^2+\nu), \end{aligned}\right.$$

d'où, en extrayant les racines,

$$yz = \frac{1}{m\sqrt{G}}\sqrt{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.\sqrt{(b^2+\mu)(c^2+\mu)}.\sqrt{(b^2+\nu)(c^2+\nu)},$$

l'on eût donc trouvé pour cette somme, en prenant pour l'élément de masse $d\mathfrak{M}$ l'expression (75) relative à ce système de

---

l'on en conclura tout d'abord, en employant de nouveau l'expression (75) de $d\mathfrak{M}$, et supprimant les facteurs communs aux numérateurs et dénominateurs des différents éléments,

$$(\mathrm{6})\qquad yz\,d\mathfrak{M} = \frac{1}{m\sqrt{G}}\,\frac{D}{2^3}\begin{vmatrix} \dfrac{d\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda}}, & \dfrac{\lambda d\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda}}, & \dfrac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda}} \\ \dfrac{d\mu}{\sqrt{a^2+\mu}}, & \dfrac{\mu d\mu}{\sqrt{a^2+\mu}}, & \dfrac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{a^2+\mu}} \\ \dfrac{d\nu}{\sqrt{a^2+\nu}}, & \dfrac{\nu d\nu}{\sqrt{a^2+\nu}}, & \dfrac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{a^2+\nu}} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, si, par analogie avec ce que nous avons fait plus haut pour nos variables p, q, r, nous convenons de représenter par R le trinôme

$$(\gamma)\qquad R=(b^2+\rho)(c^2+\rho) = b^2c^2+(b^2+c^2)\rho+\rho^2,$$

et par Λ, M, N, ce que devient ce même trinôme lorsqu'on y remplace ρ successivement par λ, μ, ν, auquel cas l'expression ci-dessus (α) s'écrira, avec ces notations,

$$y^2z^2 = \left(\frac{1}{m\sqrt{G}}\right)^2 \Lambda MN,$$

l'on aura donc, par le moyen de cette dernière égalité ainsi que de celles (6), toujours en vertu des mêmes considérations, pour la somme en question $J_x^{(\alpha)}$, l'expression

$$J_x^{(\alpha)} = \mathrm{S}\,(yz)^{2\alpha+1}\,d\mathfrak{M} = \mathrm{S}\,(y^2z^2)^{\alpha}.\,yz\,d\mathfrak{M}$$

$$= \frac{D}{(m\sqrt{G})^{2\alpha+1}}\begin{vmatrix} \displaystyle\int\frac{\Lambda^{\alpha}d\lambda}{2\sqrt{a^2+\lambda}}, & \displaystyle\int\frac{\Lambda^{\alpha}\lambda d\lambda}{2\sqrt{a^2+\lambda}}, & \displaystyle\int\frac{\Lambda^{\alpha}\lambda^2 d\lambda}{2\sqrt{a^2+\lambda}} \\ \displaystyle\int\frac{M^{\alpha} d\mu}{2\sqrt{a^2+\mu}}, & \displaystyle\int\frac{M^{\alpha}\mu d\mu}{2\sqrt{a^2+\mu}}, & \displaystyle\int\frac{M^{\alpha}\mu^2 d\mu}{2\sqrt{a^2+\mu}} \\ \displaystyle\int\frac{N^{\alpha}d\nu}{2\sqrt{a^2+\nu}}, & \displaystyle\int\frac{N^{\alpha}\nu d\nu}{2\sqrt{a^2+\nu}}, & \displaystyle\int\frac{N^{\alpha}\nu^2 d\nu}{2\sqrt{a^2+\nu}} \end{vmatrix}.$$

Or, l'on aperçoit tout de suite que, pour chacune des intégrales qui constituent les éléments de ce dernier déterminant, la différentielle pourra être rendue non seulement rationnelle, mais entière, en faisant, ρ désignant toujours par hypothèse l'une quelconque des variables λ, μ, ν,

$$(\delta)\qquad t=\sqrt{a^2+\rho},\qquad t^2=a^2+\rho,\qquad \rho=-a^2+t^2,\qquad dt=\frac{d\rho}{2\sqrt{a^2+\rho}},$$

coordonnées,

$$
\mathrm{I}_x^{(\alpha)} = \mathbf{S}\, x^\alpha d\mathfrak{M}
$$

$$
= \frac{1}{l^\alpha (in)^\alpha} \frac{i\mathrm{D}}{2^3} \begin{vmatrix}
\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}\alpha} d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}\alpha} \lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}\alpha} \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} \\
\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{(a^2+\mu)^{\frac{1}{2}\alpha} d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}, & \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{(a^2+\mu)^{\frac{1}{2}\alpha} \mu d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}, & \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{(a^2+\mu)^{\frac{1}{2}\alpha} \mu^2 d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} \\
\int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{(a^2+\nu)^{\frac{1}{2}\alpha} d\nu}{\sqrt{f(\nu)}}, & \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{(a^2+\nu)^{\frac{1}{2}\alpha} \nu d\nu}{\sqrt{f(\nu)}}, & \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{(a^2+\nu)^{\frac{1}{2}\alpha} \nu^2 d\nu}{\sqrt{f(\nu)}}
\end{vmatrix},
$$

---

d'où, en remettant, dans l'expression ci-dessus (γ), l'on trouvera, eu égard aux définitions (2),

$$
\mathrm{R} = (b^2+\rho)(c^2+\rho) = (b^2 - a^2 + t^2)(c^2 - a^2 + t^2) = (-l^2 + t^2)(n^2 + t^2)
$$

$$
= -(l^2 - t^2)(n^2 + t^2) = -\mathrm{T},
$$

en introduisant de nouveau la notation déjà usitée ci-dessus (97).

En effet, par ce changement de variables, les types des différents éléments du déterminant en question deviendront respectivement, pour chaque colonne,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{R}^\alpha d\rho}{2\sqrt{a^2+\rho}} = (-1)^\alpha \int \mathrm{T}^\alpha dt, \\
&\int \frac{\mathrm{R}^\alpha \rho d\rho}{2\sqrt{a^2+\rho}} = (-1)^\alpha \int \mathrm{T}^\alpha (-a^2+t^2)\, dt = (-1)^{\alpha+1}.a^2 \int \mathrm{T}^\alpha dt + (-1)^\alpha \int \mathrm{T}^\alpha t^2 dt, \\
&\int \frac{\mathrm{R}^\alpha \rho^2 dt}{2\sqrt{a^2+\rho}} = (-1)^\alpha \int \mathrm{T}^\alpha (-a^2+t^2)^2\, dt = (-1)^\alpha \int \mathrm{T}^\alpha (a^4 - 2a^2t^2 + t^4)\, dt \\
&\qquad = (-1)^{\alpha+2}.a^4 \int \mathrm{T}^\alpha dt + (-1)^{\alpha+1}.2a^2 \int \mathrm{T}^\alpha t^2 dt + (-1)^\alpha \int \mathrm{T}^\alpha t^4 dt,
\end{aligned}
\right.
$$

et se composeront, par conséquent, d'intégrales qui seront exactement celles que nous avons eu à calculer plus haut avec nos variables p, q, r, multipliées chacune par un facteur constant très simple, d'où résultera dès lors, par une réduction évidente de ce déterminant, pour la somme envisagée $\mathrm{J}_x^{(\alpha)}$, la même expression déjà obtenue plus haut (99).

Le groupe d'équations (8) fait voir très clairement, en effet, que les dites variables auxiliaires p, q, r ne sont autres que celles-là mêmes représentées synthétiquement par t dans l'équation posée tout à l'heure (δ), car cette équation tenant lieu, en réalité, si l'on spécifie la variable ρ, de trois équations analogues telles que

$$
p = \sqrt{a^2+\lambda}, \qquad q = \sqrt{a^2+\mu}, \qquad r = \sqrt{a^2+\nu},
$$

expression sous forme de déterminant dont tous les éléments appartiennent en l'état ou se réduisent au type $\int \frac{R_i d\rho}{\sqrt{R}}$, R_i étant un polynôme entier en ρ de degré i, et R un autre polynôme semblable, du troisième degré si α est pair et égal à $2i$, et du second degré seulement si α est impair et égal à $2i+1$, car dans ce dernier cas un facteur $(a^2+\rho)^{\frac{1}{2}}$ disparaîtra au numérateur et au dénominateur de chaque élément, et l'on aura ainsi, pour les trois valeurs 0, 1, 2 de l'exposant n, l'égalité

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(a^2+\rho)^{\frac{1}{2}\alpha}\rho^n d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(a^2+\rho)^{i+\frac{1}{2}}\rho^n d\rho}{\sqrt{(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho)}} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(a^2+\rho)^i \rho^n d\rho}{\sqrt{(b^2+\rho)(c^2+\rho)}}.$$

Dans l'un et l'autre cas, l'intégrale qui représente chacun de ces éléments se décomposera donc, à la vérité, en termes simples de la forme $\int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{R}}$, m étant entier et positif, à l'égard desquels l'on pourra sans doute instituer une formule de réduction analogue à celle (122) donnée plus haut pour le type d'intégrales (120). Mais l'on voit que, même avec cette ressource, le calcul des intégrales en question sera encore notablement plus compliqué qu'avec nos variables p, q, r, puisque la formule de réduction dont nous parlons ne s'appliquerait que successivement et isolément à chacun des termes dans lesquels se trouvera décomposée l'intégrale, après le développement effectif du polynôme

---

ou

$$p^2 = a^2 + \lambda, \qquad q^2 = a^2 + \mu, \qquad r^2 = a^2 + \nu,$$

la comparaison de ces trois dernières équations avec celles du groupe (8) qui contiennent la constante a^2 fournira les égalités

$$p^2 = l^2 \operatorname{sn}^2 u, \qquad q^2 = l^2 \operatorname{dn}^2 v, \qquad r^2 = (in)^2 \operatorname{cn}^2 w,$$

ou, conformément à nos définitions (88),

$$p = \pm l \operatorname{sn} u, \qquad q = \pm l \operatorname{dn} v, \qquad r = \pm in \operatorname{cn} w.$$

L'on est donc ainsi assuré qu'en introduisant, avant l'intégration, ces dernières variables p, q, r à la place de u, v, w dans l'élément différentiel de la seconde somme (96), les quadratures à effectuer pour l'obtenir seront celles de polynômes entiers, et par une induction toute naturelle, l'on est dès lors conduit en même temps à essayer si l'introduction de ces mêmes variables ne faciliterait pas également d'une manière appréciable le calcul des quadratures relatives à la première somme $I_x^{(\alpha)}$.

$R_i = (a^2 + \rho)'$, tandis qu'avec notre système de variables, ces mêmes termes, ou les intégrales T_α (120), constituaient au contraire les éléments du déterminant à calculer eux-mêmes.

Nous croyons donc avoir prouvé d'une façon péremptoire, par cet exemple, que les calculs d'intégration, impossibles avec les Coordonnées de Lamé, telles qu'il les présente, étaient singulièrement plus faciles avec les Coordonnées Thermométriques u, v, w que nous proposons de leur substituer qu'avec les Coordonnées Elliptiques de Jacobi.

Calcul effectif ou réduction des déterminants qui forment les éléments des mêmes intégrales triples. — Il nous reste à faire voir que pour ce second problème purement algébrique, les variables auxiliaires p, q, r, dont nous venons de faire usage, c'est-à-dire au fond les coordonnées u, v, w, dont elles tiennent provisoirement la place, seront encore celles qui permettront d'apercevoir le plus facilement les réductions éventuelles, et, par conséquent, de pousser jusqu'au bout la solution totale de la question proposée.

Nous allons mettre en évidence ce dernier point, successivement à propos des deux mêmes sommes (96), en nous occupant encore en premier lieu de la seconde.

A. [*Intégrale* $J_x^{(\alpha)}$]. Comme le fait voir la formule ci-dessus (100), la puissance T^α étant un polynôme complet en t^2 de degré 2α, contient par suite $2\alpha + 1$ termes. Il en est évidemment de même, quant au nombre des termes, des produits $T^\alpha t^2$ et $T^\alpha t^4$, ainsi que de leurs intégrales définies (111), en ne comptant alors que pour un seul terme, bien entendu, l'intégrale définie de chacun des termes des polynômes correspondants en question. De plus, sur les $2\alpha + 1$ termes appartenant ainsi à chacun des trois polynômes précités T^α, $T^\alpha t^2$, $T^\alpha t^4$, il y en a évidemment 2α qui correspondent aux mêmes puissances de t^2, et dès lors ne diffèrent que par le coefficient constant, soit en passant du premier polynôme au second, soit en passant du second au troisième, et la même circonstance se produira par conséquent encore relativement aux trois intégrales définies des polynômes ci-dessus mentionnés.

Il suit de là nécessairement que lorsque l'on décomposera, comme il semble naturel, le déterminant (99) en un nombre $(2\alpha + 1)^3$ de déterminants partiels ne contenant chacun qu'un seul terme par élément, une très forte part de ces déterminants disparaîtront, comme présentant deux colonnes identiques à un facteur constant près. Il ne subsistera donc de ces déterminants partiels qu'un nombre

$$\frac{(2\alpha + 3)(2\alpha + 2)(2\alpha + 1)}{1.2.3} = \frac{1}{3}(\alpha + 1)(2\alpha + 1)(2\alpha + 3),$$

représentant le nombre des combinaisons distinctes que l'on peut former avec $(2\alpha + 3)$-objets 3 à 3; et, par suite, il aura disparu de ce chef un nombre de déterminants partiels égal à

$$(2\alpha+1)^3 - \frac{1}{3}(\alpha+1)(2\alpha+1)(2\alpha+3) = \frac{2\alpha+1}{3}\left[3(2\alpha+1)^2 - (\alpha+1)(2\alpha+3)\right]$$

$$= \frac{2\alpha+1}{3}\left[3(4\alpha^2 + 4\alpha + 1) - (2\alpha^2 + 5\alpha + 3)\right]$$

$$= \frac{2\alpha+1}{3}(10\alpha^2 + 7\alpha) = \frac{1}{3}\alpha(2\alpha + 1)(10\alpha + 7);$$

nombre qui surpasse le précédent (celui des déterminants partiels qui subsisteront) de

$$\frac{1}{3}\alpha(2\alpha + 1)(10\alpha + 7) - \frac{1}{3}(\alpha + 1)(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)$$

$$= \frac{1}{3}(2\alpha + 1)\left[\alpha(10\alpha + 7) - (\alpha + 1)(2\alpha + 3)\right]$$

$$= \frac{1}{3}(2\alpha + 1)\left[10\alpha^2 + 7\alpha - (2\alpha^2 + 5\alpha + 3)\right]$$

$$= \frac{1}{3}(2\alpha + 1)(8\alpha^2 + 2\alpha - 3) = \frac{1}{3}(2\alpha - 1)(2\alpha + 1)(4\alpha + 3),$$

ce qui montre l'importance de la simplification due à cette seule circonstance que les coefficients des termes correspondant aux mêmes puissances de p, q, r, sont les mêmes pour les trois lignes du déterminant (99), ou, en termes plus concis, que les trois éléments d'une même colonne de ce déterminant appartiennent

tous les trois au même type $\int T^{\alpha} t^{i} dt$, quelle que soit la ligne que l'on considère.

Finalement l'expression proposée $J_z^{(\alpha)}$, se réduira donc, comme nous l'avons dit tout à l'heure, à une somme de déterminants partiels en nombre $\frac{1}{3}(\alpha+1)(2\alpha+1)(2\alpha+3)$, multipliés chacun par un coefficient constant, qui pourront tous être représentés par la notation abrégée (p^i, q^j, r^k) en la définissant par l'égalité

$$(135) \qquad (p^i, q^j, r^k) = \begin{vmatrix} (p^i)_1^2, & (p^j)_1^2, & (p^k)_1^2 \\ (q^i)_1^2, & (q^j)_1^2, & (q^k)_1^2 \\ (r^i)_1^2, & (r^j)_1^2, & (r^k)_1^2 \end{vmatrix},$$

les trois exposants i, j, k étant, pour l'instant, trois nombres entiers positifs, tous impairs, différents entre eux, et au plus égaux à $4\alpha+5$.

Partant de là, et ayant égard à cette notation ainsi qu'à celles (107) et (108) qui nous ont déjà servi pour le calcul des éléments de cette intégrale, si l'on a égard aux développements calculés ci-dessus (111), l'on voit que la somme en question $J_z^{(\alpha)}$ (99) se présentera définitivement sous la forme

$$(136) \qquad J_z^{(\alpha)} = \left(\frac{\pm i}{m\sqrt{G}}\right)^{2\alpha+1} D.\sum \frac{A_i A_j A_k}{(2i+1)(2j+3)(2k+5)} (p^{2i+1}, q^{2j+3}, r^{2k+5}), \text{ (*)}$$

l'expression des coefficients A étant celle que fournissent les égalités (110) et (109), et cette dernière somme étant formée en y attribuant à présent, de toutes les manières possibles, aux trois indices i, j, k, *toutes* les valeurs entières (et non plus seulement, comme tout à l'heure, les valeurs impaires) depuis 0 jusqu'à 2α, sous la seule condition que ces trois exposants $2i+1$, $2j+3$, $2k+5$ soient tous les trois différents, ainsi que nous venons de le dire.

(*) Nous montrerons un peu plus loin que dans cette formule, de même que dans celle (140), que nous en déduisons à titre de cas particulier, il ne subsistera plus aucun double signe (ainsi que cela semble devoir être *a priori*), après que l'on y aura remplacé les variables auxiliaires p, q, r par les expressions (88) dont elles tenaient provisoirement la place. [Voir, dans l'article 8 du paragraphe suivant, la note concernant les expressions (169), relatives au centre de gravité.]

Ces considérations un peu abstraites s'éclaireront aisément en les appliquant à un exemple.

Considérons de nouveau dans ce but le cas simple de $\alpha = 1$, pour lequel, d'une part, le développement (109) se réduit dès lors à

$$T = g^2 + ht^2 - t^4 = A_0 + A_1 t^2 + A_2 t^4,$$

les valeurs des différents coefficients étant par conséquent, savoir

$$(137) \qquad A_0 = g^2, \qquad A_1 = h, \qquad A_2 = -1,$$

et d'autre part, les trois colonnes du déterminant (99) appartiendront respectivement aux trois types (112).

Si nous faisons alors, pour un instant, en vue de faciliter aussi bien le discours que les écritures,

$$(138) \qquad \alpha = (t)_1^2, \quad 6 = (t^3)_1^2, \quad \gamma = (t^5)_1^2, \quad \varepsilon = (t^7)_1^2, \quad \eta = (t^9)_1^2,$$

comme avec les cinq lettres α, 6, γ, ε, η l'on pourra former les $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ combinaisons distinctes qui suivent

$$(139) \quad \begin{cases} (\alpha, 6, \gamma), \quad (\alpha, 6, \varepsilon), \quad (\alpha, 6, \eta), \quad (\alpha, \gamma, \varepsilon), \quad (\alpha, \gamma, \eta), \quad (\alpha, \varepsilon, \eta), \\ (6, \gamma, \varepsilon), \quad (6, \gamma, \eta), \quad (6, \varepsilon, \eta), \quad (\gamma, \varepsilon, \eta), \end{cases}$$

et dans lesquelles nous avons soin, pour plus de clarté, d'écrire les lettres dans l'ordre habituel de l'alphabet, à chacune de ces combinaisons correspondra un déterminant à trois colonnes entièrement défini, étant entendu que chacune des lignes en sera formée par celles des quantités (138) qui figurent dans l'algorithme de la combinaison envisagée, en y attribuant à t respectivement la détermination p, q, r. Les dix déterminants partiels ainsi définis seront les seuls qui subsisteront, multipliés chacun par un facteur constant, lorsque l'on décomposera de prime abord le déterminant (99) relatif à ce cas, dont chacune des trois colonnes renfermera alors trois termes, en $3^3 = 27$ déterminants partiels, dont chaque élément ne comprenne qu'un seul terme. Il aura donc disparu par cette réduction $27 - 10 = 17$ déterminants partiels, comme ayant deux colonnes identiques, à un facteur constant près.

Ce premier résultat essentiel étant acquis, le développement

demandé sera fourni très aisément par la formule donnée tout à l'heure (136) en y prenant les trois indices i, j, k au plus égaux à $2\alpha = 2$, c'est-à-dire par conséquent en leur attribuant les trois seules valeurs 0, 1, 2. Cela posé, l'on observera que sur les dix déterminants partiels précités (139) que l'on aura ainsi à former pour les différents termes de ce développement, le plus grand nombre, à savoir *sept*, ne pourront être déduits du type $(p^{2i+1}, q^{2j+3}, r^{2k+5})$ qu'en attribuant un seul et unique système de valeurs aux trois indices i, j, k; qu'il y en aura *deux*, à savoir les 4e et 8e qui pourront, au contraire, être déduits de ce même type (au signe près, c'est-à-dire sauf transposition de deux colonnes consécutives) au moyen de deux systèmes différents de valeurs desdits indices; et enfin qu'il y en aura *un* seul, le 7e, qui pourra être obtenu par la même voie de trois manières différentes. La preuve de cette assertion résulte du tableau suivant, dans lequel nous indiquons les différents systèmes de valeurs en question, en inscrivant en regard de chacun d'eux la valeur qui en résulte pour l'élément de la somme envisagée (136), c'est-à-dire pour la quantité $\frac{A_i A_j A_k}{(2i+1)(2j+3)(2k+5)}(p^{2i+1}, q^{2j+3}, r^{2k+5})$,

$i=0,$	$j=1,$	$k=1,$	$\frac{A_0A_1A_1}{1.5.7}(p,\ q^5,\ r^7),$
$i=0,$	$j=2,$	$k=0,$	$\frac{A_0A_2A_0}{1.7.5}(p,\ q^7,\ r^5),$
$i=1,$	$j=1,$	$k=2,$	$\frac{A_1A_1A_2}{3.5.9}(p^3,\ q^5,\ r^9),$
$i=2,$	$j=0,$	$k=2,$	$\frac{A_2A_0A_2}{5.3.9}(p^5,\ q^3,\ r^9),$
$i=1,$	$j=1,$	$k=1,$	$\frac{A_1A_1A_1}{3.5.7}(p^3,\ q^5,\ r^7),$
$i=1,$	$j=2,$	$k=0,$	$\frac{A_1A_2A_0}{3.7.5}(p^3,\ q^7,\ r^5),$
$i=2,$	$j=0,$	$k=1,$	$\frac{A_2A_0A_1}{5.3.7}(p^5,\ q^3,\ r^7),$

car il résulte manifestement de la définition (135) du symbole (p^i, q^j, r^k) que l'on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} (p,\ q^5,\ r^7) = -(p,\ q^7,\ r^5), \qquad (p^3,\ q^5,\ r^9) = -(p^5,\ q^3,\ r^9) \\ \qquad -(p^5,\ q^5,\ r^7) = (p^3,\ q^7,\ r^5) = (p^5,\ q^3,\ r^7). \end{array} \right.$$

En tenant compte de ces égalités, et formant de même les autres déterminants partiels (139) qui ne peuvent être obtenus que d'une seule manière, ladite formule (136) donnera donc ainsi, pour la somme demandée, l'expression

$$\begin{aligned} J_z^{(1)} = \left(\frac{\pm i}{m\sqrt{G}}\right)^3 D.\Bigg[&\frac{A_0A_0A_0}{1.3.5}(p,\ q^3,\ r^5) + \frac{A_0A_0A_1}{1.3.7}(p,\ q^3,\ r^7) \\ &+ \frac{A_0A_0A_2}{1.3.9}(p,\ q^3,\ r^9) + \left(\frac{A_0A_1A_1}{1.5.7} - \frac{A_0A_2A_0}{1.7.5}\right)(p,\ q^5,\ r^7) \\ &+ \frac{A_0A_1A_2}{1.5.9}(p,\ q^5,\ r^9) + \frac{A_0A_2A_2}{1.7.9}(p,\ q^7,\ r^9) \\ &+ \left(\frac{A_1A_1A_1}{3.5.7} - \frac{A_1A_2A_0}{3.7.5} - \frac{A_2A_0A_1}{5.3.7}\right)(p^3,\ q^5,\ r^7) \\ &+ \left(\frac{A_1A_1A_2}{3.5.9} - \frac{A_2A_0A_2}{5.3.9}\right)(p^3,\ q^5,\ r^9) + \frac{A_1A_2A_2}{3.7.9}(p^3,\ q^7,\ r^9) \\ &+ \frac{A_2A_2A_2}{5.7.9}(p^5,\ q^7,\ r^9)\Bigg], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, eu égard aux valeurs (137) des coefficients A, l'expression définitive, écrite à l'aide de la notation abrégée (135),

(140)
$$\left\{ \begin{aligned} J_z^{(1)} = \mathbf{S}(yz)^3 d\mathfrak{M} = \frac{\mp iD}{(m\sqrt{G})^3}\Bigg[&\frac{g^6}{1.3.5}(p,\ q^3,\ r^5) + \frac{g^4h}{1.3.7}(p,\ q^3,\ r^7) \\ &- \frac{g^4}{1.3.9}(p,\ q^3,\ r^9) + \frac{g^2h^2 + g^4}{1.5.7}(p,\ q^5,\ r^7) - \frac{g^2h}{1.5.9}(p,\ q^5,\ r^9) \\ &+ \frac{g^2}{1.7.9}(p,\ q^7,\ r^9) + \frac{h^3 + 2g^2h}{3.5.7}(p^3,\ q^5,\ r^7) - \frac{h^2+g^2}{3.5.9}(p^3,\ q^5,\ r^9) \\ &+ \frac{h}{3.7.9}(p^3,\ q^7,\ r^9) - \frac{1}{5.7.9}(p^5,\ q^7,\ r^9)\Bigg], \end{aligned} \right.$$

laquelle est bien effectivement celle que l'on trouvera si l'on cherche à calculer directement, dans ce cas simple, la même somme, à l'aide de la formule primitive (99), en opérant immédiatement toutes les réductions qui s'offriront alors par suite de la forme (112) des éléments de chaque colonne, et sans déduire, comme nous venons de le faire, ce résultat de la formule (136) : ce qui constitue dès lors une vérification péremptoire de l'exactitude de cette dernière formule, ainsi que des diverses considérations sur lesquelles elle a été fondée.

Il ne restera donc plus qu'à remplacer, tant dans la formule générale ci-dessus (136) que dans cette expression particulière (140) que nous venons d'obtenir, les trois variables provisoires p, q, r par leur valeur de définition (88) en u, v, w, en même temps que les constantes g^2 et h par leurs valeurs convenues (107); puis, cela fait, possédant ainsi l'expression définitive soit de $J_x^{(\alpha)}$, soit de $J_x^{(1)}$, on en déduira immédiatement celles de $J_y^{(\alpha)}$ et $J_z^{(\alpha)}$, ou de $J_y^{(1)}$ et $J_z^{(1)}$ par la permutation simultanée des deux groupes (l^2, m^2, n^2) ou (a^2, b^2, c^2) et (u, v, w); et, dans l'un et l'autre cas, les trois sommes demandées se trouveront ainsi, malgré leur apparente complication, entièrement calculées, et développées sous une forme qui ne sera plus susceptible d'aucune réduction ultérieure.

B. [*Intégrale* $I_x^{(\alpha)}$]. Conservant encore toutes les notations, et notamment celles (127), dont nous nous sommes servi avec avantage pour le calcul des éléments de cette intégrale, et introduisant en plus celle-ci, dont on reconnaîtra l'utilité tout à l'heure, savoir

$$(141) \qquad \overline{T} = -T_{\alpha+4} = (t^{\alpha+1}\sqrt{T})_1^2,$$

notations à l'aide desquelles la première des équations ci-dessus (128) donnera, en y changeant α d'abord en $\alpha + 2$, puis en $\alpha + 4$, les trois valeurs

$$(142) \qquad \begin{aligned} (\alpha - 1)\,T_\alpha &= A'_\alpha \,.\, T_{\alpha-2} + A''_\alpha \,.\, T_{\alpha-4} + \overline{T}_\alpha, \\ (\alpha + 1)\,T_{\alpha+2} &= A'_{\alpha+2} \,.\, T_\alpha + A''_{\alpha+2} \,.\, T_{\alpha-2} + \overline{T}_{\alpha+2}, \\ (\alpha + 3)\,T_{\alpha+4} &= A'_{\alpha+4} \,.\, T_{\alpha+2} + A''_{\alpha+4} \,.\, T_\alpha - \overline{T}, \end{aligned}$$

la formule (121) qu'il s'agit de développer se transformera une première fois, si l'on multiplie et divise le second membre par $\alpha + 3$, ainsi qu'il suit

$$(143)\left\{\begin{aligned} I_x^{(\alpha)} &= \frac{\left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha D}{\alpha+3} \begin{vmatrix} P_\alpha, & P_{\alpha+2}, & (\alpha+3)\,P_{\alpha+4} \\ Q_\alpha, & Q_{\alpha+2}, & (\alpha+3)\,Q_{\alpha+4} \\ R_\alpha, & R_{\alpha+2}, & (\alpha+3)\,R_{\alpha+4} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha \frac{D}{\alpha+3} \begin{vmatrix} P_\alpha, & P_{\alpha+2}, & A'_{\alpha+4}P_{\alpha+2} + A''_{\alpha+4}P_\alpha - \overline{P} \\ Q_\alpha, & Q_{\alpha+2}, & A'_{\alpha+4}Q_{\alpha+2} + A''_{\alpha+4}Q_\alpha - \overline{Q} \\ R_\alpha, & R_{\alpha+2}, & A'_{\alpha+4}R_{\alpha+2} + A''_{\alpha+4}R_\alpha - \overline{R} \end{vmatrix} = \left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha \frac{D}{\alpha+3}\,\Delta_x^{(\alpha)}, \end{aligned}\right.$$

en posant pour un nombre entier i quelconque, sans connexion admise à l'avance avec l'indice α,

$$(144)\quad \Delta_x^{(i)} = \begin{vmatrix} P_i, & P_{i+2}, & -\overline{P} \\ Q_i, & Q_{i+2}, & -\overline{Q} \\ R_i, & R_{i+2}, & -\overline{R} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_i, & P_{i+2}, & -(p^{\alpha+1}\sqrt{\overline{P}})_i^2 \\ Q_i, & Q_{i+2}, & -(q^{\alpha+1}\sqrt{\overline{Q}})_i^2 \\ R_i, & R_{i+2}, & -(r^{\alpha+1}\sqrt{\overline{R}})_i^2 \end{vmatrix}.$$

Or ce dernier déterminant se transformera lui-même, à l'aide du même procédé, et en tenant compte cette fois de la seconde formule ci-dessus (142) dans laquelle on écrira i à la place de α, ainsi qu'il suit

$$\begin{aligned} \Delta_x^{(i)} &= \frac{1}{i+1} \begin{vmatrix} P_i, & (i+1)\,P_{i+2}, & -\overline{P} \\ Q_i, & (i+1)\,Q_{i+2}, & -\overline{Q} \\ R_i, & (i+1)\,R_{i+2}, & -\overline{R} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{i+1} \begin{vmatrix} P_i, & A'_{i+2}\,P_i + A''_{i+2}\,P_{i-2} + \overline{P}_{i+2}, & -\overline{P} \\ Q_i, & A'_{i+2}\,Q_i + A''_{i+2}\,Q_{i-2} + \overline{Q}_{i+2}, & -\overline{Q} \\ R_i, & A'_{i+2}\,R_i + A''_{i+2}\,R_{i-2} + \overline{R}_{i+2}, & -\overline{R} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{i+1} \begin{vmatrix} P_i, & \overline{P}_{i+2}, & -\overline{P} \\ Q_i, & \overline{Q}_{i+2}, & -\overline{Q} \\ R_i, & \overline{R}_{i+2}, & -\overline{R} \end{vmatrix} + \frac{A''_{i+2}}{i+1} \begin{vmatrix} P_i, & P_{i-2}, & -\overline{P} \\ Q_i, & Q_{i-2}, & -\overline{Q} \\ R_i, & R_{i-2}, & -\overline{R} \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

de telle sorte que, si l'on pose à nouveau, en tenant compte d'abord des définitions (127) et (141) des symboles $\overline{T}_n$ et $\overline{T}$, puis changeant ensuite les signes des deux dernières colonnes,

$$(145) \qquad H_x^{(i)} = \begin{vmatrix} P_i, & \overline{P}_{i+2}, & -\overline{P} \\ Q_i, & \overline{Q}_{i+2}, & -\overline{Q} \\ R_i, & \overline{R}_{i+2}, & -\overline{R} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_i, & (p^{i-1}\sqrt{\overline{P}})_1^2, & (p^{\alpha+1}\sqrt{\overline{P}})_1^2 \\ Q_i, & (q^{i-1}\sqrt{\overline{Q}})_1^2, & (q^{\alpha+1}\sqrt{\overline{Q}})_1^2 \\ R_i, & (r^{i-1}\sqrt{\overline{R}})_1^2, & (r^{\alpha+1}\sqrt{\overline{R}})_1^2 \end{vmatrix},$$

l'égalité précédente donnera, avec ces notations et celles admises antérieurement (144), en intervertissant deux colonnes consécutives dans le second déterminant qui figure au dernier membre de cette égalité, et tenant compte en outre de la définition (127) du coefficient A'', la formule de réduction

$$\Delta_x^{(i)} = \frac{1}{i+1}\left[H_x^{(i)} - (i-1)\, g^2 \Delta_x^{(i-2)}\right],$$

laquelle, en y changeant successivement i en $i-2$, $i-4$, ..., fournira la suite d'égalités

$$\left\{\begin{array}{lcll} (i+1)\,\Delta_x^{(i)} & + & (i-1)\,g^2\Delta_x^{(i-2)} = H_x^{(i)}, & \quad \Big| \; 1 \\ (i-1)\,\Delta_x^{(i-2)} & + & (i-3)\,g^2\Delta_x^{(i-4)} = H_x^{(i-2)}, & \quad \Big| \; -g^2 \\ (i-3)\,\Delta_x^{(i-4)} & + & (i-5)\,g^2\Delta_x^{(i-6)} = H_x^{(i-4)}, & \quad \Big| \; +g^4 \\ \dots & & \dots & \quad \Big| \; \dots \\ (i-2j+1)\,\Delta_x^{(i-2j)} & + & (i-2j-1)\,g^2\Delta_x^{(i-2j-2)} = H_x^{(i-2j)}, & \quad \Big| \; (-1)^j g^{2j} \\ \dots & & \dots & \quad \Big| \; \dots \end{array}\right.$$

les deux dernières égalités de cette suite étant, si i est pair,

$$\left\{\begin{array}{l} 5\Delta_x^{(4)} + 3g^2\Delta_x^{(2)} = H_x^{(4)}, \\ 3\Delta_x^{(2)} + g^2\Delta_x^{(0)} = H_x^{(2)}, \end{array}\right. \qquad \begin{array}{|l} (-1)^{\frac{i}{2}-2}\, g^{i-4} \\ (-1)^{\frac{i}{2}-1}\, g^{i-2} \end{array}$$

et, si i est impair,

$$\left\{\begin{array}{l} 4\Delta_x^{(3)} + 2g^2\Delta_x^{(1)} = H_x^{(3)}, \\ 2\Delta_x^{(1)} + \quad 0 \quad = H_x^{(1)}. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{|l} (-1)^{\frac{i-3}{2}}\, g^{i-3} \\ (-1)^{\frac{i-1}{2}}\, g^{i-1} \end{array}$$

Cela posé, pour déterminer l'expression $\Delta_x^{(i)}$, il suffira évidemment d'ajouter ensemble ces différentes équations, respectivement multipliées par les facteurs inscrits en marge en regard de chacune, ce qui donnera, toutes réductions faites, dans le cas de i pair,

$$(i+1)\Delta_x^{(i)} + (-1)^{\frac{i}{2}-1} g^i \Delta_x^{(0)} = H_x^{(i)} - g^2 H_x^{(i-2)} + g^4 H_x^{(i-4)} - \dots$$
$$+ (-1)^j g^{2j} H_x^{(i-2j)} + \dots + (-1)^{\frac{i}{2}-2} g^{i-4} H_x^{(4)} + (-1)^{\frac{i}{2}-1} g^{i-2} H_x^{(2)},$$

et dans l'hypothèse de i impair,

$$(i+1)\Delta_x^{(i)} = H_x^{(i)} - g^2 H_x^{(i-2)} + g^4 H_x^{(i-4)} - \dots$$
$$+ (-1)^j g^{2j} H_x^{(i-2j)} + \dots + (-1)^{\frac{i-3}{2}} g^{i-3} H_x^{(3)} + (-1)^{\frac{i-1}{2}} g^{i-1} H_x^{(1)};$$

d'où l'on tirera, par conséquent, dans le cas de i pair, la valeur

$$(146)\quad \begin{cases} \Delta_x^{(i)} = \dfrac{1}{i+1}\Big[H_x^{(i)} - g^2 H_x^{(i-2)} + g^4 H_x^{(i-4)} - \dots \dots + (-1)^j g^{2j} H_x^{(i-2j)} \\ \qquad + \dots + (-1)^{\frac{i}{2}-2} g^{i-4} H_x^{(4)} + (-1)^{\frac{i}{2}-1} g^{i-2} H_x^{(2)} + (-1)^{\frac{i}{2}} g^i \Delta_x^{(0)}\Big], \end{cases}$$

et dans le cas de i impair celle-ci, qui ne diffère de la précédente que par les derniers termes seulement :

$$(147)\quad \begin{cases} \Delta_x^{(i)} = \dfrac{1}{i+1}\Big[H_x^{(i)} - g^2 H_x^{(i-2)} + g^4 H_x^{(i-4)} - \dots \dots + (-1)^j g^{2j} H_x^{(i-2j)} \\ \qquad + \dots + (-1)^{\frac{i-3}{2}} g^{i-3} H_x^{(3)} + (-1)^{\frac{i-1}{2}} H_x^{(1)}\Big]. \end{cases}$$

Ce développement étant ainsi obtenu, la formule ci-dessus (143) donnera donc, en tenant compte de la valeur (107) de g^2, pour la quantité demandée $I_x^{(\alpha)}$, l'expression

$$(148)\quad I_x^{(\alpha)} = \left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha D \frac{\Delta_x^{(\alpha)}}{\alpha+3} = \left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha \frac{D}{(\alpha+1)(\alpha+3)} \sum_j (-1)^j (l^2n^2)^j H_x^{(\alpha-2j)}, \ (*)$$

(*) Même observation que pour la formule précédente analogue (136), nous voulons dire celle consignée dans la note de la page 515. [Voir encore également la note postérieure concernant les expressions (169) ci-après, relatives au centre de gravité.]

dans laquelle le symbole $H_x^{(i)}$ représentant le déterminant (145), l'indice j recevra toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $\frac{\alpha}{2}$ ou $\frac{\alpha-1}{2}$, suivant que α sera pair ou impair, étant entendu en outre, dans le cas de α pair, que pour le dernier terme de la somme ainsi développée qui serait, au pied de la lettre, $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}(ln)^{\alpha}H_x^{(0)}$, la quantité $H_x^{(0)}$ devra être remplacée par $\Delta_x^{(0)}$.

L'expression générale des quantités T_i, auxquelles appartiennent comme type les éléments de la première colonne du déterminant $H_x^{(i)}$ (145), étant fournie plus haut par les formules (133) ou (134) suivant la parité de i, il appert de ces formules que l'expression (148) à laquelle nous venons d'arriver pour $I_x^{(\alpha)}$, et qui ne renferme que des quantités connues, ne sera plus susceptible à présent d'aucune réduction ou simplification ultérieure : car, même en supposant que l'on ait, après substitution de ces valeurs développées (133) ou (134) dans la première colonne de chacun des déterminants $H_x^{(i)}$ qui entrent dans ladite expression (148), décomposé alors chacun des déterminants en question en une somme de déterminants partiels ne renfermant qu'un seul terme par élément, ainsi que nous l'avons fait pour ceux qui composaient la somme précédemment envisagée $J_x^{(\alpha)}$, même après cette opération accomplie, disons-nous, aucun des différents déterminants partiels ainsi formés ne pourrait disparaître par suite de réduction entre eux. En effet, d'une part, ceux provenant de la décomposition d'un même déterminant $H_x^{(i)}$ différeraient tous par les éléments de leur première colonne qui seraient, par hypothèse, les termes successifs d'une expression appartenant à l'un des deux types précités (133) ou (134), et par conséquent, eu égard à la définition (127) du symbole T_n, ils contiendraient en facteur dans tous leurs termes chacun une puissance différente des variables p, q, ou r ; et, d'autre part, pour deux déterminants partiels quelconques provenant de deux quantités $H_x^{(i)}$ différentes, leurs secondes colonnes appartiendraient de nouveau à deux types T_n différents par l'indice n, et par suite il se produirait encore, de ce fait, à leur égard, la même circonstance que nous venons de dire.

D'ailleurs, si l'on tient à connaître le nombre des déterminants partiels qui seraient ainsi formés, il suffira d'observer que le nombre des termes des développements (133) ou (134) est en général $\nu + 1$, pour $\alpha = 2\nu$, ou $\alpha = 2\nu + 1$; car, dans l'hypothèse de α pair, les formules (125) montrent que, sauf pour la détermination $t = p$, l'avant-dernier terme de la formule (133) (abstraction faite de son coefficient constant entre parenthèse), à savoir T_2, se composera de deux termes, et de même, pour le cas de α impair, les expressions (126) font voir que le dernier terme de la formule (134), à savoir T_1, ne comprendra qu'un seul terme (*); et par conséquent il est visible que le nombre de ces déterminants sera pareillement, dans les deux cas précités :

$$(\nu + 1) + \nu + (\nu - 1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}(\nu + 1)(\nu + 2).$$

Les formules auxquelles nous sommes arrivé, (148)-(145) et (133) ou (134), donnant ainsi, étant considérées ensemble, l'expression définitive de la somme de $I_x^{(\alpha)}$ à l'aide des variables auxiliaires p, q, r, il ne restera plus dès lors qu'à remplacer dans chacune de ces formules lesdites variables p, q, r par leurs valeurs de définition (88), et en supposant cette dernière opération accomplie, la permutation simultanée des deux groupes (u, v, w) et (l, m, n) ou (a^2, b^2, c^2) fournira à la fois, en premier lieu l'expression des trois déterminants analogues $H_x^{(\alpha)}$, $H_y^{(\alpha)}$, $H_z^{(\alpha)}$, puis en second lieu, par l'introduction des valeurs ainsi obtenues dans la formule précitée (148), celle définitive des trois sommes connexes $I_x^{(\alpha)}$, $I_y^{(\alpha)}$, $I_z^{(\alpha)}$, que nous nous étions proposé de calculer à l'aide de nos coordonnées u, v, w.

Un mot encore au sujet de ce dernier calcul, avant de passer à un autre objet.

(*) Nous n'avons pas égard, dans cette supputation, à la complexité des coefficients constants qui multiplient, soit T_1 dans la formule (134), soit T_2 dans celle (133), pas plus qu'à celle des coefficients $B_{\alpha, t}$ de tous les autres termes qui précèdent ce dernier, ou avant-dernier terme des formules en question.

L'exemple qui vient d'être traité fait ressortir clairement le but que nous avions en vue, en dérogeant provisoirement, dans les équations que nous avons adoptées pour définir nos variables auxiliaires (88), à la règle, invariablement observée jusque-là, de formules soumises à la loi de permutation circulaire. En maintenant encore une pareille loi relativement à ces trois équations comparées entre elles, il nous eût été évidemment impossible, pour le calcul des déterminants correspondant aux sommes (96), d'obtenir entre leurs éléments des relations linéaires telles que (142), c'est-à-dire dont les coefficients fussent les mêmes pour les éléments d'une même colonne, puisque ces coefficients eussent dû satisfaire eux-mêmes, en passant d'une ligne à la suivante, à ladite permutation circulaire. Or, c'est précisément, comme on vient de le voir, la constance de ces coefficients dans chaque colonne qui nous a seule permis d'apercevoir les réductions que comportent ces déterminants, et par conséquent d'en parachever le calcul. Il était donc indispensable, en vue de cette dernière opération, de renoncer provisoirement, pour le choix des variables auxiliaires, à la loi de permutation circulaire, sauf à y revenir ensuite, une fois ce calcul complètement effectué, ainsi que nous l'avons dit à plusieurs reprises à propos des exemples précédents.

Exemples et vérifications : centre de gravité, masse (ou volume), plans principaux et moments d'inertie, du solide délimité par trois couples de surfaces appartenant respectivement aux trois familles coordonnées. — L'application la plus utile et la plus intéressante, comme signification concrète, des calculs que nous venons d'effectuer, sera en même temps la plus simple au point de vue analytique, à savoir celle qui correspond aux valeurs 0, 1, et 2 de l'exposant α, et qui fournit les déterminations mécaniques relatives au centre de gravité, à la masse, aux plans principaux et aux moments principaux d'inertie, d'un corps homogène délimité par la portion d'espace à laquelle nous avons, par hypothèse, étendu nos intégrations dans les calculs qui précèdent.

En effet, d'une part, les coordonnées du centre de gravité

seront exprimées par des rapports ayant pour dénominateur la masse du corps

$$\mathfrak{M} = \mathbf{S}\, d\mathfrak{M},$$

et pour numérateurs les sommes

$$\mathbf{S}\, xd\mathfrak{M} \qquad \mathbf{S}\, yd\mathfrak{M}, \qquad \mathbf{S}\, zd\mathfrak{M},$$

c'est-à-dire, par conséquent, les valeurs des sommes du premier type (96), considérées relativement aux trois coordonnées x, y, z pour les deux valeurs 0 et 1 de l'exposant α; et, d'autre part, ce point étant une fois déterminé, il suffira de posséder l'ellipsoïde d'inertie de ce corps relatif à l'origine des coordonnées, ellipsoïde dont l'équation est, comme l'on sait, en coordonnées rectilignes X, Y, Z,

$$(149) \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{S}\, (y^2+z^2)d\mathfrak{M}\,.\,X^2 + \mathbf{S}\, (z^2+x^2)d\mathfrak{M}\,.\,Y^2 + \mathbf{S}\, (x^2+y^2)d\mathfrak{M}\,.\,Z^2 \\ &-2\mathbf{S}\, yzd\mathfrak{M}\,.\,YZ - 2\mathbf{S}\, zxd\mathfrak{M}\,.\,ZX - 2\mathbf{S}\, xyd\mathfrak{M}\,.\,XY = 1, \end{aligned} \right.$$

pour pouvoir en déduire très aisément, à l'aide des formules connues de cette théorie, l'ellipsoïde d'inertie du même corps relatif à son centre de gravité, dont les plans principaux seront par définition les plans principaux d'inertie dudit corps, et les inverses des carrés des axes (ou les coefficients des trois termes carrés dans son équation) expriment précisément les moments principaux d'inertie. Or l'on voit que l'équation de cet ellipsoïde, auquel la question se trouve ainsi ramenée, sera complètement déterminée si l'on possède à la fois les six sommes

$$\mathbf{S}\, x^2d\mathfrak{M}, \quad \mathbf{S}\, y^2d\mathfrak{M}, \quad \mathbf{S}\, z^2d\mathfrak{M}, \quad \mathbf{S}\, yzd\mathfrak{M}, \quad \mathbf{S}\, zxd\mathfrak{M}, \quad \mathbf{S}\, xyd\mathfrak{M},$$

c'est-à-dire encore les deux sommes (96) à la fois, considérées chacune relativement aux trois axes coordonnés, et respectivement pour les valeurs 2 et 0 de l'exposant α.

Outre leur intérêt propre, ces évaluations nous permettront encore, en envisageant spécialement, comme cas particulier, les valeurs auxquelles elles se réduiront lorsque l'on prendra pour le volume en question l'octant ou huitième partie d'un ellipsoïde donné, de comparer les valeurs ainsi calculées aux déterminations connues, relatives à cet exemple classique, et nous fourniront par là une vérification précieuse des résultats généraux obtenus dans le paragraphe précédent, comme application de nos formules.

Pour établir avec une entière rigueur les formules auxquelles nous allons arriver, nous supposerons tout d'abord, pour chacun des exemples envisagés, que le corps considéré soit renfermé tout entier dans l'un des quatre prismes parallèles aux x dont il a été parlé plus haut (page 476) ; puis, le résultat étant acquis avec cette restriction, nous montrerons aisément qu'il subsistera, quelles que soient la situation et l'étendue du corps en question.

I. (*Masse, ou volume*). La masse du corps supposé homogène, ou, ce qui revient au même (à un facteur constant près), son volume, sera exprimé par l'une des trois sommes appartenant au premier type (96), car l'on aura évidemment

$$(150) \qquad I_x^{(0)} = I_y^{(0)} = I_z^{(0)} = \mathbf{S}\, d\mathfrak{M} = \mathfrak{M}.$$

Pour la calculer, faisant donc $\alpha = 0$ dans la formule définitive (148), le développement fourni par cette formule se réduira littéralement alors au terme $\frac{D}{3} H_x^{(0)}$, c'est-à-dire, en fait, d'après la convention admise pour le cas de α pair en écrivant cette formule, à la quantité $\frac{D}{3} \Delta_x^{(0)}$, ou, ce qui est la même chose, eu égard à la définition (144) du déterminant $\Delta_x^{(i)}$, à celle-ci :

$$(151) \qquad I_x^{(0)} = \frac{D}{3} \Delta_x^{(0)} = \frac{D}{3} \begin{vmatrix} P_0, & P_2, & -(p\sqrt{P})_1^2 \\ Q_0, & Q_2, & -(q\sqrt{Q})_1^2 \\ R_0, & R_2, & -(r\sqrt{R})_1^2 \end{vmatrix}.$$

Or, les valeurs (89), (90), et (91) donnant

$$\left\{\begin{array}{lll} l^2-p^2=l^2\mathrm{cn}^2 u, & l^2-q^2=-m^2\,\mathrm{sn}^2 v, & l^2-r^2=-m^2\,\mathrm{dn}^2 w,\\ n^2+p^2=n^2\mathrm{dn}^2 u, & n^2+q^2=-m^2\mathrm{cn}^2 v, & n^2+r^2= \quad n^2\,\mathrm{sn}^2 w,\end{array}\right.$$

l'on en conclura, en vertu de la définition (97) de T et de la signification convenue à ce moment-là pour les symboles P, Q, R,

$$(151^{bis})\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{P}=(l^2-p^2)(n^2+p^2)= & l^2n^2\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u, & \pm\sqrt{\mathrm{P}}= nl\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,\\ \mathrm{Q}=(l^2-q^2)(n^2+q^2)= & m^4\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 v, & \pm\sqrt{\mathrm{Q}}= m^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v,\\ \mathrm{R}=(l^2-r^2)(n^2+r^2)= & -m^2n^2\,\mathrm{dn}^2 w\,\mathrm{sn}^2 w, & \pm\sqrt{\mathrm{R}}=min\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{sn}\,w.\end{array}\right.$$

De ces valeurs combinées avec nos définitions et conventions relatives aux signes admises pour les variables auxiliaires p, q, r (88), il résulte à présent, en raison des limites assignées à chaque coordonnée (pp. 425-426), et de la permanence du signe des cosinus et delta d'amplitude (pp. 440-441), que l'on aura, *sans ambiguïté de signe,* chaque radical étant entendu toujours expressément dans le sens de la détermination arithmétique ou positive : d'abord pour u, quel que soit son signe,

$$\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{P}}=l\,\mathrm{sn}\,u\,.\,nl\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u=nl^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u;$$

puis pour v, en examinant successivement l'hypothèse de l'un et l'autre signe pour cette coordonnée,

$$\left.\begin{array}{ll} v>0, & q\sqrt{\mathrm{Q}}=(+l\,\mathrm{dn}\,v)(+m^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)=\\ v<0, & q\sqrt{\mathrm{Q}}=(-l\,\mathrm{dn}\,v)(-m^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)=\end{array}\right\}\,lm^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v;$$

enfin, en agissant de même à l'égard de la coordonnée w, et tenant compte de la définition (7) de n qui donne $in=-\sqrt{a^2-c^2}<0$,

$$\left.\begin{array}{ll} w>0, & r\sqrt{\mathrm{R}}=(+in\,\mathrm{cn}\,w)(-min\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)=\\ w<0, & r\sqrt{\mathrm{R}}=(-in\,\mathrm{cn}\,w)(+min\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)=\end{array}\right\}\,mn^2\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w;$$

c'est-à-dire, en résumé, quel que soit le signe des trois coordonnées :

(152) $$\left\{\begin{array}{ll} p\sqrt{P} = nl^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, & q\sqrt{Q} = lm^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v, \\ & r\sqrt{R} = mn^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w. \end{array}\right.$$

En remettant donc à la fois ces dernières valeurs, ainsi que celles (124) et (125), dans l'expression (151) de $I_z^{(0)}$, celle-ci deviendra, en changeant le signe de la troisième colonne,

(153) $$\left\{\begin{aligned} I_z^{(0)} &= \frac{-D}{3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n}(u)_1^2, & -n[Z(u)]_1^2, & nl^2(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1^2 \\ \frac{1}{l}(v)_1^2, & l(v)_1^2 - l[Z(v)]_1^2, & lm^2(\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v)_1^2 \\ \frac{1}{m}(w)_1^2, & -\frac{n^2}{m}(w)_1^2 - m[Z(w)]_1^2, & mn^2(\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w)_1^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-D}{3}\left[\begin{vmatrix} \frac{1}{n}(u)_1^2, & 0, & nl^2(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1^2 \\ \frac{1}{l}(v)_1^2, & l(v)_1^2, & lm^2(\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v)_1^2 \\ \frac{1}{m}(w)_1^2, & -\frac{n^2}{m}(w)_1^2, & mn^2(\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w)_1^2 \end{vmatrix}\right. \\ &\qquad + \left.\begin{vmatrix} \frac{1}{n}(u)_1^2, & -n[Z(u)]_1^2, & nl^2(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1^2 \\ \frac{1}{l}(v)_1^2, & -l[Z(v)]_1^2, & lm^2(\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v)_1^2 \\ \frac{1}{m}(w)_1^2, & -m[Z(w)]_1^2, & mn^2(\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w)_1^2 \end{vmatrix}\right] \\ &= \frac{-D}{3}\, lmn\,(H_0 - K_0), \end{aligned}\right.$$

H_0 et K_0 étant alors, pour faciliter l'écriture de cette formule, les deux déterminants

$$(154)\qquad H_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{n^2}(u)_1^2, & 0, & l^2(\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u)_1^2 \\ \frac{1}{l^2}(v)_1^2, & (v)_1^2, & m^2(\mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v)_1^2 \\ \frac{1}{m^2}(w)_1^2, & -\frac{n^2}{m^2}(w)_1^2, & n^2(\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w)_1^2 \end{vmatrix},$$

$$(155)\qquad K_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{n^2}(u)_1^2, & [Z(u)]_1^2, & l^2(\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u)_1^2 \\ \frac{1}{l^2}(v)_1^2, & [Z(v)]_1^2, & m^2(\mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v)_1^2 \\ \frac{1}{m^2}(w)_1^2, & [Z(w)]_1^2, & n^2(\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w)_1^2 \end{vmatrix}.$$

Le second K_0 n'est évidemment susceptible d'aucune simplification, et il n'y a aucun intérêt d'ailleurs à tenter de modifier la forme actuelle de son expression, dont la symétrie est manifeste. Il n'en est pas de même pour le premier H_0, dont la valeur développée sera, en l'ordonnant, comme il semble naturel, par rapport aux transcendantes,

$$\begin{aligned} H_0 = & \left[\frac{1}{l^2}(v)_1^2 \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2}(w)_1^2\right) - \frac{1}{m^2}(w)_1^2 \cdot (v)_1^2\right] \cdot l^2(\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u)_1^2 \\ & + \left[\ 0 \quad - \left(-\frac{n^2}{m^2}(w)_1^2\right) \cdot \frac{1}{n^2}(u)_1^2\right] \cdot m^2(\mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v)_1^2 \\ & + \left[\frac{1}{n^2}(u)_1^2 \cdot (v)_1^2 \quad - \quad 0 \qquad\right] \cdot n^2(\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w)_1^2 \\ = & \frac{-(n^2+l^2)}{m^2}(v)_1^2(w)_1^2 \cdot (\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u)_1^2 + (w)_1^2(u)_1^2 \cdot (\mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v)_1^2 \\ & + (u)_1^2(v)_1^2 \cdot (\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w)_1^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire définitivement, eu égard à la relation de gauche (3) :

$$(156)\qquad \left\{ \begin{aligned} H_0 = & (v)_1^2(w)_1^2(\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u)_1^2 + (w)_1^2(u)_1^2(\mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v)_1^2 \\ & + (u)_1^2(v)_1^2(\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w)_1^2 \end{aligned} \right.$$

En résumé, H_0 et K_0 désignant donc, pour abréger, les deux expressions (156) et (155), la dernière ligne des égalités (153) donnera pour la somme $I_z^{(0)}$, c'est-à-dire, eu égard à celles (150), pour la masse en question $\mathfrak{M}$, l'expression remarquable

$$(157) \qquad \mathfrak{M} = \frac{D\sqrt{G}}{3}\left(- H_0 + K_0\right),$$

expression parfaitement symétrique par rapport aux trois coordonnées u, v, w, ainsi que cela devait être *a priori*, et dont on notera l'analogie frappante avec celle (83) que nous avons obtenue antérieurement pour l'aire de la portion de surface d'une sphère délimitée d'une façon toute semblable.

Cette formule étant ainsi établie en supposant le corps considéré renfermé en entier dans l'un des quatre prismes infinis parallèles aux x dont il a été parlé (page 476), il est facile de voir qu'elle subsistera encore, de même que les trois suivantes que nous allons établir par la suite, quelles que soient la situation et l'étendue du corps proposé, en raison de ce que cette expression, comme aussi les suivantes que nous rencontrerons, est une fonction impaire (abstraction faite des limites) séparément par rapport à v et à w.

Le raisonnement que nous allons présenter pour cette généralisation s'appliquera donc, en changeant seulement la signification des divers symboles, aux deux autres exemples, également intéressants, que nous examinerons à la suite de celui-ci.

En effet, partant de ce fait que chacune des deux quantités H_0 et K_0 dont est composée, à un facteur constant près, ladite expression (157), est formée visiblement d'une somme de termes tels que $A(U)_1^2(V)_1^2(W)_1^2$, le coefficient A étant une constante, et U, V, W trois fonctions respectives des seules variables u, v, w, parmi lesquelles les deux dernières V et W, étant des fonctions impaires, s'annulent donc pour $v = 0$, ou $w = 0$, nous représenterons en conséquence l'expression elle-même par la somme $\Sigma U(V)_1^2(W)_1^2$, en réunissant, pour abréger, le coefficient constant à la fonction de u, et supprimant, pour faciliter la lecture, l'indi-

cation des limites de cette variable u qui n'interviennent en aucune façon dans la difficulté qu'il s'agit de résoudre, en sorte que le symbole U tiendra lieu en réalité pour nous de la quantité $A(U)_1^2$.

Ces notations et conventions étant admises, si le corps considéré est tel que son volume s'étende sur plus d'un seul des quatre prismes précités, le résultat en question (157) ne pourra être appliqué d'emblée à ce corps, en raison de la discontinuité des variables q et r entre les limites de ces variables correspondantes aux limites données des variables v et w, discontinuité qui n'aurait pas permis les intégrations triples auxquelles nous avons procédé pour arriver à ladite formule ; mais il pourra être appliqué séparément à chacune des quatre portions du corps comprises dans les quatre prismes, conformément au mode de décomposition de l'intégrale triple indiquée plus haut par l'égalité (88bis).

Or les fonctions V et W étant impaires toutes les deux, l'on aura donc

$$(V)_1^0 = -(V_1), \qquad (V)_0^2 = V_2, \qquad (W)_1^0 = -W_1, \qquad (W)_0^2 = W_2.$$

Par conséquent, l'expression que l'on obtiendra de cette façon pour la masse totale du corps considéré sera, sans difficulté d'aucune sorte, conformément à l'égalité précitée,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \Sigma U(V)_1^0(W)_1^0 + \Sigma U(V)_1^0)(W)_0^2 + \Sigma U(V)_0^2(W)_1^0 + \Sigma U(V)_0^2(W)_0^2 \\ &= \Sigma UV_1W_1 - \Sigma UV_1W_2 - \Sigma UV_2W_1 + \Sigma UV_2W_2 \\ &= \Sigma U(V_1W_1 - V_1W_2 - V_2W_1 + V_2W_2) \\ &= \Sigma U(V_2 - V_1)(W_2 - W_1) = \Sigma U(V)_1^2(W)_1^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire identiquement la formule proposée (157) elle-même, qui se trouve ainsi démontrée dans tous les cas.

Pour vérifier cette formule, appliquons-la, comme nous l'avons annoncé un peu plus haut, à l'octant de l'ellipsoïde

$$(158) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

renfermé dans l'angle trièdre des coordonnées planes positives, lequel représente évidemment la huitième partie du volume total intérieur à cette surface, et, pour plus de clarté dans les notations, convenons, tant pour cette vérification que pour les suivantes, de désigner par les mêmes symboles écrits entre parenthèses les quantités déjà envisagées, lorsque nous les considérerons pour ce volume particulier.

D'après les explications données dans un paragraphe antérieur sur la déformation continue des surfaces coordonnées nécessaire pour embrasser tout l'espace, il est clair que l'on atteindra bien tous les points du volume ainsi défini en donnant aux deux coordonnées u et v, qui sont les paramètres des deux hyperboloïdes, toutes les valeurs *positives* dont elles sont susceptibles, c'est-à-dire depuis 0 jusqu'à K pour la première, et jusqu'à K′ pour la seconde (pp. 429 et 431); et pour la coordonnée w, depuis la valeur (négative par hypothèse) w_0, qui correspond à la valeur 0 de la coordonnée elliptique ν, et qui appartient à tous les points de la moitié de la surface (158) située au-dessus du plan des xy, jusqu'à la valeur 0 qui correspond, avons-nous vu, à ce même plan des xy (page 432). La valeur en question w_0 sera d'ailleurs fournie par l'équation de gauche de la troisième ligne (8), dans laquelle on attribuera à la coordonnée elliptique ν la valeur $\nu=0$, pour laquelle la surface donnée (158) fait partie de la troisième famille coordonnée, d'après les équations du système (156) du Chapitre précédent, c'est-à-dire que l'on aura les égalités :

$$(159)\quad \left\{\begin{aligned} & c^2 = n^2\,\mathrm{sn}^2(w_0,\ k''), \qquad \mathrm{sn}^2(w_0,\ k'') = \frac{c^2}{n^2}, \\ & w_0 = \mathrm{Arg\,sn}\left(\frac{c}{n},\ k''\right) = \int_0^{\frac{c}{n}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k''^2x^2)}}, \\ & \mathrm{cn}^2(w_0,k'') = 1 - \frac{c^2}{n^2} = \frac{n^2-c^2}{n^2} = \frac{(c^2-a^2)-c^2}{n^2} = \frac{-a^2}{n^2}, \\ & \mathrm{dn}^2(w_0,k'') = 1 - k''^2\,\mathrm{sn}^2 w_0 = 1 + \frac{n^2}{m^2}\cdot\frac{c^2}{n^2} = \frac{m^2+c^2}{m^2} = \frac{(b^2-c^2)+c^2}{m^2} = \frac{b^2}{m^2}. \end{aligned}\right.$$

Les limites de l'intégration pour les coordonnées u, v, w seront donc ainsi, dans la question actuelle,

$$(160) \qquad u_1 = 0, \quad u_2 = \mathrm{K}, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = \mathrm{K}', \quad w_1 = w_0, \quad w_2 = 0,$$

et non pas, pour la troisième coordonnée, $w_1 = 0$, et $w_2 = w_0$, car dans l'intégration triple, chacune des différentielles *du, dv, dw* étant supposée essentiellement positive, chacune des variables indépendantes u, v, w est supposée aller en croissant dans l'intégration, ce qui revient à dire que la limite inférieure de chacune des intégrales simples dans lesquelles se décompose l'intégrale triple est *a priori* la plus petite des deux limites, la limite supérieure étant donc la plus grande des deux.

En introduisant en conséquence ces limites (160) dans les expressions (156) et (155), comme elles donneront tout d'abord

$$(160^{\text{bis}}) \qquad (u)_1^2 = u_2 - u_1 = \mathrm{K}, \qquad (v)_1^2 = v_2 - v_1 = \mathrm{K}', \qquad (w)_1^2 = w_2 - w_1 = -w_0,$$

$$(160^{\text{ter}}) \quad \begin{cases} [\mathrm{Z}(u, k)]_1^2 = \mathrm{Z}(u_2, k) - \mathrm{Z}(u_1, k) = \mathrm{Z}(\mathrm{K}, k) - \mathrm{Z}(0, k) = \mathrm{J}, \\ [\mathrm{Z}(v, k')]_1^2 = \mathrm{Z}(v_2, k') - \mathrm{Z}(v_1, k') = \mathrm{Z}(\mathrm{K}', k') - \mathrm{Z}(0, k') = \mathrm{J}', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u)_1^2 = \mathrm{sn}\,\mathrm{K}\ \mathrm{cn}\,\mathrm{K}\ \mathrm{dn}\,\mathrm{K} - \mathrm{sn}\,0\ \mathrm{cn}\,0\ \mathrm{dn}\,0 = 0, \\ (\mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v)_1^2 = \mathrm{sn}\,\mathrm{K}'\ \mathrm{cn}\,\mathrm{K}'\ \mathrm{dn}\,\mathrm{K}' - \mathrm{sn}\,0\ \mathrm{cn}\,0\ \mathrm{dn}\,0 = 0, \\ (\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w)_1^2 = \mathrm{sn}\,0\ \mathrm{cn}\,0\ \mathrm{dn}\,0 - \mathrm{sn}\, w_0\, \mathrm{cn}\, w_0\, \mathrm{dn}\, w_0 \\ \qquad = -\,\mathrm{sn}\, w_0\, \mathrm{cn}\, w_0\, \mathrm{dn}\, w_0, \end{cases}$$

il est clair que lesdites expressions (156) et (155) se réduiront, pour ces limites, respectivement aux deux valeurs, dans lesquelles nous n'écrivons que les seuls termes utiles,

$$(161) \quad \begin{cases} (\mathrm{H}_0) = -\,\mathrm{K}\mathrm{K}'.\mathrm{sn}\, w_0\, \mathrm{cn}\, w_0\, \mathrm{dn}\, w_0, \\ (\mathrm{K}_0) = \begin{vmatrix} \frac{1}{n^2}\mathrm{K}, & \mathrm{J}, & 0 \\ \frac{1}{l^2}\mathrm{K}', & \mathrm{J}', & 0 \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & -n^2\,\mathrm{sn}\, w_0\, \mathrm{cn}\, w_0\, \mathrm{dn}\, w_0 \end{vmatrix} \\ \qquad = \left(\frac{1}{n^2}\mathrm{K}.\mathrm{J}' - \frac{1}{l^2}\mathrm{K}'.\mathrm{J}\right).(-n^2)\,\mathrm{sn}\, w_0\, \mathrm{cn}\, w_0\, \mathrm{dn}\, w_0; \end{cases}$$

et par conséquent la formule en question (157) donnera, avec la notation convenue tout à l'heure, pour la masse du corps actuellement envisagé, c'est-à-dire pour celle de la huitième partie de l'ellipsoïde donné, l'expression :

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} (\mathfrak{M}) &= \frac{D\sqrt{G}}{3}\Big(-(H_0)+(K_0)\Big) \\ &= \frac{D\sqrt{G}}{3}\left[KK'\,\mathrm{sn}\,w_0\,\mathrm{cn}\,w_0\,\mathrm{dn}\,w_0 - \left(\frac{1}{n^2}KJ' - \frac{1}{l^2}K'J\right).n^2\,\mathrm{sn}\,w_0\,\mathrm{cn}\,w_0\,\mathrm{dn}\,w_0\right] \\ &= \frac{D\sqrt{G}}{3}\left[K(K'-J') + \frac{n^2}{l^2}K'J\right].\mathrm{sn}\,w_0\,\mathrm{cn}\,w_0\,\mathrm{dn}\,w_0. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on se reporte à nos relations (52) et (42) entre les intégrales complètes de première et de seconde espèce, qui donnent

$$K'-J' = \frac{1}{k}J_1, \qquad K' = kK_1,$$

la quantité entre crochets qui figure dans l'expression précédente se transformera successivement, en tenant compte de la valeur (3) de k^2, ainsi qu'il suit

$$K.(K'-J') + \frac{n^2}{l^2}.K'.J = K.\frac{1}{k}J_1 - \frac{1}{k^2}.kK_1.J = \frac{1}{k}(KJ_1 - K_1J) = \frac{1}{k}\frac{\pi}{2},$$

en vertu de la formule classique de Jacobi relative à la fonction elliptique de deuxième espèce(*) : valeur qui, étant remise alors dans l'expression (162) obtenue tout à l'heure pour $(\mathfrak{M})$, la transformera à son tour dans la suivante :

$$(163)\qquad (\mathfrak{M}) = \frac{D}{3}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{G}}{k}\,\mathrm{sn}\,w_0\,\mathrm{cn}\,w_0\,\mathrm{dn}\,w_0.$$

D'autre part, si l'on tient compte des valeurs (159) et de

(*) Voir, si l'on veut, Hermite, *Note sur la Théorie des Fonctions Elliptiques*, déjà citée à plusieurs reprises (notamment, page 438, *en note*), à la page 82 de ladite Note.

celle (3) de k^2, l'on trouvera, en réservant tout d'abord la question du signe,

$$(163^{bis})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sqrt{G}}{k} \operatorname{sn} w_0 \operatorname{cn} w_0 \operatorname{dn} w_0 = \pm \sqrt{G \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \operatorname{sn}^2 w_0 . \operatorname{cn}^2 w_0 . \operatorname{dn}^2 w_0} \\ &= \pm \sqrt{l^2 m^2 n^2 . \left(-\frac{n^2}{l^2}\right) \cdot \frac{c^2}{n^2} \cdot \left(-\frac{a^2}{n^2}\right) \cdot \frac{b^2}{m^2}} = \pm \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \pm abc; \end{aligned} \right.$$

et quant au signe lui-même, il suffit pour le déterminer d'observer que, sur les cinq facteurs qui composent cette expression, le dénominateur k est positif par définition; que cn w_0 et dn w_0 le sont également (pp. 440-441); enfin, qu'il résulte de la première formule (23) que sn w est de la forme sn $w = i\mathrm{W}$, W étant une fonction impaire de même signe que w' ou w, et que par suite l'on aura, dans le cas particulier actuel, sn $w_0 = i\mathrm{W}_0$, W_0 étant de même signe que w_0, c'est-à-dire négatif : d'où il résulte immédiatement, eu égard aux définitions (7), que le produit des deux facteurs restants, savoir

$$\sqrt{G} \operatorname{sn} w_0 = lmn . i\mathrm{W}_0 = lm . in . \mathrm{W}_0 = lm\left(-\sqrt{a^2 - c^2}\right) . \mathrm{W}_0 .$$

est également positif, et par conséquent aussi le produit en question des cinq facteurs (163bis), de telle sorte que l'on a, dans l'hypothèse envisagée, sans aucune incertitude sur le signe :

$$(164)\qquad \frac{\sqrt{G}}{k} \operatorname{dn} w_0 \operatorname{cn} w_0 \operatorname{dn} w_0 = abc.$$

En remettant donc cette dernière valeur dans l'expression précédente (163) obtenue tout à l'heure pour ($\mathfrak{M}$), celle-ci se réduira simplement à

$$(165)\qquad (\mathfrak{M}) = \frac{D}{3}\,\frac{\pi}{2}\,abc,$$

ainsi qu'on devait bien le trouver effectivement, *en grandeur et en signe*, pour la huitième partie de la masse totale de l'ellipsoïde donné (158); et l'on s'assurera sans peine que les mêmes

considérations redonneront bien toujours le même résultat, quel que soit l'octant de la surface en question que l'on ait envisagé (*), ce qui confirme pleinement l'exactitude, tant des nombreuses formules de notre théorie, que des diverses distinctions ou règles pratiques relatives aux signes que nous avons établies pour leur emploi.

B. (*Centre de gravité*). Le dénominateur commun des coordonnées rectilignes de ce point étant déjà obtenu par ce qui précède, nous n'avons donc plus qu'à calculer leurs numérateurs, c'est-à-dire l'une seulement des trois sommes appartenant au premier type (96) pour l'exposant $\alpha = 1$.

(*) En effet, tout d'abord, si l'une des deux coordonnées u ou v (ou les deux à la fois) était supposée négative, les limites correspondantes seraient alors, au lieu des valeurs (160), $u_1 = -\mathrm{K}$, $u_2 = 0$; $v_1 = -\mathrm{K}'$, $v_2 = 0$, et donneraient encore, par conséquent,

$$(u)_1^2 = u_2 - u_1 = 0 - (-\mathrm{K}) = \mathrm{K}, \qquad (v)_1^2 = v_2 - v_1 = 0 - (-\mathrm{K}') = \mathrm{K}',$$

$$\left\{\begin{array}{l} [\mathrm{Z}(u,k)]_1^2 = \mathrm{Z}(u_2,k) - \mathrm{Z}(u_1,k) = \mathrm{Z}(0,k) - \mathrm{Z}(-\mathrm{K},k) = 0 - (-\mathrm{J}) = \mathrm{J}, \\ [\mathrm{Z}(v,k')]_1^2 = \mathrm{Z}(v_2,k') - \mathrm{Z}(v_1,k') = \mathrm{Z}(0,k') - \mathrm{Z}(-\mathrm{K}',k') = 0 - (-\mathrm{J}') = \mathrm{J}', \end{array}\right.$$

c'est-à-dire, pour ces deux coordonnées, exactement les mêmes valeurs (160bis) et (160ter) que lorsqu'elles étaient supposées positives.

Enfin, si la troisième coordonnée w était également supposée de signe contraire à l'hypothèse ci-dessus, c'est-à-dire positive, comme il faudrait prendre dans ce cas $w_1 = 0$, $w_2 = w_0$, l'on aurait donc alors, d'une part, à la place de la dernière égalité (160ter), celle-ci

$$(\alpha) \qquad (\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{cn}\, w\, \mathrm{dn}\, w)_1^2 = \mathrm{sn}\, w_0 \mathrm{cn}\, w_0 \mathrm{dn}\, w_0 - \mathrm{sn}\, 0\, \mathrm{cn}\, 0\, \mathrm{dn}\, 0 = \mathrm{sn}\, w_0 \mathrm{cn}\, w_0 \mathrm{dn}\, w_0,$$

en sorte que le signe —, ou, ce qui revient au même, le facteur -1, qui figure explicitement dans les expressions (161) des deux quantités (H_0) et (K_0), disparaîtrait de ces expressions, et, par suite, apparaîtrait au contraire, après substitution de ces valeurs dans l'expression suivante (162) de la masse ($\mathfrak{M}$), tandis qu'il n'y figurait pas explicitement dans le calcul ci-dessus. Mais, d'autre part, les mêmes raisonnements qui nous ont fourni l'égalité (164) dans l'hypothèse de $w_0 < 0$, donneraient actuellement, pour le cas de $w_0 > 0$, celle-ci

$$(6) \qquad \frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{k} \mathrm{sn}\, w_0\, \mathrm{cn}\, w_0\, \mathrm{dn}\, w_0 = -abc,$$

en sorte que, par l'effet de ce double changement de signe des deux facteurs (α) et (6), la valeur de l'expression (162) en question resterait exactement la même que devant, quel que soit le signe de chacune des trois coordonnées u, v, w, et par conséquent aussi l'octant que l'on considère dans la surface proposée (158).

A cet effet, les formules (148) et (145) se réduisant, pour cette hypothèse, à celles-ci

$$(166)\qquad I_x^{(1)} = \frac{\mp i}{ln}\,\frac{D}{2.4}\,H_x^{(1)}, \qquad H_x^{(1)} = \begin{vmatrix} P_1, & (\sqrt{P})_1^2, & (p^2\sqrt{P})_1^2 \\ Q_1, & (\sqrt{Q})_1^2, & (q^2\sqrt{Q})_1^2 \\ R_1, & (\sqrt{R})_1^2, & (r^2\sqrt{R})_1^2 \end{vmatrix},$$

dans lesquelles on a, le radical étant toujours entendu dans le sens de la détermination positive, eu égard aux valeurs (151bis) et (152) déjà calculées pour la détermination précédente, ainsi qu'aux définitions (88) de p, q, r, et en attribuant dès lors expressément aux doubles signes la même signification que dans lesdites formules (88),

$$\sqrt{P} = nl\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \qquad \sqrt{Q} = \pm m^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v, \qquad \sqrt{R} = \mp in\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{sn}\,w, \quad (*)$$

$$(167)\quad \left\{ \begin{aligned} p^2\sqrt{P} &= p.p\sqrt{P} = l\,\mathrm{sn}\,u\,.\,nl^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u = nl^3\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u, \\ q^2\sqrt{Q} &= q\,.\,q\sqrt{Q} = \pm\, l\,\mathrm{dn}\,v\,.\,lm^2\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{dn}v = \pm\, l^2m^2\,\mathrm{dn}^2v\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}v, \\ r^2\sqrt{R} &= r\,.\,r\sqrt{R} = \pm in\mathrm{cn}w\,.\,mn^2\mathrm{sn}\,w\mathrm{cn}\,w\mathrm{dn}\,w = \mp m(in)^3\mathrm{cn}^2w\mathrm{dn}w\mathrm{sn}w, \end{aligned} \right.$$

la formule de droite qui précède (166) donnera donc, en y remettant, avec ces dernières valeurs, celles (126) de P_1, Q_1, R_1, pour l'expression du déterminant envisagé $H_x^{(1)}$, celle-ci :

$$H_x^{(1)} = \begin{vmatrix} \left[\arc\sin\left(\frac{il}{m}\,\mathrm{cn}\,u\right)\right]_1^2, & nl\,(\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2, & nl^3\,(\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2 \\ \pm\left[\arc\sin\,(\mathrm{sn}\,v)\right]_1^2, & \pm\, m^2\,(\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)_1^2, & \pm\, l^2m^2\,(\mathrm{dn}^2v\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)_1^2 \\ \mp\left[\arc\sin\left(\frac{-in}{m}\,\mathrm{sn}\,w\right)\right]_1^2, & \mp\, min(\mathrm{dn}w\mathrm{sn}w)_1^2, & \mp\, m(in)^3(\mathrm{cn}^2w\mathrm{dn}w\mathrm{sn}w)_1^2 \end{vmatrix}.$$

D'ailleurs, dans tous les cas, le signe qu'il faudra prendre étant ainsi le même pour tous les éléments d'une même ligne, ce signe pourra donc être remplacé, pour chaque ligne, par le

---

(*) Nous avons déjà écrit et justifié les trois premières de ces valeurs dans le calcul et le raisonnement qui nous ont conduit aux valeurs précitées (152).

facteur 1 ou — 1 affecté comme coefficient au déterminant lui-même, lequel facteur sera dès lors différent pour les deux lignes si l'on doit prendre à la fois dans ces deux lignes le signe placé de la même façon, c'est-à-dire supérieur ou inférieur, ou, inversement, qui sera le même dans l'hypothèse contraire : ce qui revient à dire, toujours en vertu de la convention admise pour les signes (pp. 474-475), qu'en supprimant ces doubles signes, le déterminant en question devra être affecté du cofficient — 1 quand les deux coordonnées v et w seront de même signe, et du coefficient + 1 lorsqu'elles seront de signes contraires.

Or, l'expression précédente du déterminant $H_z^{(1)}$ étant supposée récrite de la façon que nous venons de dire, comme le double signe qui figure, dans le premier facteur, au second membre de la formule de gauche (166), a précisément, d'après nos conventions, la même signification qui vient d'être spécifiée, c'est-à-dire comme il pourra, lui aussi, être remplacé par le coefficient — 1 ou 1 exactement dans les mêmes circonstances, il résulte évidemment de là que, lorsqu'on remettra dans cette dernière formule la valeur ainsi récrite du déterminant $H_z^{(1)}$, la coïncidence des coefficients — 1 ou 1 ainsi introduits à deux reprises comme facteurs, suivant l'hypothèse, pour tenir lieu des doubles signes, au second membre de ladite formule, amènera l'unité pour leur produit dans tous les cas, en sorte qu'il ne restera plus aucune trace des doubles signes dans le résultat définitif (*).

(*) Cette disparition finale des doubles signes, qui semble parfaitement conforme à ce que l'on devait attendre *a priori*, n'a pas lieu seulement pour les quatre cas simples que nous traitons dans ce paragraphe, mais il est aisé de reconnaître qu'elle se produira bien effectivement, quelle que soit la valeur entière et positive de l'exposant α, pour les deux expressions générales ci-dessus calculées $J_z^{(\alpha)}$ (136) et $I_z^{(\alpha)}$ (148), après que l'on y aura remplacé les variables provisoires p, q, r par leurs valeurs de définition (88).

En effet, pour la première tout d'abord, il ressort à première vue de la définition même du déterminant (135) qui en fournit les différents termes, et dans lequel les divers exposants sont alors tous impairs, que les mêmes circonstances que nous venons de spécifier à l'instant à propos du déterminant ci-dessus envisagé $H_z^{(1)}$ se reproduiront identiquement, et conduiront dès lors à la même conclusion finale.

Quant à l'autre formule (148), il faut pour le voir examiner quelle sera, relativement à α, la parité des différentes puissances des variables p, q, ou r qui entreront en facteurs, respectivement avec $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$, ou $\sqrt{R}$, dans chacun des termes du développe-

En introduisant alors cette simplification dans les écritures, et permutant ensuite, ainsi que nous l'avons expliqué, à la fois les deux groupes (u, v, w) et (l, m, n) ou (a^2, b^2, c^2), nous aurons donc

---

ment définitif de cette quantité $I_x^{(\alpha)}$ (148), après que l'on y aura remplacé, en premier lieu, chaque symbole $H_x^{(i)}$ par la seconde expression (145), puis cela fait, semblablement chaque symbole T_i par son développement (133) ou (134), et enfin de même chaque quantité $\overline{T}_n$ ainsi introduite par sa valeur de définition (127).

Or, d'après cette dernière définition (127), ces puissances sont dans la quantité $\overline{T}_n$ de parité contraire à celle de l'indice n, et comme l'indice de toutes lesdites quantités $\overline{T}_n$ qui composent les différents termes des seconds membres des formules (132bis) ou (133bis), desquelles nous avons déduit dans les deux cas l'expression de la quantité T_α, est précisément de même parité que α, il s'ensuit donc que le développement définitif de T_α ne contiendra comme facteurs de $\sqrt{\overline{T}}$ que des puissances de t de parité contraire à celle de α. Cela posé, comme d'autre part l'indice i de tous les déterminants $H_x^{(i)}$ qui composent les différents termes du développement (148) de $I_x^{(\alpha)}$ sont de même parité que α, il résulte donc de ce que nous venons de voir, et de la forme des éléments des deux dernières colonnes de la seconde expression (145), que pour toutes ces différentes quantités $H_x^{(i)}$ les puissances en question de p, q, r seront de parité contraire à celle de α, et par conséquent, l'expression proposée $I_x^{(\alpha)}$ ne contiendra elle-même, comme facteurs des quantités $\sqrt{\overline{P}}, \sqrt{\overline{Q}}$, ou $\sqrt{\overline{R}}$, que des puissances, de parité contraire à α, de la variable correspondante p, q, ou r.

Cette conclusion étant acquise, on reconnaît à présent sans peine, en examinant séparément les deux hypothèses relatives à la parité de α : que si α est pair, d'une part, le coefficient constant qui figure en tête du développement (148), savoir $\left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha$ n'introduira pas de double signe, et d'autre part que, chacun des facteurs qui composeront ce développement étant, d'après ce que nous venons de voir (abstraction faite des limites) de la forme $t^{2\nu+1}\sqrt{\overline{T}} = t^{2\nu}.t\sqrt{\overline{T}}$ pour $t = p, q, r$, il résulte immédiatement des valeurs calculées ci-dessus (152), que le double signe n'apparaîtra ni dans l'un ni dans l'autre des deux facteurs d'une expression semblable, en sorte qu'il ne pourra en exister aucun non plus dans l'expression envisagée (148) elle-même; et que, si au contraire α est impair, d'une part le double signe sera introduit en tête du développement par le coefficient susmentionné $\left(\frac{\mp i}{ln}\right)^\alpha$, et que d'autre part chacun des déterminants partiels dans lesquels se décomposera chaque déterminant $H_x^{(i)}$, ainsi que nous l'avons expliqué (page 523), présentera les mêmes caractères que le déterminant considéré ci-dessus $H_x^{(1)}$, c'est-à-dire que le double signe y apparaîtra avec la même signification dans chaçun des éléments soit de la seconde, soit de la troisième, de ses lignes, car ces différents éléments appartiendront tous alors, pour $t = q$ ou $t = r$, au type $t^{2\nu} = t^{2\nu-1}.t\sqrt{\overline{T}}$, et dès lors le second facteur n'introduisant encore, comme tout à l'heure, aucun double signe, le premier facteur, dans lequel t tient ainsi lieu de l'expression (88) de q ou de r, fera apparaître au contraire le même double signe devant tous les éléments de l'une ou de l'autre de ces deux lignes.

L'on aperçoit donc clairement ainsi que, dans ce second cas, toutes les mêmes circonstances déjà rencontrées deux fois ci-dessus, à propos de l'expression $I_x^{(1)}$ (166), et au commencement de cette note à propos de l'expression $J_x^{(\alpha)}$ (136), se reproduiront encore une fois identiquement, et par conséquent la seconde expression $I_x^{(\alpha)}$ (148) ne renfermera, en fin de compte, elle non plus, aucun double signe, quelle que soit la parité de l'exposant α.

trouvé de cette façon pour les trois sommes envisagées, savoir

$$(168)\qquad \mathrm{I}_x^{(1)} = \mathbf{S}\, x\, d\mathfrak{M}, \qquad \mathrm{I}_y^{(1)} = \mathbf{S}\, y\, d\mathfrak{M}, \qquad \mathrm{I}_z^{(1)} = \mathbf{S}\, z\, d\mathfrak{M},$$

les trois expressions très simples s'appliquant à tous les cas

$$(169)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{I}_x^{(1)} = \dfrac{i\mathrm{D}}{8nl}\left|\begin{array}{lll}
\left[\arcsin\left(\dfrac{il}{m}\,\mathrm{cn}\,u\right)\right]_1^2, & nl\,(\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2, & nl^3\,(\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2 \\
\left[\arcsin(\mathrm{sn}\,v)\right]_1^2, & m^2\,(\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)_1^2, & l^2m^2\,(\mathrm{dn}^2v\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)_1^2 \\
\left[\arcsin\left(\dfrac{-in}{m}\,\mathrm{sn}\,w\right)\right]_1^2, & min(\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{sn}\,w)_1^2, & m(in)^3(\mathrm{cn}^2w\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{sn}\,w)_1^2
\end{array}\right|, \\[2ex]
\mathrm{I}_y^{(1)} = \dfrac{i\mathrm{D}}{8lm}\left|\begin{array}{lll}
\left[\arcsin\left(\dfrac{im}{n}\,\mathrm{cn}\,v\right)\right]_1^2, & lm\,(\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2, & lm^3\,(\mathrm{sn}^2v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2 \\
\left[\arcsin(\mathrm{sn}\,w)\right]_1^2, & n^2\,(\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w)_1^2, & m^2n^2\,(\mathrm{dn}^2w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w)_1^2 \\
\left[\arcsin\left(\dfrac{-il}{n}\,\mathrm{sn}\,u\right)\right]_1^2, & nil(\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,u)_1^2, & n(il)^3\,(\mathrm{cn}^2u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,u)_1^2
\end{array}\right|, \\[2ex]
\mathrm{I}_z^{(1)} = \dfrac{i\mathrm{D}}{8mn}\left|\begin{array}{lll}
\left[\arcsin\left(\dfrac{in}{l}\,\mathrm{cn}\,w\right)\right]_1^2, & mn\,(\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2, & mn^3\,(\mathrm{sn}^2w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2 \\
\left[\arcsin(\mathrm{sn}\,u)\right]_1^2, & l^2\,(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2, & n^2l^2\,(\mathrm{dn}^2u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2 \\
\left[\arcsin\left(\dfrac{-im}{l}\,\mathrm{sn}\,v\right)\right]_1^2, & lim\,(\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2, & l(im)^3\,(\mathrm{cn}^2v\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2
\end{array}\right|,
\end{array}\right.$$

formules dont on démontrerait la généralité, quant à la première, exactement par le même raisonnement, déjà exposé dans l'article précédent à l'occasion de la masse; et celle-là subsistant dès lors dans tous les cas, il est bien clair que les deux autres qui en dérivent par la permutation des trois coordonnées présenteront également le même caractère de généralité.

Pour les vérifier, appliquant encore la première, par exemple, au même volume que tout à l'heure, c'est-à-dire à l'octant de l'ellipsoïde compris dans l'angle trièdre des coordonnées planes positives, volume auquel correspondent, avons-nous dit,

les limites 0 et K pour u, 0 et K′ pour v, w_0 et 0 pour w, lesquelles donneront manifestement cette fois, en particulier,

$$\left\{\begin{array}{ll} nl\,(\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2 = -nl, & nl^2\,(\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2 = 0, \\ m^2\,(\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)_1^2 = 0, & l^2m^2\,(\mathrm{dn}^2 v\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)_1^2 = 0, \\ \multicolumn{2}{l}{[\arcsin(\mathrm{sn}\,v)]_1^2 = \arcsin(\mathrm{sn}\,\mathrm{K}') - \arcsin(\mathrm{sn}\,0) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2},} \\ \multicolumn{2}{r}{m\,(in)^3\,(\mathrm{cn}^2 w\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{sn}\,w)_1^2 = -m\,(in)^3\,\mathrm{cn}^2 w_0\,\mathrm{dn}\,w_0\,\mathrm{sn}\,w_0,} \end{array}\right.$$

la formule en question (169) donnera dans cette hypothèse en n'écrivant encore que les seuls termes utiles, pour la première des sommes (168), l'expression suivante

$$(170)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{I}_x^{(1)} = \dfrac{i\mathrm{D}}{8nl}\begin{vmatrix} \dots, & -nl, & 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 0, & 0 \\ \dots, & \dots, & -m\,(in)^3\,\mathrm{cn}^2 w_0\,\mathrm{dn}\,w_0\,\mathrm{sn}\,w_0 \end{vmatrix} \\ = \dfrac{i\mathrm{D}}{8nl}\cdot nl\dfrac{\pi}{2}\cdot(-m)\,(in)^3\,\mathrm{cn}^2 w_0\,\mathrm{dn}\,w_0\,\mathrm{sn}\,w_0 \\ = \dfrac{\mathrm{D}\pi}{16}(-mn^3\,\mathrm{cn}^2 w_0\,\mathrm{dn}\,w_0\,\mathrm{sn}\,w_0), \end{array}\right.$$

dans laquelle le produit entre parenthèses peut être calculé très aisément à l'aide des résultats déjà acquis à l'occasion de l'exemple précédent ; car, si l'on se rappelle, d'une part, que la fonction $\mathrm{cn}\,w$ reste constamment positive, quelle que soit la coordonnée w (pp. 440-441), et d'autre part, que le module k est également positif par définition, comme les valeurs (159) et (3) donneront dans ces conditions, sans ambiguïté de signe, eu égard à la définition (7) de n,

$$\mathrm{cn}\,w_0 = \frac{ia}{n} = \frac{ia}{i\sqrt{a^2-c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}, \qquad k = \frac{il}{n} = \frac{i\sqrt{a^2-b^2}}{i\sqrt{a^2-c^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

l'on trouvera donc, en tenant compte en outre de la valeur précédemment obtenue (164), et toujours sans aucune incertitude

quant aux signes, la suite d'égalités

$$-mn^3 \operatorname{cn}^2 w_0 \operatorname{dn} w_0 \operatorname{sn} w_0 = -in \operatorname{cn} w_0 . \frac{lmn}{\frac{il}{n}} \operatorname{cn} w_0 \operatorname{dn} w_0 \operatorname{sn} w_0$$

$$= -in . \operatorname{cn} w_0 . \frac{\sqrt{G}}{k} \operatorname{sn} w_0 \operatorname{cn} w_0 \operatorname{dn} w_0 = -in . \frac{ia}{n} . abc = a^2bc,$$

de telle sorte qu'en remettant cette dernière valeur dans l'expression en question (170), celle-ci se réduira à la valeur

$$(I_x^{(1)}) = \left(\mathbf{S}\, x d\mathfrak{M}\right) = \frac{D\pi}{16} a^2bc,$$

qui est bien effectivement de nouveau, *en grandeur et en signe*, celle à laquelle il nous fallait arriver.

C. (*Moments principaux d'inertie*). Ces quantités n'étant autre chose que les sommes deux à deux des trois intégrales triples du premier type (96) pour l'exposant $\alpha = 2$ et relatives à chacun des axes coordonnés, il nous suffira par conséquent de calculer la seule somme $I_x^{(2)}$ pour le volume convenu.

A cet effet, les mêmes formules déjà considérées tout à l'heure (148), (145), et (144) nous donneront, pour cette hypothèse, en ayant encore égard, quant à la première, à la convention admise relativement au dernier terme de cette première formule pour le cas de α pair,

$$(171) \qquad I_x^{(2)} = \left(\frac{\mp i}{ln}\right)^2 \frac{D}{3.5}\left(H_x^{(2)} - l^2n^2 \Delta_x^{(0)}\right) = \frac{D}{3.5}\left(\frac{-H_x^{(2)}}{l^2n^2} + \Delta_x^{(0)}\right),$$

$$H_x^{(2)} = \begin{vmatrix} P_2, & (p\sqrt{P})_1^2, & (p^3\sqrt{P})_1^2 \\ Q_2, & (q\sqrt{Q})_1^2, & (q^3\sqrt{Q})_1^2 \\ R_2, & (r\sqrt{R})_1^2, & (r^3\sqrt{R})_1^2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x^{(0)} = \begin{vmatrix} P_0, & P_2, & -(p^3\sqrt{P})_1^2 \\ Q_0, & Q_2, & -(q^3\sqrt{Q})_1^2 \\ R_0, & R_2, & -(r^3\sqrt{R})_1^2 \end{vmatrix},$$

expressions dans lesquelles on aura, toujours sans ambiguïté de signe, en vertu des valeurs (88) et de celles (152) déjà calculées

en vue d'un exemple précédent,

$$p^3\sqrt{P}=p^2.p\sqrt{P}=\quad l^2\mathrm{sn}^2 u\,.\,nl^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u=\quad nl^4\,\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u,$$
$$q^3\sqrt{Q}=q^2.q\sqrt{Q}=\quad l^2\mathrm{dn}^2 v\,.\,lm^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v=\quad l^3m^2\,\mathrm{dn}^3 v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v,$$
$$r^3\sqrt{R}=r^2.r\sqrt{R}=(in)^2\,\mathrm{cn}^2 w\,.\,mn^2\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w=-mn^4\mathrm{cn}^3 w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w,$$

de telle sorte qu'en remettant ces dernières valeurs, en même temps que celles (124), (125), et (152) dans les deux déterminants précédents, ceux-ci deviendront

$$(172)\quad\left\{\begin{aligned}
H_x^{(2)}&=\begin{vmatrix}
-n\left[Z(u)\right]_1^2, & nl^2(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2, & nl^4(\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2\\
l(v)_1^2-l\left[Z(v)\right]_1^2, & lm^2(\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2, & l^3m^2(\mathrm{dn}^3 v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2\\
-\frac{n^2}{m}(w)_1^2-m\left[Z(w)\right]_1^2, & mn^2(\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2, & -mn^4(\mathrm{cn}^3 w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2
\end{vmatrix},\\
\Delta_x^{(0)}&=\begin{vmatrix}
\frac{1}{n}(u)_1^2, & -n\left[Z(u)\right]_1^2, & -nl^4(\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2\\
\frac{1}{l}(v)_1^2, & l(v)_1^2-l\left[Z(v)\right]_1^2, & -l^3m^2(\mathrm{dn}^3 v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2\\
\frac{1}{m}(w)_1^2, & -\frac{n^2}{m}(w)_1^2-m\left[Z(w)\right]_1^2, & mn^4(\mathrm{cn}^3 w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2
\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Dans le premier de ces déterminants, l'on fera apparaître le coefficient constant $G^{\frac{3}{2}}=(lmn)^3$ en divisant les trois lignes respectivement par les facteurs nl^2, lm^2, mn^2, et si l'on y change en même temps tous les signes de la première colonne, il prendra par là la forme

$$(173)\qquad H_x^{(2)}=-l^2m^2n^2.\sqrt{G}\,.\,H_x,$$

H_x désignant alors, pour abréger, le premier des trois déterminants suivants, les deux autres étant déduits de celui-là par permutation circulaire :

$$
(174)\quad \begin{cases}
H_x = \begin{vmatrix}
\frac{1}{l^2}\left[Z(u)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2, & l^2(\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2 \\
-\frac{1}{m^2}(v)_1^2+\frac{1}{m^2}\left[Z(v)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2, & l^2(\mathrm{dn}^3 v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2 \\
\frac{1}{m^2}(w)_1^2+\frac{1}{n^2}\left[Z(w)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2, & -n^2(\mathrm{cn}^3 w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2
\end{vmatrix}, \\[2ex]
H_y = \begin{vmatrix}
\frac{1}{m^2}\left[Z(v)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2, & m^2(\mathrm{sn}^3 v\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)_1^2 \\
-\frac{1}{n^2}(w)_1^2+\frac{1}{n^2}\left[Z(w)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2, & m^2(\mathrm{dn}^3 w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{sn}\,w)_1^2 \\
\frac{1}{n^2}(u)_1^2+\frac{1}{l^2}\left[Z(u)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2, & -l^2(\mathrm{cn}^3 u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2
\end{vmatrix}, \\[2ex]
H_z = \begin{vmatrix}
\frac{1}{n^2}\left[Z(w)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2, & n^2(\mathrm{sn}^3 w\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{cn}\,w)_1^2 \\
-\frac{1}{l^2}(u)_1^2+\frac{1}{l^2}\left[Z(u)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2, & n^2(\mathrm{dn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u)_1^2 \\
\frac{1}{l^2}(v)_1^2+\frac{1}{m^2}\left[Z(v)\right]_1^2, & (\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2, & -m^2(\mathrm{cn}^3 v\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2
\end{vmatrix}.
\end{cases}
$$

Dans le second des mêmes déterminants (172), il sera tout aussi facile de faire apparaître en facteur la constante $\sqrt{G} = lmn$, en divisant chacune des trois lignes respectivement par les facteurs n, l, m ; puis, cette opération étant faite en changeant en même temps, comme tout à l'heure, tous les signes de la dernière colonne, il se décomposera alors en deux autres de la façon suivante

$$
(175)\left\{
\begin{aligned}
\Delta_x^{(0)} &= -lmn.\begin{vmatrix}
\frac{1}{n^2}(u)_1^2, & -[Z(u)]_1^2, & l^4(\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2 \\
\frac{1}{l^2}(v)_1^2, & (v)_1^2-[Z(v)]_1^2, & l^2m^2(\mathrm{dn}^3 v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2 \\
\frac{1}{m^2}(w)_1^2, & -\frac{n^2}{m^2}(w)_1^2-[Z(w)]_1^2, & -n^4(\mathrm{cn}^3 w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2
\end{vmatrix} \\
&= -\sqrt{G}\left[\begin{vmatrix}
\frac{1}{n^2}(u)_1^2, & 0, & l^4(\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2 \\
\frac{1}{l^2}(v)_1^2, & (v)_1^2, & l^2m^2(\mathrm{dn}^3 v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2 \\
\frac{1}{m^2}(w)_1^2, & -\frac{n^2}{m^2}(w)_1^2, & -n^4(\mathrm{cn}^3 w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2
\end{vmatrix}\right. \\
&\qquad \left. - \begin{vmatrix}
\frac{1}{n^2}(u)_1^2, & [Z(u)]_1^2, & l^4(\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2 \\
\frac{1}{l^2}(v)_1^2, & [Z(v)]_1^2, & l^2m^2(\mathrm{dn}^3 v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2 \\
\frac{1}{m^2}(w)_1^2, & [Z(w)]_1^2, & -n^4(\mathrm{cn}^3 w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2
\end{vmatrix}\right] = -\sqrt{G}(G_x - K_x),
\end{aligned}
\right.
$$

en désignant encore, pour abréger, par G_x et K_x les deux nouveaux déterminants ainsi engendrés.

Or, comme le premier ne diffère que par la troisième colonne seulement du déterminant H_0 (154), rencontré ci-dessus à l'occasion du calcul de la masse, son développement pourra être obtenu très rapidement en le déduisant de celui (156) dudit déterminant H_0, récrit à cet effet, au préalable, ainsi qu'il suit

$$
\begin{aligned}
H_0 = \frac{1}{l^2}(v)_1^2(w)_1^2 . l^2(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2 + \frac{1}{m^2}(w)_1^2(u)_1^2 . m^2(\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2 \\
+ \frac{1}{n^2}(u)_1^2\,(v)_1^2 . n^2(\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2 ;
\end{aligned}
$$

car, sous cette forme, le deuxième facteur de chacun des termes étant précisément l'un des éléments de la troisième colonne de ce déterminant H_0, il suffira évidemment de substituer à chacun l'élément correspondant de la troisième colonne de G_x, pour avoir le développement de ce dernier déterminant, opération qui donnera pour résultat

$$G_x = \frac{1}{l^2}(v)_1^2(w)_1^2 . l^4(\mathrm{sn}^3 u \,\mathrm{dn}\, u \,\mathrm{cn}\, u)_1^2 + \frac{1}{m^2}(w)_1^2(u)_1^2 . l^2 m^2(\mathrm{dn}^3 v \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{sn}\, v)_1^2$$
$$+ \frac{1}{n^2}(u)_1^2(v)_1^2 . (-n^4)(\mathrm{cn}^3 w \,\mathrm{sn}\, w \,\mathrm{dn}\, w)_1^2$$

c'est-à-dire simplement la première des trois expressions, déduites encore les unes des autres par permutation circulaire :

$$(176)\left\{\begin{aligned} G_x &= (v)_1^2 (w)_1^2 . l^2 (\mathrm{sn}^3 u \,\mathrm{dn}\, u \,\mathrm{cn}\, u)_1^2 + (w)_1^2 (u)_1^2 . l^2 (\mathrm{dn}^3 v \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{sn}\, v)_1^2 \\ &\quad - (u)_1^2 (v)_1^2 . n^2 (\mathrm{cn}^3 w \,\mathrm{sn}\, w \,\mathrm{dn}\, w)_1^2, \\ G_y &= (w)_1^2 (u)_1^2 . m^2 (\mathrm{sn}^3 v \,\mathrm{dn}\, v \,\mathrm{cn}\, v)_1^2 + (u)_1^2 (v)_1^2 . m^2 (\mathrm{dn}^3 w \,\mathrm{cn}\, w \,\mathrm{sn}\, w)_1^2 \\ &\quad - (v)_1^2 (w)_1^2 . l^2 (\mathrm{cn}^3 u \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{dn}\, u)_1^2, \\ G_z &= (u)_1^2 (v)_1^2 . n^2 (\mathrm{sn}^3 w \,\mathrm{dn}\, w \,\mathrm{cn}\, w)_1^2 + (v)_1^2 (w)_1^2 . n^2 (\mathrm{dn}^3 u \,\mathrm{cn}\, u \,\mathrm{sn}\, u)_1^2 \\ &\quad - (w)_1^2 (u)_1^2 . m^2 (\mathrm{cn}^3 v \,\mathrm{sn}\, v \,\mathrm{dn}\, v)_1^2 . \end{aligned}\right.$$

Après avoir déduit enfin, toujours par le même procédé, de l'expression ci-dessus du second des déterminants partiels (175), que nous sommes convenu d'appeler K_x, les trois expressions

$$
(177)\quad\left\{
\begin{aligned}
K_x &= \left|
\begin{array}{lll}
\frac{1}{n^2}(u)_1^2, & [Z(u)]_1^2, & l^4(\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)_1^2 \\
\frac{1}{l^2}(v)_1^2, & [Z(v)]_1^2, & l^2m^2(\mathrm{dn}^3 v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,v)_1^2 \\
\frac{1}{m^2}(w)_1^2, & [Z(w)]_1^2, & -n^4(\mathrm{cn}^3 w\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2
\end{array}
\right|, \\
K_y &= \left|
\begin{array}{lll}
\frac{1}{l^2}(v)_1^2, & [Z(v)]_1^2, & m^4(\mathrm{sn}^3 v\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,v)_1^2 \\
\frac{1}{m^2}(w)_1^2, & [Z(w)]_1^2, & m^2n^2(\mathrm{dn}^3 w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{sn}\,w)_1^2 \\
\frac{1}{n^2}(u)_1^2, & [Z(u)]_1^2, & -l^4(\mathrm{cn}^3 u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2
\end{array}
\right|, \\
K_z &= \left|
\begin{array}{lll}
\frac{1}{m^2}(w)_1^2, & [Z(w)]_1^2, & n^4(\mathrm{sn}^3 w\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{cn}\,w)_1^2 \\
\frac{1}{n^2}(u)_1^2, & [Z(u)]_1^2, & n^2l^2(\mathrm{dn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u)_1^2 \\
\frac{1}{l^2}(v)_1^2, & [Z(v)]_1^2, & -m^4(\mathrm{cn}^3 v\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2
\end{array}
\right|,
\end{aligned}
\right.
$$

si l'on remet à la fois dans le dernier membre des égalités (171), à la place des quantités $H_x^{(2)}$ et $\Delta_x^{(0)}$ leurs valeurs (173) et (175), l'on voit que les sommes cherchées se présenteront alors sous la forme des trois expressions (*)

$$
(178)\quad\left\{
\begin{aligned}
I_x^{(2)} &= \mathbf{S}\,x^2 d\mathfrak{M} = \frac{D\sqrt{G}}{3.5}\left(-G_x + m^2 H_x + K_x\right), \\
I_y^{(2)} &= \mathbf{S}\,y^2 d\mathfrak{M} = \frac{D\sqrt{G}}{3.5}\left(-G_y + n^2 H_y + K_y\right), \\
I_z^{(2)} &= \mathbf{S}\,z^2 d\mathfrak{M} = \frac{D\sqrt{G}}{3.5}\left(-G_z + l^2 H_z + K_z\right),
\end{aligned}
\right.
$$

(*) Il n'y a pas lieu d'être surpris ici de la dissymétrie de ces expressions par rapport

dans lesquelles les différents symboles qui figurent au second membre entre parenthèses tiennent lieu, pour abréger, des quantités (176), (174), et (177), et qui, se trouvant ainsi entièrement calculées, fourniront immédiatement, par leurs sommes deux à deux, les expressions demandées des moments principaux d'inertie relatifs au solide envisagé.

Vérifions encore ces formules, en comparant avec les résultats connus de la Mécanique, à l'aide des calculs déjà réalisés à l'occasion d'une vérification précédente, les expressions qu'elles fournissent pour le huitième du volume total de l'ellipsoïde (158).

A cet effet, les limites de l'intégration, qui seront toujours celles (160), donnant pour les mêmes raisons que précédemment, comme on le voit tout de suite,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\mathrm{sn}^3 u \,\mathrm{dn}\, u \,\mathrm{cn}\, u)_1^2 = 0, & (\mathrm{dn}^3 v \,\mathrm{cn}\, v \,\mathrm{sn}\, v)_1^2 = 0, \\ & (\mathrm{cn}^3 w \,\mathrm{sn}\, w \,\mathrm{dn}\, w)_1^2 = -\mathrm{cn}^3 w_0 \,\mathrm{sn}\, w_0 \,\mathrm{dn}\, w_0, \end{array} \right.$$

engendreront, lorsqu'on les introduira dans la première formule de chacun des groupes (176), (174), et (177), en ne marquant encore une fois que les seuls termes utiles, les valeurs suivantes, qui s'écriront alors très simplement, à l'aide des quantités analogues déjà rencontrées dans un calcul antérieur (pp. 532-536),

---

aux coordonnées u, v, w qui ressort, tant des définitions (176), (174), et (177), de chacun des trois termes dont elles se composent, que de la forme de ces égalités (178) elles-mêmes. En effet, la définition même de ces quantités, ou les seconds membres de ces égalités, montrant, *a priori*, qu'elles ne sauraient être symétriques par rapport aux trois coordonnées rectilignes, il est bien clair que cette symétrie ne peut exister dès lors par rapport aux coordonnées thermométriques, puisque, nos formules de transformation (10) ou (11) étant complètement symétriques par rapport aux deux systèmes, la symétrie d'un groupe quelconque de formules par rapport à l'un de ces systèmes entraînera forcément la symétrie de ces mêmes formules par rapport à l'autre. Et la même observation s'appliquerait avec la même raison aux résultats précédemment acquis (169).

La considération de l'homogénéité, si elle n'était pas observée, pourrait donc seule, en pareil cas, infirmer *a priori* l'exactitude de ce résultat. Or les formules en question (178) sont bien manifestement homogènes, chacun des premiers et derniers termes dans les parenthèses étant du second degré par rapport aux quantités linéaires a, b, c, ou l, m, n, et les termes du milieu étant au contraire du degré 0 par rapport aux mêmes quantités.

$$\left\{\begin{aligned}
(\mathrm{G}_x) &= \quad \mathrm{KK}'.\, n^2 \,\mathrm{cn}^3 w_0 \,\mathrm{dn}\, w_0 \,\mathrm{sn}\, w_0 = -\, n^2 \,\mathrm{cn}^2 w_0 .(\mathrm{H}_0),\\
(\mathrm{H}_x) &= \begin{vmatrix} \ldots\ldots, & 0\ , & 0 \\ \ldots\ldots, & 0\ , & 0 \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0,\\
(\mathrm{K}_x) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{n^2}\mathrm{K}\ , & \mathrm{J}\ , & 0 \\ \frac{1}{l^2}\mathrm{K}'\ , & \mathrm{J}'\ , & 0 \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & n^4.\,\mathrm{cn}^3 w_0 \,\mathrm{sn}\, w_0 \,\mathrm{dn}\, w_0 \end{vmatrix}\\
&= \left(\frac{1}{n^2}\mathrm{K}.\mathrm{J}' - \frac{1}{l^2}\mathrm{K}'.\mathrm{J}\right).\, n^4 \,\mathrm{cn}^3 w_0 \,\mathrm{sn}\, w_0 \,\mathrm{dn}\, w_0 = -\, n^2 \mathrm{cn}^2 w_0 .(\mathrm{K}_0),
\end{aligned}\right.$$

les symboles (H_0) et (K_0) étant de nouveau les quantités ci-dessus (161).

En remettant donc ces trois valeurs dans la première des formules (178) que nous voulons vérifier, puis tenant compte successivement de l'expression (157) obtenue plus haut pour la masse du corps $\mathfrak{M}$, ainsi que de la valeur (159) de $\mathrm{cn}^2 w_0$, nous trouverons donc, selon le mode de notation convenu, pour le huitième de l'ellipsoïde,

$$(\mathrm{I}_x^{(2)}) = \left(\mathrm{S}_{x^2 d\mathfrak{M}}\right) = \frac{\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{G}}}{3.5}\left(-\,(\mathrm{G}_x) + (\mathrm{K}_x)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{G}}}{3}\left(-\,(\mathrm{H}_0) + (\mathrm{K}_0)\right).(-\, n^2 \mathrm{cn}^2 w_0) = \frac{1}{5}(\mathfrak{M}).a^2,$$

c'est-à-dire, en permutant les trois sommes

$$\left(\mathrm{S}_{x^2 d\mathfrak{M}}\right) = (\mathfrak{M})\,\frac{a^2}{5},\quad \left(\mathrm{S}_{y^2 d\mathfrak{M}}\right) = (\mathfrak{M})\,\frac{b^2}{5},\quad \left(\mathrm{S}_{z^2 d\mathfrak{M}}\right) = (\mathfrak{M})\,\frac{c^2}{5}.$$

et par conséquent, pour les trois moments principaux d'inertie relatifs au même solide, les trois expressions

$$\left(\mathbf{S}_{(y^2+z^2)\,d\mathfrak{M}}\right)=(\mathfrak{M})\,\frac{b^2+c^2}{5},\qquad \left(\mathbf{S}_{(z^2+x^2)\,d\mathfrak{M}}\right)=(\mathfrak{M})\,\frac{c^2+a^2}{5},$$
$$\left(\mathbf{S}_{(x^2+y^2)\,d\mathfrak{M}}\right)=(\mathfrak{M})\,\frac{a^2+b^2}{5},$$

ce qui est bien encore cette fois, *en grandeur et en signe*, le résultat auquel on devait arriver.

D. (*Plans principaux d'inertie*). Nous possédons ainsi déjà, par le calcul que nous venons d'effectuer, les coefficients des trois termes carrés de l'ellipsoïde d'inertie du solide considéré, relatif à l'origine des coordonnées. Il ne nous reste donc plus, pour avoir son équation, et par suite pour pouvoir déterminer analytiquement, comme nous l'avons dit, ses trois plans principaux, qu'à posséder de même les trois coefficients des termes rectangles de cette même équation (149), c'est-à-dire les trois sommes du second type (96), pour l'exposant $\alpha = 0$.

Introduisant donc cette hypothèse dans la formule (99), comme l'on aura alors $P^\alpha = Q^\alpha = R^\alpha = 1$, celle-ci se réduira simplement à la suivante, chaque intégrale étant prise entre les limites correspondantes à celles données de p, q, r,

$$J_x^{(0)}=\frac{\pm iD}{m\sqrt{G}}\begin{vmatrix}\int dp, & \int p^2dp, & \int p^4dp\\ \int dq, & \int q^2dq, & \int q^4dq\\ \int dr, & \int r^2dr, & \int r^4dr\end{vmatrix}=\frac{\pm iD}{m\sqrt{G}}\begin{vmatrix}(p)_1^2, & \frac{1}{3}(p^3)_1^2, & \frac{1}{5}(p^5)_1^2\\ (q)_1^2, & \frac{1}{3}(q^3)_1^2, & \frac{1}{5}(q^5)_1^2\\ (r)_1^2, & \frac{1}{3}(r^3)_1^2, & \frac{1}{5}(r^5)_1^2\end{vmatrix},$$

le signe supérieur étant, comme nous l'avons expliqué, expressément relatif à l'hypothèse de la concordance des signes des coordonnées v et w, et le signe inférieur à l'hypothèse inverse (pp. 474-475). Et dès lors, en remettant à la place de p, q, r leurs

valeurs (88), et raisonnant alors de nouveau, exactement comme nous l'avons déjà fait à propos des formules (169) relatives au centre de gravité, l'on reconnaîtra sans peine encore qu'aucun double signe ne subsistera en fin de compte dans cette formule non plus que dans ses homologues ; de telle sorte, qu'en empruntant alors un facteur i à chaque élément de la dernière ligne, l'on aura dans tous les cas pour les sommes demandées les trois expressions définitives

$$
(179)\left\{
\begin{aligned}
J_x^{(0)} &= \mathbf{S}\, yz\, d\mathfrak{M} = \frac{-1}{3.5}\,\frac{D}{m\sqrt{G}}
\begin{vmatrix}
l\,(\mathrm{sn}\,u)_1^2, & l^3\,(\mathrm{sn}^3\,u)_1^2, & l^5\,(\mathrm{sn}^5 u)_1^2 \\
l\,(\mathrm{dn}\,v)_1^2, & l^3\,(\mathrm{dn}^3\,v)_1^2, & l^5\,(\mathrm{dn}^5\,v)_1^2 \\
n\,(\mathrm{cn}\,w)_1^2, & -n^3\,(\mathrm{cn}^3\,w)_1^2, & n^5(\mathrm{cn}^5 w)_1^2
\end{vmatrix}, \\
J_y^{(0)} &= \mathbf{S}\, zx\, d\mathfrak{M} = \frac{-1}{3.5}\,\frac{D}{n\sqrt{G}}
\begin{vmatrix}
m\,(\mathrm{sn}\,v)_1^2, & m^3\,(\mathrm{sn}^3\,u)_1^2, & m^5\,(\mathrm{sn}^5\,v)_1^2 \\
m\,(\mathrm{dn}\,w)_1^2, & m^3(\mathrm{dn}^3 w)_1^2, & m^5(\mathrm{dn}^5 w)_1^2 \\
l\,(\mathrm{cn}\,u)_1^2, & -l^3\,(\mathrm{cn}^3 u)_1^2, & l^5\,(\mathrm{cn}^5\,u)_1^2
\end{vmatrix}, \\
J_z^{(0)} &= \mathbf{S}\, xy\, d\mathfrak{M} = \frac{-1}{3.5}\,\frac{D}{l\sqrt{G}}
\begin{vmatrix}
n\,(\mathrm{sn}\,w)_1^2, & n^3\,(\mathrm{sn}^3\,w)_1^2, & n^5\,(\mathrm{sn}^5 w)_1^2 \\
n\,(\mathrm{dn}\,u)_1^2, & n^3\,(\mathrm{dn}^3\,u)_1^2, & n^5(\mathrm{dn}^5\,u)_1^2 \\
m\,(\mathrm{cn}\,v)_1^2, & -m^3(\mathrm{cn}^3\,v)_1^2, & m^5(\mathrm{cn}^5 w)_1^2
\end{vmatrix},
\end{aligned}
\right.
$$

qui complètent, pour le solide envisagé, la détermination de l'ellipsoïde d'inertie (149).

Cette dernière détermination n'étant plus, comme les précédentes, l'une de celles que l'on a coutume d'effectuer dans les cours d'Analyse ou de Mécanique pour la huitième partie de l'ellipsoïde, le procédé de vérification dont nous avons usé pour celles-là nous échappe cette fois ; mais, à défaut de vérification proprement dite, un moyen de contrôle qui n'est pas sans valeur consiste dans ce fait que, étant étendues à la totalité de l'ellipsoïde, les trois sommes en question devront évidemment se réduire simultanément à zéro, attendu que les trois plans coordonnés étant alors des plans de symétrie pour le solide considéré, ces plans seront donc précisément les plans principaux d'inertie de ce même solide, en sorte que l'ellipsoïde d'inertie (149) devra,

dans cette hypothèse, se trouver rapporté de lui-même à ses plans principaux.

Or, l'on aperçoit immédiatement que cette condition est bien effectivement remplie, attendu que les limites

$$u_1 = -K, \quad u_2 = +K, \quad v_1 = -K', \quad v_2 = +K', \quad w_1 = -w_0, \quad w_2 = +w_0,$$

qui correspondent à cette nouvelle hypothèse, donneront

$$\left\{\begin{array}{lllll} \operatorname{cn} u_1 = 0, & \operatorname{cn} u_2 = 0, & (\operatorname{cn} u)_1^2 = 0, & (\operatorname{cn}^3 u)_1^2 = 0, & (\operatorname{cn}^5 u)_1^2 = 0, \\ \operatorname{dn} u_1 = k_1, & \operatorname{dn} u_2 = k_1, & (\operatorname{dn} u)_1^2 = 0, & (\operatorname{dn}^3 u)_1^2 = 0, & (\operatorname{dn}^5 u)_1^2 = 0, \end{array}\right.$$

et de même en changeant u en v dans ces résultats; d'où il suit que les deux premiers déterminants (179) ont chacun une ligne dont tous les éléments sont nuls, et le troisième deux lignes qui présentent la même particularité. Et comme cette circonstance se produira quelles que soient les limites $\pm w_0$ de la troisième coordonnée w, l'on découvre par là même cette propriété intéressante des plans coordonnés de demeurer des plans principaux d'inertie pour toute écorce ou croûte ellipsoïdale, dont les deux surfaces, intérieure et extérieure, appartiendront à la fois à la troisième famille coordonnée, ou, ce qui revient au même, seront homofocales entre elles.

Enfin, pour clore cette série d'applications, le Lecteur voudra bien remarquer que toutes les déterminations qui font l'objet des développements précédents ont été obtenues sans aucune incertitude sur les signes, à aucun instant des calculs, et que chacune des vérifications que nous avons présentées à leur sujet nous ont amené constamment au résultat voulu, avec le signe même que l'on devait trouver, quelle que fût la situation du corps envisagé, ou ce qui revient au même, le signe des limites des coordonnées u, v, w correspondant à l'hypothèse, bien que chacun de ces calculs eût mis en jeu, dans chaque cas, comme on l'a vu, des facteurs affectés de l'un et de l'autre signe.

On nous permettra donc, comme conclusion de ces recherches,

de souligner de nouveau, en quelque sorte, ces diverses circonstances qui mettent bien en relief la supériorité des Coordonnées Thermométriques inventées par Lamé sur les Coordonnées Elliptiques de Jacobi déjà signalée au début de ce Chapitre (page 402), en même temps qu'elles fournissent la preuve incontestable, croyons-nous, que les formules nouvelles présentées par nous dans le même paragraphe pour l'emploi de ces coordonnées satisfont pleinement aux trois *desiderata* que nous y avons articulés (page 412), et remplissent dès lors complètement le programme que nous nous y sommes tracé.

E. (*Autre calcul pour la détermination de la masse*). Ayant eu pour but, dans les calculs qui précèdent, de faire ressortir clairement l'avantage du nouveau système de coordonnées que nous proposons de substituer à celui des Coordonnées Elliptiques de Jacobi, nous avons dû naturellement, pour donner plus de force à notre démonstration et présenter comme exemple un emploi plus étendu de ces coordonnées, faire usage pour lesdits calculs exclusivement des coordonnées en question; mais la preuve étant faite actuellement aussi complètement qu'on pouvait le souhaiter, croyons-nous, nous pouvons indiquer à présent, comme pouvant présenter quelque avantage dans certains problèmes, un usage mixte de ces coordonnées, consistant à les faire intervenir, dans la même question, concurremment avec lesdites coordonnées λ, μ, ν de Jacobi, chacun des deux systèmes pour les portions du calcul dans lesquelles son emploi offrira le plus de commodité.

Il arrivera parfois, en effet, que les résultats cherchés seront obtenus ainsi plus rapidement que si l'on avait fait usage exclusivement de l'un ou de l'autre des systèmes précités de coordonnées, soit parce que les quadratures seront plus faciles et la réduction des déterminants plus simple et plus aisée, soit parce que l'on pourra ainsi faire un usage plus complet de la permutation circulaire, qui permettra alors, dans le calcul d'une seule expression, de n'évaluer qu'un terme sur trois, tandis que, dans les déterminations que nous venons d'effectuer, le même procédé

nous a permis simplement de ne calculer qu'une seule des trois quantités en question, correspondant aux trois axes coordonnés, mais ne nous a servi en rien pour le calcul de l'une des quantités envisagées en particulier.

Nous allons en fournir un exemple, en procédant encore une fois à la détermination de la masse du même solide déjà envisagé dans les différents articles qui précèdent, à l'aide d'un calcul nouveau reposant sur cette donnée, et institué spécialement en vue de cette seule question, c'est-à-dire qui ne déduira plus ce résultat comme cas particulier d'une formule plus générale antérieurement établie, ainsi que nous l'avons fait plus haut, avec nos variables auxiliaires p, q, r.

Dans ce but, en vue de faciliter notablement les écritures de ce calcul que nous allons présenter, nous introduirons tout d'abord les deux notations suivantes : nous ferons, quelle que soit la variable ρ et l'exposant entier α,

$$(180) \qquad R_\alpha = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^\alpha d\rho}{2\sqrt{f(\rho)}}, \qquad \overline{R} = \left[\sqrt{f(\rho)}\right]_1^2 = \sqrt{f(\rho_1)} - \sqrt{f(\rho_2)},$$

le radical étant toujours supposé pris avec la détermination positive, et nous conviendrons en outre de désigner par Λ_α, M_α, N_α, et par $\overline{\Lambda}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$, ce que deviennent respectivement ces expressions R_α et $\overline{R}$, lorsque l'on y remplace ρ successivement par λ, μ, ν.

Ces définitions étant admises, il résulte immédiatement de l'expression (75) de l'élément de masse en Coordonnées Elliptiques, que la masse $\mathfrak{M}$ du solide en question sera représentée, avec ce système de coordonnées, par le déterminant

$$(181) \qquad \mathfrak{M} = iD \begin{vmatrix} \Lambda_0, & \Lambda_1, & \Lambda_2 \\ M_0, & M_1, & M_2 \\ N_0, & N_1, & N_2 \end{vmatrix},$$

dont les différents éléments s'évalueront beaucoup plus aisément, comme on va le voir, en introduisant à présent nos coordonnées

u, v, w, qu'en faisant usage exclusivement de l'un ou de l'autre de ces deux systèmes de coordonnées.

En effet, rappelant une fois de plus que les Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν, ne sont autre chose, par définition, que les trois fonctions Φ, Ψ, Π de notre Chapitre IV, et récrivant en conséquence les équations (28) de ce Chapitre ainsi qu'il suit

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \mathrm{A}f(\lambda), \qquad \left(\frac{d\mu}{d\psi}\right)^2 = \mathrm{B}f(\mu), \qquad \left(\frac{d\nu}{d\varpi}\right)^2 = \mathrm{C}f(\nu),$$

nous tirerons de la première, par exemple, en ayant égard en même temps aux définitions (30) du même Chapitre, et (7) et (1) de celui-ci, cette nouvelle égalité

(182) $$\frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \pm\sqrt{\mathrm{A}}\,d\varphi = \pm\frac{2i}{n}\,\frac{2i - in\sqrt{\mathrm{A}}}{2}\,d\varphi = \pm\frac{2i}{n}\,g\,d\varphi = \pm\frac{2i}{n}\,du,$$

dans laquelle le coefficient $\frac{i}{n}$ étant une quantité positive d'après la définition (7) de n, ce sera le signe supérieur, ou bien le signe inférieur, qu'il faudra prendre expressément avec la détermination positive du radical, suivant que la variable u sera elle-même positive ou négative, du moment que la valeur de la dérivée $\frac{d\lambda}{du}$ déduite de la différentiation de la première équation (8), savoir

(182bis) $$\frac{d\lambda}{du} = l^2 . 2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$$

est manifestement (l^2 étant > 0) de même signe que la coordonnée u.

Partant de là, nous obtiendrons tout d'abord, en permutant, les trois valeurs simples, dans lesquelles l'interprétation du radical et du double signe sera dès lors celle que nous venons de dire,

$$\frac{d\lambda}{2\sqrt{f(\lambda)}} = \frac{\pm i}{n}\,du, \qquad \frac{d\mu}{2\sqrt{f(\mu)}} = \frac{\pm i}{l}\,dv, \qquad \frac{d\nu}{2\sqrt{f(\nu)}} = \frac{\pm i}{m}\,dw,$$

et qui donneront, en premier lieu, eu égard à la définition du premier symbole (180), pour les éléments de la première colonne

du déterminant (181), les expressions correspondantes

$$(183) \qquad \Lambda_0 = \frac{\pm i}{n}(u)_1^2, \qquad M_0 = \frac{\pm i}{l}(v)_1^2, \qquad N_0 = \frac{\pm i}{m}(w)_1^2,$$

puis en second lieu, en tenant compte de la première équation (8), ainsi que de la valeur (3) de k^2, la suite d'égalités

$$a^2\Lambda_0 + \Lambda_1 = a^2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{2\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\lambda f(\lambda)}{2\sqrt{f(\lambda)}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}(a^2+\lambda).\frac{d\lambda}{2\sqrt{f(\lambda)}}$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} l^2 \operatorname{sn}^2 u . \frac{\pm i}{n}\, du = \mp in\int_{u_1}^{u_2}\frac{l^2}{-n^2}\operatorname{sn}^2 u\, du = \mp in\int_{u_1}^{u_2} k^2\operatorname{sn}^2 u\, du$$

$$= \mp in\left[\int_0^{u_2} k^2\operatorname{sn}^2 u\, du - \int_0^{u_1} k^2 \operatorname{sn}^2 u\, du\right] = \mp in\left[Z(u_2) - Z(u_1)\right],$$

d'où par conséquent, en permutant encore, les trois équations

$$(184) \quad \begin{cases} a^2\Lambda_0 + \Lambda_1 = \mp in\left[Z(u)\right]_1^2, \qquad b^2M_0 + M_1 = \mp il\left[Z(v)\right]_1^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad c^2N_0 + N_1 = \mp im\left[Z(w)\right]_1^2, \end{cases}$$

qui fourniront alors, sous les mêmes conditions, les valeurs des éléments de la seconde colonne.

Enfin, si l'on fait, pour abréger,

$$f(\rho) = (a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho) = \rho^3 + \mathcal{A}\rho^2 + \mathcal{B}\rho + \mathcal{C},$$

de l'identité

$$\frac{d\sqrt{f(\rho)}}{d\rho} = \frac{f'(\rho)}{2\sqrt{f(\rho)}} = \frac{3\rho^2 + 2\mathcal{A}\rho + \mathcal{B}}{2\sqrt{f(\rho)}},$$

entendue encore avec la détermination positive du radical, l'on déduira sans peine, en la multipliant par $2d\rho$, puis l'intégrant entre les limites ρ_1 et ρ_2, et écrivant alors le résultat à l'aide des notations convenues (180),

$$\overline{R} = 3R_2 + 2\mathcal{A}R_1 + \mathcal{B}R_0, \qquad \text{d'où} \qquad R_2 = \frac{1}{3}\overline{R} - \frac{2}{3}\mathcal{A}R_1 - \frac{1}{3}\mathcal{B}R_0,$$

c'est-à-dire, par conséquent, pour les éléments de la troisième colonne, les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda_2 &= \frac{1}{3}\overline{\Lambda} - \frac{2}{3}\mathcal{A}\Lambda_1 - \mathcal{B}\Lambda_0, \\ M_2 &= \frac{1}{3}\overline{M} - \frac{2}{3}\mathcal{A}M_1 - \mathcal{B}M_0, \\ N_2 &= \frac{1}{3}\overline{N} - \frac{2}{3}\mathcal{A}N_1 - \mathcal{B}N_0. \end{aligned}\right.$$

Tous les éléments du déterminant (181) étant ainsi calculés à l'aide de permutations circulaires, si l'on y remet, en premier lieu, ces dernières valeurs, son expression deviendra par là tout d'abord

$$\mathfrak{M} = iD \begin{vmatrix} \Lambda_0, & \Lambda_1, & \frac{1}{3}\overline{\Lambda} - \frac{2}{3}\mathcal{A}\Lambda_1 - \mathcal{B}\Lambda_0 \\ M_0, & M_1, & \frac{1}{3}\overline{M} - \frac{2}{3}\mathcal{A}M_1 - \mathcal{B}M_0 \\ N_0, & N_1, & \frac{1}{3}\overline{N} - \frac{2}{3}\mathcal{A}N_1 - \mathcal{B}N_0 \end{vmatrix} = \frac{iD}{3} \begin{vmatrix} \Lambda_0, & \Lambda_1, & \overline{\Lambda} \\ M_0, & M_1, & \overline{M} \\ N_0, & N_1, & \overline{N} \end{vmatrix},$$

puis, si l'on remplace de même, dans le nouveau déterminant ainsi obtenu, les éléments de la seconde colonne par leurs valeurs tirées des égalités (184), l'on trouvera alors

$$(185)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{iD}{3} \begin{vmatrix} \Lambda_0, & \mp in[Z(u)]_1^2 - a^2\Lambda_0, & \overline{\Lambda} \\ M_0, & \mp il\,[Z(v)]_1^2 - b^2M_0, & \overline{M} \\ N_0, & \mp im[Z(w)]_1^2 - c^2N_0, & \overline{N} \end{vmatrix} \\ &= \frac{iD}{3}\left[\begin{vmatrix} \Lambda_0, & \mp in[Z(u)]_1^2, & \overline{\Lambda} \\ M_0, & \mp il\,[Z(v)]_1^2, & \overline{M} \\ N_0, & \mp im[Z(w)]_1^2, & \overline{N} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Lambda_0, & -a^2\Lambda_0, & \overline{\Lambda} \\ M_0, & -b^2M_0, & \overline{M} \\ N_0, & -c^2N_0, & \overline{N} \end{vmatrix} \right] \\ &= \frac{iD}{3}(\mathfrak{K}_0 + \mathfrak{H}_0), \end{aligned}\right.$$

en désignant respectivement par $\mathfrak{K}_0$ et $\mathfrak{H}_0$ les deux derniers déterminants que nous venons d'écrire. Or, la première ligne des égalités (8) donnant immédiatement

$$f(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) = l^2 \operatorname{sn}^2 u . (il)^2 \operatorname{cn}^2 u . n^2 \operatorname{dn}^2 u,$$

l'on en conclura, pour les valeurs positives de u, en prenant encore la détermination positive du radical comme dans les différentes équations ci-dessus, et ayant égard de nouveau à la définition (7) de n,

$$\sqrt{f(\lambda)} = -\,in\,l^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

et par suite, avec la seconde notation (180), quels que soient les signes de u, v, w, les trois valeurs : (*)

$$(186)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{\Lambda} &= \left[\sqrt{f(\lambda)}\right]_1^2 = -\,inl^2 (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1^2, \\ \overline{\mathrm{M}} &= \left[\sqrt{f(\mu)}\right]_1^2 = -\,ilm^2 (\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v)_1^2, \\ \overline{\mathrm{N}} &= \left[\sqrt{f(\nu)}\right]_1^2 = -\,imn^2 (\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w)_1^2. \end{aligned}\right.$$

(*) En effet, dans l'hypothèse contraire, c'est-à-dire pour les valeurs négatives de la même variable u, l'on aura bien dans ce cas, à la vérité, toujours avec la détermination positive du radical,

$$\sqrt{f(\lambda)} = +\,in\,l^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

mais d'un autre côté l'équation ci-dessus (182bis) montrant qu'alors la coordonnée λ varie en sens contraire de u, la limite *supérieure* de la quadrature relative à λ, dans l'intégration triple relative aux coordonnées λ, μ, ν, sera donc la valeur de λ qui correspondra à la limite *inférieure* de la quadrature relative à u dans l'intégration triple relative aux coordonnées u, v, w, et inversement; d'où il suit que l'on aura, avec le système de notation des formules précédentes, à la fois

$$\left[\sqrt{f(\lambda)}\right]_2 = +\,inl^2 (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1, \qquad \left[\sqrt{f(\lambda)}\right]_1 = +\,inl^2 (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_2,$$

et par conséquent, en retranchant membre à membre,

$$\left[\sqrt{f(\lambda)}\right]_2 - \left[\sqrt{f(\lambda)}\right]_1 = -\,inl^2\left[(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_2 - (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1\right],$$

c'est-à-dire encore, comme ci-dessus :

$$\left[\sqrt{f(\lambda)}\right]_1^2 = -\,inl^2 (\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1^2.$$

Au moyen de ces expressions, les deux déterminants en question pourront donc être développés de la façon suivante, savoir : pour le premier, d'une part, en changeant les signes des deux dernières colonnes,

$$(187)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_0 &= \begin{vmatrix} \Lambda_0, & \pm in\,[Z(u)]_1^2, & -\overline{\Lambda} \\ M_0, & \pm il\,[Z(v)]_1^2, & -\overline{M} \\ N_0, & \pm im\,[Z(w)]_1^2, & -\overline{N} \end{vmatrix} \\ &= in.il.im \begin{vmatrix} \frac{1}{in}\Lambda_0, & \pm[Z(u)]_1^2, & -\frac{1}{in}\overline{\Lambda} \\ \frac{1}{il}M_0, & \pm[Z(v)]_1^2, & -\frac{1}{il}\overline{M} \\ \frac{1}{im}N_0, & \pm[Z(w)]_1^2, & -\frac{1}{im}\overline{N} \end{vmatrix} = i^3 lmn.\mathrm{K}_0, \end{aligned}\right.$$

en faisant, pour tous les cas, eu égard aux expressions précédentes (186), ainsi qu'aux valeurs (183) dans lesquelles la signification des doubles signes est précisément la même que pour les éléments de la deuxième colonne,

$$(188)\qquad \mathrm{K}_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{n^2}(u)_1^2, & [Z(u)]_1^2, & l^2(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)_1^2 \\ \frac{1}{l^2}(v)_1^2, & [Z(v)]_1^2, & m^2(\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v)_1^2 \\ \frac{1}{m^2}(w)_1^2, & [Z(w)]_1^2, & n^2(\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w)_1^2 \end{vmatrix},$$

et pour le second, d'autre part :

$$\mathfrak{H}_0 = \begin{vmatrix} \Lambda_0, & -a^2\Lambda_0, & \overline{\Lambda} \\ M_0, & -b^2M_0, & \overline{M} \\ N_0, & -c^2N_0, & \overline{N} \end{vmatrix} = (b^2-c^2)M_0N_0.\overline{\Lambda} + (c^2-a^2)N_0\Lambda_0.\overline{M} + (a^2-b^2)\Lambda_0M_0.\overline{N}.$$

Or, cette dernière expression étant composée de trois termes qui se déduisent les uns des autres par permutation circulaire, il

suffira de nouveau de calculer le premier seulement, qui sera, eu égard encore aux mêmes valeurs (183) et (186), et à la signification uniforme du double signe dans les trois premières,

$$(b^2-c^2)\,\mathrm{M_0N_0}.\bar{\Lambda} = m^2.\frac{\pm i}{l}(v)_1^2.\frac{\pm i}{m}(w)_1^2.\left[-inl^2(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1^2\right]$$
$$= ilmn.(v)_1^2(w)_1^2.(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1^2,$$

d'où, par conséquent, en permutant, et ajoutant les valeurs ainsi formées, pour le déterminant $\mathfrak{H}_0$ qui précède, l'expression

(189) $$\mathfrak{H}_0 = ilmn.\mathrm{H}_0,$$

en faisant de nouveau

(190) $$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{H}_0 = (v)_1^2(w)_1^2(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)_1^2 + (w)_1^2(u)_1^2(\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v)_1^2\\ \qquad + (u)_1^2(v)_1^2(\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w)_1^2.\end{array}\right.$$

En remettant les valeurs ainsi obtenues (189) et (187) dans le dernier membre des égalités ci-dessus (185), l'expression demandée de la masse $\mathfrak{M}$ sera donc encore, par ce nouveau calcul, quels que soient les signes des limites des trois coordonnées u, v, w correspondant à la situation du corps,

$$\mathfrak{M} = \frac{i\mathrm{D}}{3}\left(i^3 lmn.\mathrm{K}_0 + ilmn.\mathrm{H}_0\right) = \frac{\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{G}}}{3}\left(-\mathrm{H}_0 + \mathrm{K}_0\right),$$

c'est-à-dire exactement, eu égard aux définitions actuelles (190) et (188) des symboles H_0 et K_0 qui reproduisent identiquement les expressions (156) et (155), le résultat auquel nous étions déjà arrivés, comme cas particulier de la solution obtenue par un calcul moins symétrique et par conséquent moins aisé, pour un problème plus général, au moyen de l'introduction comme variables auxiliaires de nos trois quantités p, q, r.

Le Lecteur voudra bien remarquer d'ailleurs que, pour ce nouveau calcul aussi bien que pour les précédents, le résultat a été obtenu encore une fois, grâce à nos coordonnées u, v, w, sans aucune incertitude sur les signes à aucun instant des calculs.

Nous indiquerons enfin, dans la Note VI de l'Appendice, qui terminera définitivement cet Ouvrage, un exemple des calculs auxquels l'on se trouverait conduit si l'on voulait employer exclusivement ces coordonnées u, v, w sans le secours des variables auxiliaires p, q, r, par le moyen desquelles nous avons pu établir les formules générales précitées (148) et (136).

Action totale exercée sur le même solide, conformément a la loi de Newton, par la masse entière d'un ellipsoïde homogène, de grandeur, de forme, et de situation quelconques par rapport au solide en question. — Afin que l'on ne croie pas que les déterminations que nous venons d'effectuer à l'aide de nos coordonnées u, v, w, n'ont qu'un intérêt purement théorique, nous allons, pour terminer ce dernier Chapitre, en indiquer une application concrète, à propos d'un problème intéressant que ces formules permettront de résoudre, non seulement d'une façon complète quant à la forme analytique des résultats, mais encore *numériquement*, avec telle approximation que l'on voudra.

Envisageant toujours le même solide délimité de toutes parts par des surfaces appartenant à un même Système Ellipsoïdal, et auquel se rapportent toutes les déterminations qui précèdent, nous nous proposerons d'évaluer exactement l'action totale qu'exercera sur ce solide, conformément à la loi d'attraction newtonienne, la masse entière d'un ellipsoïde homogène, dont la forme et la grandeur étant définis par l'équation

$$(191) \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$

la situation, entièrement arbitraire, par rapport au solide en question, sera, elle aussi, complètement définie par les formules de transformation

$$(192) \qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y = y_0 + \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z = z_0 + \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{cases}$$

qui lient, pour un point quelconque, les coordonnées x', y', z' relatives à ses plans principaux, aux coordonnées x, y, z du même point, relatives aux plans principaux du Système Ellipsoïdal auquel appartiennent les surfaces délimitatives du solide proposé, plans que nous conviendrons d'appeler, pour faciliter le discours, plans principaux du solide lui-même.

Dans ces formules, x_0, y_0, z_0 étant les valeurs de x, y, z, pour $x', y', z' = 0$, représentent par conséquent les coordonnées du centre de l'ellipsoïde attirant (191) par rapport à ces plans principaux du solide.

Pour résoudre ce problème, nous rappellerons deux théorèmes ou résultats de la Statique, qui nous serviront de point de départ, savoir :

1° Que les composantes, pour l'unité de masse, de l'attraction exercée par la masse entière de l'ellipsoïde (191) sur un point quelconque (x', y', z'), ont pour expression, par rapport aux axes de cet ellipsoïde,

$$(193) \qquad X' = \mathcal{A}x', \qquad Y' = \mathcal{B}y', \qquad Z' = \mathcal{C}z',$$

les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant des constantes représentées par des intégrales définies, dont on trouve l'expression dans tous les traités d'Analyse ou de Mécanique (*), et qui ne dépendent, bien entendu, que des axes a', b', c' de cet ellipsoïde ;

2° Que tout système de forces, dont l'une, en particulier, a pour composantes X, Y, Z et pour point d'application x, y, z, supposé appliqué à un solide quelconque, peut être réduit, quant à son action sur ce solide :

a) à un couple, appelé *couple résultant*, dont les composantes ont pour expression, par rapport au même système d'axes que celles X, Y, Z des forces données,

$$(194) \qquad L = \mathbf{S}(Yz - Zy), \qquad M = \mathbf{S}(Zx - Xz), \qquad N = \mathbf{S}(Xy - Yx),$$

(*) Voir, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome II, § 205, page 208; ou bien encore LAURENT, *Traité de Mécanique Rationnelle*, Tome I, § 171, 1re édition, page 210, *en haut*.

et b) à une force unique, que nous conviendrons, pour abréger le discours, d'appeler également *résultante* (par extension du sens attribué proprement à ce mot, dans le langage habituel de la Statique), et dont les composantes seront représentées de la même façon par les expressions

$$(195) \qquad P = \mathsf{S}X, \qquad Q = \mathsf{S}Y, \qquad R = \mathsf{S}Z,$$

toutes les sommations qui sont indiquées dans ces deux groupes de formules s'étendant par hypothèse à toutes les forces du système.

Eu égard à ces deux propositions, le problème posé tout à l'heure consistera simplement à déterminer les expressions du couple résultant et de la résultante correspondant au système total des forces X', Y', Z' (193), supposées appliquées à chacun des éléments $d\mathfrak{M}$ de la masse du solide envisagé, ces composantes étant dès lors relatives, comme celles de ces forces elles-mêmes, aux axes de l'ellipsoïde attirant (191), et désignées en conséquence, pour l'analogie des notations, dans les calculs qui vont suivre, par L', M', N' et P', Q', R'.

La question étant ainsi nettement posée, les formules précédentes (193), (194) et (195) donneront, pour la première composante de chacun des deux groupes,

$$L' = \mathsf{S}(Y'z' - Z'y') = \mathsf{S}(\mathfrak{B}y'.z' - \mathfrak{C}z'.y')\,d\mathfrak{M} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\,\mathsf{S}y'z'd\mathfrak{M},$$

$$P' = \mathsf{S}X' = \mathsf{S}\mathfrak{A}x'd\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\mathsf{S}x'd\mathfrak{M},$$

et par conséquent, pour l'ensemble des six composantes demandées, les formules

$$(196) \qquad L' = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\,\mathsf{S}y'z'd\mathfrak{M}, \quad M' = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\,\mathsf{S}z'x'd\mathfrak{M}, \quad N' = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\,\mathsf{S}x'y'd\mathfrak{M},$$

$$(197) \qquad P' = \mathfrak{A}\,\mathsf{S}x'd\mathfrak{M}, \qquad Q' = \mathfrak{B}\,\mathsf{S}y'd\mathfrak{M}, \qquad R' = \mathfrak{C}\,\mathsf{S}z'd\mathfrak{M},$$

dans lesquelles il suffira d'introduire, à la place de x', y', z', les coordonnées x, y, z relatives aux plans principaux du solide pour y faire apparaître, comme seuls éléments, les dix quantités que nous venons de calculer dans le paragraphe précédent.

En effet, ajoutant membre à membre, à trois reprises différentes, les trois formules (192) respectivement multipliées, d'abord par α, α', α'', puis par β, β', β'', puis enfin par γ, γ', γ'', en tenant compte à chaque fois des relations connues entre ces neuf cosinus, nous obtiendrons ainsi les formules de transformations inverses

$$(198)\quad \begin{cases} x' = x'_0 + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, & x'_0 = -(\alpha x_0 + \alpha' y_0 + \alpha'' z_0), \\ y' = y'_0 + \beta x + \beta' y + \beta'' z, & y'_0 = -(\beta x_0 + \beta' y_0 + \beta'' z_0), \\ z' = z'_0 + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z, & z'_0 = -(\gamma x_0 + \gamma' y_0 + \gamma'' z_0), \end{cases}$$

dans lesquelles x'_0, y'_0, z'_0, étant de même les valeurs de x', y', z', pour $x, y, z = 0$, représenteront semblablement les coordonnées du centre du Système Ellipsoïdal auquel appartient, par chacune de ses six faces, le solide proposé, par rapport aux plans principaux de l'ellipsoïde attirant (191).

Or, les deux dernières équations du groupe de gauche (198) donnant, étant multipliées membre à membre,

$$\begin{aligned} y'z' &= (y'_0 + \beta x + \beta' y + \beta'' z)(z'_0 + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z) \\ &= y'_0 z'_0 + \beta\gamma x^2 + \beta'\gamma' y^2 + \beta''\gamma'' z^2 \\ &\qquad + (\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') yz + (\beta''\gamma + \beta\gamma'') zx + (\beta\gamma' + \beta'\gamma) xy, \end{aligned}$$

si l'on introduit, sous le signe sommatoire, cette dernière valeur dans la première égalité (196), en même temps que celle (198) de x' dans la première (197), l'on obtiendra par là, pour les deux premières composantes L' et P', les expressions :

$$L' = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) \mathbf{S} \left[y'_0 z'_0 + 6\gamma x^2 + 6'\gamma' y^2 + 6''\gamma'' z^2 + (6'\gamma'' + 6''\gamma') yz + (6''\gamma + 6\gamma'') zx + (6\gamma' + 6'\gamma) xy \right] d\mathfrak{M}$$

$$= (\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) \left[y'_0 z'_0 \mathbf{S} d\mathfrak{M} + 6\gamma \mathbf{S} x^2 d\mathfrak{M} + 6'\gamma' \mathbf{S} y^2 d\mathfrak{M} + 6''\gamma'' \mathbf{S} z^2 d\mathfrak{M} + (6'\gamma'' + 6''\gamma') \mathbf{S} yz d\mathfrak{M} + (6''\gamma + 6\gamma'') \mathbf{S} zx d\mathfrak{M} + (6\gamma' + 6'\gamma) \mathbf{S} xy d\mathfrak{M} \right],$$

$$P' = \mathfrak{A} \mathbf{S} \left[x'_0 + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \right] d\mathfrak{M}$$

$$= \mathfrak{A} \left[x'_0 \mathbf{S} d\mathfrak{M} + \alpha \mathbf{S} x d\mathfrak{M} + \alpha' \mathbf{S} y d\mathfrak{M} + \alpha'' \mathbf{S} z d\mathfrak{M} \right].$$

Par conséquent, en faisant attention que les expressions (198) de x', y', z' se déduisent les unes des autres en y permutant à la fois les quatre groupes (x'_0, y'_0, z'_0), $(\alpha, 6, \gamma)$, $(\alpha', 6', \gamma')$, $(\alpha'', 6'', \gamma'')$, si l'on convient de faire, pour abréger, conformément à la même loi de permutation,

$$\left\{ \begin{array}{lll} A = 6'\gamma'' + 6''\gamma', & A' = 6''\gamma + 6\gamma'', & A'' = 6\gamma' + 6'\gamma, \\ B = \gamma'\alpha'' + \gamma''\alpha', & B' = \gamma''\alpha + \gamma\alpha'', & B'' = \gamma\alpha' + \gamma'\alpha, \\ C = \alpha'6'' + \alpha''6', & C' = \alpha''6 + \alpha 6'', & C'' = \alpha 6' + \alpha' 6, \end{array} \right.$$

les deux expressions que nous venons d'obtenir, étant récrites à l'aide de nos notations (96), donneront donc, d'après cette loi, pour les six composantes cherchées (196) et (197), les expressions

$$(199) \left\{ \begin{array}{l} L' = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) [y'_0 z'_0 . \mathfrak{M} + 6\gamma I_x^{(2)} + 6'\gamma' I_y^{(2)} + 6''\gamma'' I_z^{(2)} + A J_x^{(0)} + A' J_y^{(0)} + A'' J_z^{(0)}], \\ M' = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) [z'_0 x'_0 . \mathfrak{M} + \gamma\alpha I_x^{(2)} + \gamma'\alpha' I_y^{(2)} + \gamma''\alpha'' I_z^{(2)} + B J_x^{(0)} + B' J_y^{(0)} + B'' J_z^{(0)}], \\ N' = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) [x'_0 y'_0 . \mathfrak{M} + \alpha 6 I_x^{(2)} + \alpha' 6' I_y^{(2)} + \alpha'' 6'' I_z^{(2)} + C J_x^{(0)} + C' J_y^{(0)} + C'' J_z^{(0)}], \end{array} \right.$$

$$(200) \left\{ \begin{array}{l} P' = \mathfrak{A} [x'_0 . \mathfrak{M} + \alpha I_x^{(1)} + \alpha' I_y^{(1)} + \alpha'' I_z^{(1)}], \\ Q' = \mathfrak{B} [y'_0 . \mathfrak{M} + 6 I_x^{(1)} + 6' I_y^{(1)} + 6'' I_z^{(1)}], \\ R' = \mathfrak{C} [z'_0 . \mathfrak{M} + \gamma I_x^{(1)} + \gamma' I_y^{(1)} + \gamma'' I_z^{(1)}], \end{array} \right.$$

dans lesquelles il n'y aura plus qu'à remettre, à la place des dix quantités,

$$(200^{bis})\qquad \mathfrak{M},\quad I_x^{(1)},\quad I_y^{(1)},\quad I_z^{(1)},\quad I_x^{(2)},\quad I_y^{(2)},\quad I_z^{(2)},\quad J_x^{(0)},\quad J_y^{(0)},\quad J_z^{(0)},$$

les valeurs (157), (169), (178), et (179), que nous avons successivement obtenues pour elles, à l'aide de nos Coordonnées Thermométriques u, v, w.

La détermination, que nous venons ainsi d'effectuer, permettra de résoudre nombre de questions intéressantes, parmi lesquelles nous nous bornerons à traiter, à titre d'exemples simples, les suivantes :

« *Pour une orientation relative donnée arbitrairement des* » *deux corps (c'est-à-dire pour un système de valeurs donné à* » *volonté des neuf cosinus* $\alpha, \beta, \ldots \alpha', \ldots \gamma''$), *existe-t-il des posi-* » *tions de l'ellipsoïde attirant pour lesquelles son action totale se* » *réduit, soit à un couple, soit à une force unique? Et dans l'af-* » *firmative, quelles sont ces positions pour l'un et l'autre cas?* »

Pour la première question, la réponse est évidente, en raison de ce que la masse $\mathfrak{M}$ du solide donné ne saurait être nulle, car si l'on fait, pour abréger,

$$(201)\qquad \left\{\begin{aligned} -\mathfrak{P} &= \alpha I_x^{(1)} + \alpha' I_y^{(1)} + \alpha'' I_z^{(1)},\\ -\mathfrak{Q} &= \beta I_x^{(1)} + \beta' I_y^{(1)} + \beta'' I_z^{(1)},\\ -\mathfrak{R} &= \gamma I_x^{(1)} + \gamma' I_y^{(1)} + \gamma'' I_z^{(1)},\end{aligned}\right.$$

les composantes (200) de la résultante qui s'écriront alors

$$P' = \mathfrak{A}(x'_0\mathfrak{M} - \mathfrak{P}),\qquad Q' = \mathfrak{B}(y'_0\mathfrak{M} - \mathfrak{Q}),\qquad R' = \mathfrak{C}(z'_0\mathfrak{M} - \mathfrak{R}),$$

s'annuleront certainement pour les valeurs de x'_0, y'_0, z'_0 :

$$(202)\qquad x'_0 = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}},\qquad y'_0 = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{M}},\qquad z'_0 = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}}.$$

Or les formules de droite (198) sont *a priori* évidemment réversibles, fait qu'il est d'ailleurs bien facile de vérifier, car si on les ajoute membre à membre respectivement multipliées, d'abord par α, β, γ, puis par α', β', γ', puis enfin par α'', β'', γ'', en ayant encore égard à chaque fois aux relations entre les cosinus, l'on obtiendra ainsi, en renversant les deux membres de chaque équation et changeant tous les signes, le nouveau groupe, de forme complètement analogue :

$$(203)\qquad \begin{cases} x_0 = -(\alpha x'_0 + \beta y'_0 + \gamma z'_0), \\ y_0 = -(\alpha' x'_0 + \beta' y'_0 + \gamma' z'_0), \\ z_0 = -(\alpha'' x'_0 + \beta'' y'_0 + \gamma'' z'_0). \end{cases}$$

Si donc l'on suppose remises dans ce dernier groupe, à la place de x'_0, y'_0, z'_0, les valeurs (202) que nous venons de trouver pour le cas de la première question (l'hypothèse du couple unique), nous obtiendrons pour les coordonnées x, y, z du centre de l'ellipsoïde attirant relatives à cette hypothèse, coordonnées que nous désignerons, pour plus de clarté, par x_1, y_1, z_1, les valeurs

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\mathfrak{M}}(\alpha\mathfrak{P} + \beta\mathfrak{Q} + \gamma\mathfrak{R}) = \dfrac{\mathrm{I}_x^{(1)}}{\mathfrak{M}}, \\ y_1 = -\dfrac{1}{\mathfrak{M}}(\alpha'\mathfrak{P} + \beta'\mathfrak{Q} + \gamma'\mathfrak{R}) = \dfrac{\mathrm{I}_y^{(1)}}{\mathfrak{M}}, \\ z_1 = -\dfrac{1}{\mathfrak{M}}(\alpha''\mathfrak{P} + \beta''\mathfrak{Q} + \gamma''\mathfrak{R}) = \dfrac{\mathrm{I}_z^{(1)}}{\mathfrak{M}}, \end{cases}$$

en ayant égard successivement aux définitions (201) des $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, puis aux relations entre les neuf cosinus, c'est-à-dire précisément les coordonnées du centre de gravité du solide proposé. D'où, par conséquent, ce théorème intéressant de Statique, dont l'énoncé paraît effectivement assez naturel, bien qu'il fût sans doute fort difficile d'y arriver rigoureusement par des considérations *a priori* :

THÉORÈME. — « *Étant donné les deux corps ci-dessus considérés, si l'on transporte parallèlement à lui-même l'ellipsoïde attirant de manière que son centre coïncide avec le centre de gravité du solide, son action totale sur ce solide se réduira, quelle que soit l'orientation relative des deux corps, uniquement à un couple, en sorte que cette action tendra simplement à faire tourner l'autre corps autour d'un certain axe passant par ce point, et nullement à déplacer ledit centre de gravité.* »

Semblablement, pour la seconde question, si l'on pose

$$(204)\quad \begin{cases} -\mathcal{L} = 6\gamma I_x^{(2)} + 6'\gamma' I_y^{(2)} + 6''\gamma'' I_z^{(2)} + AJ_x^{(0)} + A'J_y^{(0)} + A''J_z^{(0)}, \\ -\mathfrak{M} = \gamma\alpha I_x^{(2)} + \gamma'\alpha' I_y^{(2)} + \gamma''\alpha'' I_z^{(2)} + BJ_x^{(0)} + B'J_y^{(0)} + B''J_z^{(0)}, \\ -\mathfrak{N} = \alpha 6\, I_x^{(2)} + \alpha' 6' I_y^{(2)} + \alpha'' 6'' I_z^{(2)} + CJ_x^{(0)} + C'J_y^{(0)} + C''J_z^{(0)}, \end{cases}$$

les composantes (199) du couple résultant, qui deviennent alors

$$(204^{\text{bis}})\quad \begin{cases} L' = (\mathcal{B} - \mathcal{C})(y'_0 z'_0 \mathfrak{m} - \mathcal{L}), \quad M' = (\mathcal{C} - \mathcal{A})(z'_0 x'_0 \mathfrak{m} - \mathfrak{M}), \\ N' = (\mathcal{A} - \mathcal{B})(x'_0 y'_0 \mathfrak{m} - \mathfrak{N}), \end{cases}$$

s'annuleront en faisant à la fois

$$y'_0 z'_0 \mathfrak{m} - \mathcal{L} = 0, \qquad z'_0 x'_0 \mathfrak{m} - \mathfrak{M} = 0, \qquad x'_0 y'_0 \mathfrak{m} - \mathfrak{N} = 0,$$

équations qui, étant multipliées membre à membre, donneront

$$(x'_0 y'_0 z'_0)^2 \mathfrak{m}^3 = \mathcal{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N} \qquad \text{ou} \qquad x'_0 y'_0 z'_0 \mathfrak{m}^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{\mathcal{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N}};$$

et dès lors, en divisant cette dernière successivement par chacune des trois précédentes multipliées préalablement par $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, l'on obtiendra ainsi les trois valeurs

$$(205)\quad x'_0 = \pm\mathfrak{m}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}{\mathcal{L}}}, \qquad y'_0 = \pm\mathfrak{m}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mathfrak{N}\mathcal{L}}{\mathfrak{M}}}, \qquad z'_0 = \pm\mathfrak{m}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mathcal{L}\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}},$$

lesquelles correspondront à deux points symétriques par rapport au centre de l'ellipsoïde attirant, origine des x', y', z', (du moment que le double signe de ces formules n'étant introduit que par la seule équation de droite qui les précède, le même signe devra, par conséquent, être pris à la fois dans ces trois expressions), points qui existeront bien réellement si les deux conditions suivantes se trouvent remplies, savoir :

1° Qu'aucune des trois quantités $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, définies par les égalités (204) ne soit égale à zéro ;

2° Que sur les trois, il y en ait un nombre impair (1 ou 3) de positives.

Sous ces conditions, les valeurs que nous venons de trouver étant reportées encore dans les formules (203), indiqueront donc, pour le centre de l'ellipsoïde attirant, comme répondant à la seconde question (l'hypothèse de la résultante unique), les deux points symétriques dont les coordonnées, par rapport aux plans que nous avons appelés plans principaux du solide, seront :

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= \pm\, \mathfrak{M}^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha\sqrt{\frac{\mathcal{M}\mathcal{N}}{\mathcal{L}}} + 6\sqrt{\frac{\mathcal{N}\mathcal{L}}{\mathcal{M}}} + \gamma\sqrt{\frac{\mathcal{L}\mathcal{M}}{\mathcal{N}}}\right), \\ y_2 &= \pm\, \mathfrak{M}^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha'\sqrt{\frac{\mathcal{M}\mathcal{N}}{\mathcal{L}}} + 6'\sqrt{\frac{\mathcal{N}\mathcal{L}}{\mathcal{M}}} + \gamma'\sqrt{\frac{\mathcal{L}\mathcal{M}}{\mathcal{N}}}\right), \\ z_2 &= \pm\, \mathfrak{M}^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha''\sqrt{\frac{\mathcal{M}\mathcal{N}}{\mathcal{L}}} + 6''\sqrt{\frac{\mathcal{N}\mathcal{L}}{\mathcal{M}}} + \gamma''\sqrt{\frac{\mathcal{L}\mathcal{M}}{\mathcal{N}}}\right). \end{aligned}\right.$$

En prenant pour le solide attiré le volume entier d'un ellipsoïde appartenant à la troisième famille du Système Ellipsoïdal considéré dans les théories qui précèdent, les formules que nous venons d'établir résoudraient dès lors le même problème à l'égard de l'attraction totale réciproque de deux ellipsoïdes homogènes de forme et de situation relative quelconques. Mais comme ces formules n'utiliseraient plus en rien dans ce cas les résultats caractéristiques dont la détermination forme à proprement parler l'objet de ce dernier Chapitre, elles ne présenteraient plus en fait aucun rapport avec l'objet direct de cet Ouvrage. C'est pourquoi,

quel que soit leur intérêt au point de vue de la Mécanique, nous ne croyons pas devoir arrêter sur ce cas particulier dans ce texte l'attention du Lecteur (*).

(*) En employant encore un mode de notation analogue à celui qui nous a déjà servi pour nos différentes vérifications dans le paragraphe précédent, et convenant dans cette pensée de spécifier cette fois par une double parenthèse chaque quantité relative au corps envisagé dans ce nouveau problème, c'est-à-dire l'ellipsoïde entier (158), comme les déterminations opérées plus haut (exactement concordantes avec les résultats connus) donneront alors manifestement pour ce corps

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l} ((I_x^{(1)})) = 0, \quad ((I_y^{(1)})) = 0, \quad ((I_z^{(1)})) = 0, \quad ((J_x^{(0)})) = 0, \quad ((J_y^{(0)})) = 0, \quad ((J_z^{(0)})) = 0, \\ ((I_x^{(2)})) = ((\mathfrak{M}))\,\frac{a^2}{5}, \quad ((I_y^{(2)})) = ((\mathfrak{M}))\,\frac{b^2}{5}, \quad ((I_z^{(2)})) = ((\mathfrak{M}))\,\frac{c^2}{5}, \end{array}\right.$$

il suffira évidemment de remettre ces valeurs à la place des quantités homologues dans les résultats établis ci-dessus pour avoir la réponse complète à la question actuelle.

Or les formules (204) devenant ainsi par ces substitutions

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{l} -((\mathcal{L})) = \frac{((\mathfrak{M}))}{5}\,(a^2\beta\gamma + b^2\beta'\gamma' + c^2\beta''\gamma''), \\ -((\mathcal{M})) = \frac{((\mathfrak{M}))}{5}\,(a^2\gamma\alpha + b^2\gamma'\alpha' + c^2\gamma''\alpha''), \\ -((\mathcal{N})) = \frac{((\mathfrak{M}))}{5}\,(a^2\alpha\beta + b^2\alpha'\beta' + c^2\alpha''\beta''), \end{array}\right.$$

il est visible, en premier lieu, eu égard aux formules suivantes (204 *bis*), qu'en tenant compte des précédentes (α), les composantes (199) du couple résultant, et celle (200) de la résultante, se réduiront dans ce cas respectivement aux expressions

$$(\gamma')\quad \left\{\begin{array}{l} ((L')) = (\mathcal{B} - \mathcal{C})\left[y'_0 z'_0((\mathfrak{M})) - ((\mathcal{L}))\right], \quad ((M')) = (\mathcal{C} - \mathcal{A})\left[z'_0 x'_0 \cdot ((\mathfrak{M})) - ((\mathcal{M}))\right], \\ ((N')) = (\mathcal{A} - \mathcal{B})\left[x'_0 y'_0 \cdot ((\mathfrak{M})) - ((\mathcal{N}))\right]; \end{array}\right.$$

$$(\delta)\quad ((P')) = ((\mathfrak{M}))\,.\,\mathcal{A}x'_0, \qquad ((Q')) = ((\mathfrak{M}))\,.\,\mathcal{B}y'_0, \qquad ((R')) = ((\mathfrak{M}))\,.\,\mathcal{C}z'_0,$$

formules qui, jointes aux précédentes (β), fournissent dès lors la représentation complète de l'action totale exercée par la masse entière de l'ellipsoïde (191) sur celle de l'ellipsoïde (158), supposées homogènes l'une et l'autre.

En second lieu, pour ce qui est des deux questions énoncées à la page 567, le théorème de la page suivante subsistant toujours, bien entendu, quant à la première question, la réponse à la seconde sera de même encore fournie par les équations (206), à la seule condition d'y remettre alors à la place de $-\mathcal{L}$, $-\mathcal{M}$, $-\mathcal{N}$, les valeurs correspondantes (β) de $-((\mathcal{L}))$, $-((\mathcal{M}))$, $-((\mathcal{N}))$; c'est-à-dire que, quelle que soit l'orientation relative des deux corps, la même action totale que nous venons de dire à l'instant se

Les différentes déterminations que nous avons opérées dans le paragraphe précédent, et dont nous avons profité pour la question actuelle, avaient déjà montré clairement, ainsi que nous

---

réduira au seul couple (γ) lorsque les centres des deux ellipsoïdes coïncideront, et de même à la seule résultante (δ) lorsque les coordonnées du centre de l'ellipsoïde attirant (191), par rapport aux plans principaux de l'ellipsoïde attiré (158) seront les valeurs indiquées par lesdites formules (206) sous la condition que nous venons de spécifier.

Enfin les formules qui précèdent fournissent, en troisième lieu, tous les éléments nécessaires à la solution complète de deux nouvelles questions entièrement analogues à celles de la page 567 qui s'offrent également pour ce cas particulier, et qui sont les suivantes :

« *Pour une distance donnée arbitrairement* r_0 *des centres des deux ellipsoïdes,*
» *existe-t-il des situations relatives des deux corps telles que l'action totale spécifiée*
» *ci-dessus se réduise encore, soit à un couple, soit à une force unique? Et dans l'affir-*
» *mative, quelles seront ces positions pour l'un et l'autre cas?* »

Pour la première de ces deux questions (celle relative au cas du couple unique), la réponse est encore évidente en raison de ce que, dans les expressions (δ) des composantes de la résultante, les trois coordonnées x'_0, y'_0, z'_0 ne peuvent, r_0 étant donné arbitrairement, être supposées, non plus que (($\mathfrak{M}$)), toutes nulles à la fois. L'action totale envisagée ne saurait donc en aucun cas, dans une telle hypothèse, se réduire à un couple unique.

Quant à la seconde question (celle relative au cas de la résultante unique), si l'on convient de désigner par $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, les cosinus directeurs de la distance r_0 des deux centres par rapport aux axes de l'ellipsoïde (158), lesquels satisferont dès lors aux relations

$$\overline{A}^2 + \overline{B}^2 + \overline{C}^2 = 1, \qquad x'_0 = r_0\overline{A}, \qquad y'_0 = r_0\overline{B}, \qquad z'_0 = r_0\overline{C},$$

il suit immédiatement des expressions (γ)-(β) du couple résultant que la circonstance demandée se produira si l'on peut, en disposant convenablement des douze cosinus

$$(\varepsilon) \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma, \qquad \alpha',\ \beta',\ \gamma', \qquad \alpha'',\ \beta'',\ \gamma'', \qquad \overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C}$$

satisfaire à la fois aux dix conditions

$$(\eta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \end{array} \right. \\ \qquad\qquad \overline{A}^2 + \overline{B}^2 + \overline{C}^2 = 1, \\ \left\{ \begin{array}{l} a^2\beta\gamma + b^2\beta'\gamma' + c^2\beta''\gamma'' = 5r_0^2.\overline{B}\,\overline{C}, \\ a^2\gamma\alpha + b^2\gamma'\alpha' + c^2\gamma''\alpha'' = 5r_0^2.\overline{C}\,\overline{A}, \\ a^2\alpha\beta + b^2\alpha'\beta' + c^2\alpha''\beta'' = 5r_0^2.\overline{A}\,\overline{C}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

l'avons remarqué à la fin de l'article D (page 553), la certitude à tout instant, quant aux signes, des diverses formules de notre théorie, c'est-à-dire en fait la précision et la sûreté de nos coordonnées u, v, w pour spécifier exclusivement telle ou telle portion déterminée de l'espace.

La question qui vient d'être traitée, et dans laquelle interviennent à la fois les dix quantités (200bis) calculées dans ce précédent paragraphe, permet à son tour d'apprécier sur un exemple frappant la supériorité de notre système de coordonnées thermométriques sur celui de Lamé qui offrait seul avant lui l'avantage que nous venons de dire.

En effet, les expressions (169) de $I_x^{(1)}$ et (179) de $J_x^{(0)}$ se composant d'un seul terme ou déterminant, tandis que celle (178) de $I_x^{(3)}$ est composée de trois termes, en y ajoutant les deux termes de l'expression (157) de la masse $\mathfrak{M}$, il nous a donc suffi, grâce à la permutation circulaire qui caractérise nos formules, pour être en mesure de traiter complètement la question actuelle, de calculer seulement un nombre de ces déterminants égal à $2 + 1 + 1 + 3 = 7$, tandis qu'avec le Système de Coordonnées de Lamé qui ne permet pas cette permutation, il eût fallu pour le même problème calculer un nombre $2 + 3 (1 + 1 + 3) = 2 + 3 . 5 = 17$ de déterminants analogues. Enfin les éléments de ces mêmes déterminants ont été obtenus sans difficulté

D'où, en ayant égard à l'expression générale (193) des composantes des forces élémentaires d'attraction, ainsi qu'à la signification des coordonnées x'_0, y'_0, z'_0 (page 565), la réponse suivante à la question posée, qui constitue pour cette question le pendant du théorème formulé ci-dessus à la page 569.

THÉORÈME. — « *S'il existe, un, ou plusieurs, ou une infinité de systèmes de valeurs* « *réelles des douze quantités précitées* (ε) *capables de vérifier simultanément les dix* « *équations suivantes* (η), *à chacun de ces systèmes correspondra une situation rela-* « *tive déterminée des deux ellipsoïdes* (191) *et* (158) *pour laquelle l'action totale du* « *premier sur le second se réduira à une force unique, laquelle force sera alors la* « *même que si la masse entière de celui-ci était condensée en son centre.* »

Nous ne savons si ces résultats ont été déjà signalés; en tout cas, ne les ayant rencontrés nulle part, nous avons cru intéressant de les déduire si aisément de ceux établis plus haut, pour le développement intégral de notre théorie relative aux Coordonnées Thermométriques.

dans notre théorie, à l'aide de quadratures *effectuées* d'un sens clair et précis, grâce à l'emploi des symboles classiques habituels, tandis que ces mêmes quadratures n'eussent pu être que simplement *indiquées*, et ne se fussent prêtées dès lors que d'une façon très incomplète et peu pratique à l'interprétation numérique ou analytique des résultats, avec les types de transcendantes inusités qui forment les éléments du Système de Coordonnées de Lamé.

Le problème intéressant que nous venons de résoudre au contraire aussi complètement qu'on peut le désirer, puisque les résultats peuvent en être interprétés numériquement avec telle approximation que l'on voudra, fait donc bien ressortir la raison d'être et l'utilité de chacun des différents objets que nous nous sommes proposés successivement comme but de nos recherches dans ce dernier Chapitre. Il justifie dès lors suffisamment, croyons-nous, le développement des calculs parfois un peu longs ou multipliés, ou des discussions assez fréquentes et minutieuses auxquelles il nous a fallu procéder pour ne laisser à l'esprit du Lecteur, au terme de cette laborieuse Étude, comme prix de son attention et de sa patience, que des résultats réellement définitifs, dont la certitude ne lui inspire aucune espèce de doute, et dont l'avantage manifeste ne lui permette pas de regretter sa peine.

Le but que nous nous proposions d'une manière générale, avons-nous dit en commençant ce dernier Chapitre, était de faire de l'admirable invention des Coordonnées Thermométriques de Lamé un instrument analytique véritablement *pratique*, c'est-à-dire d'un emploi à la fois commode, sûr, et fécond, et qui n'exige d'autres connaissances que celles de l'Enseignement classique.

Nous nous en remettons au jugement du Lecteur pour décider si nous avons bien accompli notre programme, et réalisé en cela les espérances que nous lui avions fait concevoir.

FIN DU MÉMOIRE PROPREMENT DIT.

